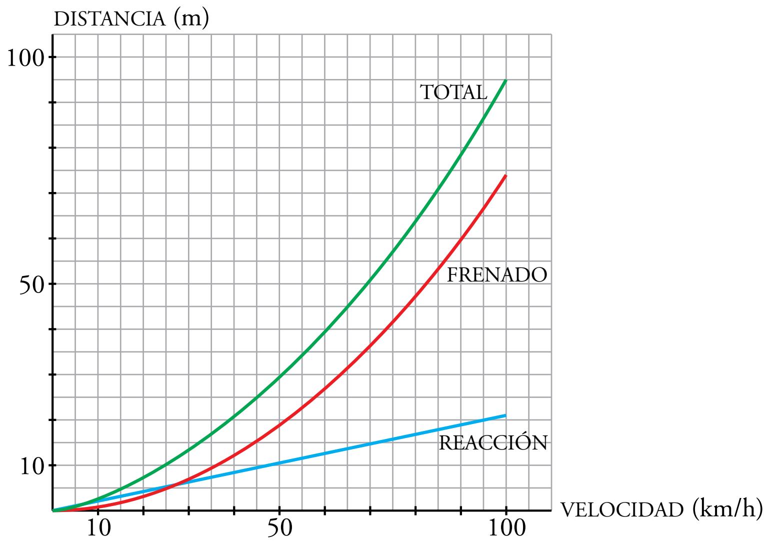
Página 101

Resuelve

1. **Comprueba, usando tu calculadora, la validez de las fórmulas anteriores para los valores de la tabla (haz la comprobación solo para algunos valores de cada fila, teniendo en cuenta que se trata de valores aproximados) y construye las gráficas correspondientes.**



1 Funciones lineales

Página 102

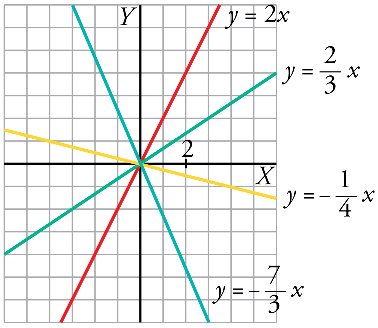
1. **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 2x$

b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

d) $y = -\frac{7}{3}x$



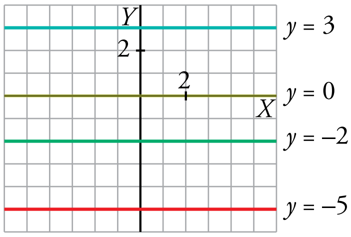
2. **Representa.**

a) $y = 3$

b) $y = -2$

c) $y = 0$

d) $y = -5$



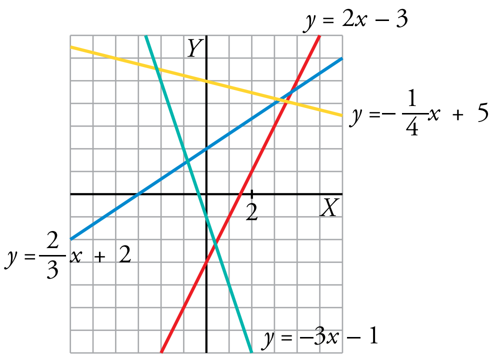
3. **Representa estas funciones:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

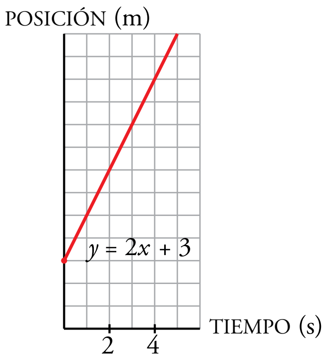
d) $y = -3x - 1$



4. **Un objeto móvil, en el instante inicial, está a 3 m del origen y se aleja de este con una velocidad de 2 m/s.**

Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

La ecuación es $y = 2x + 3$.



5. El precio de las patatas en el mercado es de 1 €/kg, y el de los tomates, 2 €/kg.

a) Escribe la ecuación del coste de una bolsa de patatas en función de su peso.

b) Haz lo mismo para una bolsa de tomates.

c) Representa las funciones anteriores.

a) $\left.\begin{array}{l} x = \text{peso (en kg) de una bolsa de patatas.} \\ y = \text{coste (€)} \end{array}\right\} \to y = x$

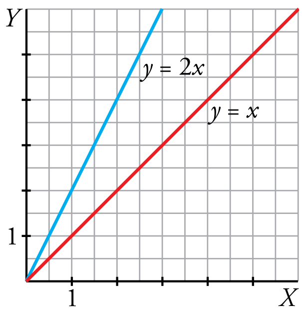
b) $\left.\begin{array}{l} x = \text{peso (en kg) de una bolsa de tomates.} \\ y = \text{coste (€)} \end{array}\right\} \to y = 2x$

c) $y = x$

x	0	1	2
y	0	1	2

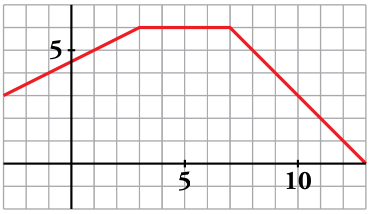
$y = 2x$

x	0	1	2
y	0	2	4



Página 103

6. Escribe la ecuación que corresponde a la gráfica siguiente:

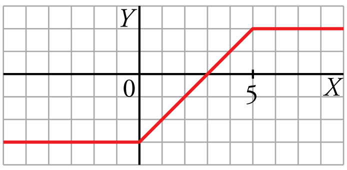


$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & \text{si } x \le 3 \\ 6 & \text{si } 3 < x < 7 \\ 13 - x & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$$

7. Representa la función cuya expresión analítica es la siguiente:

$$y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ x - 3 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Di cuál es la pendiente de cada uno de los tramos que forman la función. ¿Es una función continua?



En los tramos primero y tercero, la pendiente es 0.

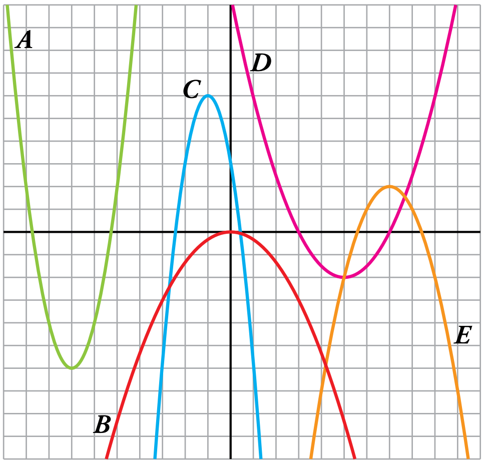
En el segundo tramo, la pendiente es 1.

2 Funciones cuadráticas. Parábolas

Página 105

1. Asocia cada uno de los coeficientes de la x^2 con su correspondiente parábola:

- $\boldsymbol{a = -1}$
- $\boldsymbol{a = 2}$
- $\boldsymbol{a = -\frac{1}{3}}$
- $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$
- $\boldsymbol{a = -3}$



$a = -1 \rightarrow E$ $\quad a = 2 \rightarrow A$ $\quad a = -\frac{1}{3} \rightarrow B$

$a = \frac{1}{2} \rightarrow D$ $\quad a = -3 \rightarrow C$

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $\boldsymbol{y = x^2 - 2x + 2}$ **b)** $\boldsymbol{y = -2x^2 - 2x - 3}$ **c)** $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2}$

d) $\boldsymbol{y = -x^2 + 4}$ **e)** $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + 2}$ **f)** $\boldsymbol{y = 3x^2 + 6x + 4}$

a) $y = x^2 - 2x + 2$

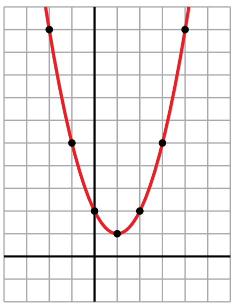
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 1 \rightarrow V(1, 1)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	10	5	2	1	2	5	10

Vemos que a medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes crecen, por lo tanto, la parábola no cortará al eje X.



$y = x^2 - 2x + 2$

b) $y = -2x^2 - 2x - 3$

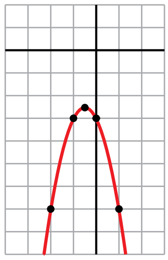
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} \to V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Tabla de valores:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y	-7	-3	$-\frac{5}{2}$	-3	-7

A medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes decrecen, por tanto, la gráfica no corta al eje X.



$y = -2x^2 - 2x - 3$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{-1}{2/3} = -\frac{3}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{4} \to V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

Tabla de valores:

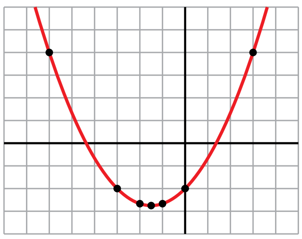
x	-6	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	3
y	4	-2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{8}{3}$	-2	4

$y = 0 \to \frac{1}{3}x^2 + x - 2 = 0 \to x^2 + 3x - 6 = 0 \to$

$$\to x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

La parábola corta al eje de abscisas

en $\left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, 0\right)$.



$y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

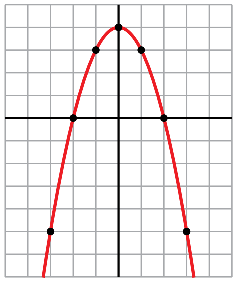
d) $y = -x^2 + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-2} = 0 \;\rightarrow\;$ Ordenada: $f(0) = 4 \;\rightarrow\; V(0, 4)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Observamos que obtenemos en la tabla todos los cortes con los ejes:



$y = -x^2 + 4$

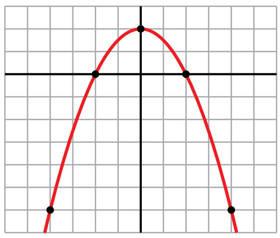
e) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-1} = 0 \;\rightarrow\;$ Ordenada: $f(0) = 2 \;\rightarrow\; V(0, 2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	–6	0	2	0	–6

Obtenemos en la tabla todos los puntos de corte con los ejes:



$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

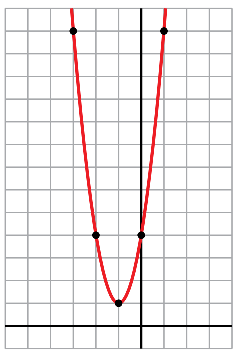
f) $y = 3x^2 + 6x + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{-6}{6} = -1 \;\rightarrow\;$ Ordenada: $f(-1) = 1 \;\rightarrow\; V(-1, 1)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1
y	–13	4	1	4	13

Los valores de las ordenadas crecen a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje *X*.



$y = 3x^2 + 6x + 4$

3. **Dibuja en tu cuaderno la representación gráfica de estas funciones cuadráticas:**

a) $y = (x-1)\cdot(x-3)$ **b)** $y = 2(x-2)^2$

c) $y = \frac{1}{2}(x+2)\cdot(x-2)$ **d)** $y = (x-1)^2 + 5$

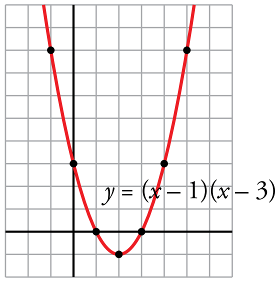
a) $y = (x-1)\cdot(x-3) \;\to\; y = x^2 - 4x + 3$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{2} = 2 \;\to\;$ Ordenada: $f(2) = -1 \;\to\; V(2, -1)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8



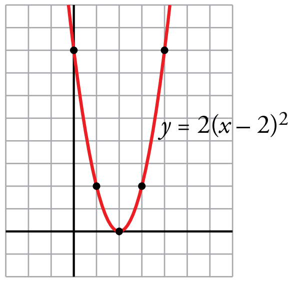
b) $y = 2(x-2)^2 \;\to\; y = 2x^2 - 8x + 8$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{8}{4} = 2 \;\to\;$ Ordenada: $f(2) = 0 \;\to\; V(2, 0)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	8	2	0	2	8



Solo hemos obtenido un único punto de corte con el eje de abscisas, veamos si hay más:

$y = 0 \;\to\; 2(x-2)^2 = 0 \;\to\; x = 2$

La parábola corta al eje de abscisas solamente en el punto (2, 0).

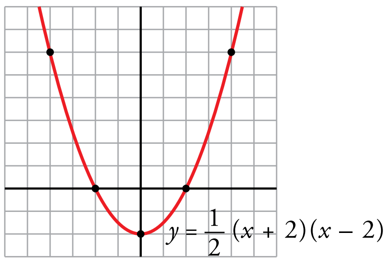
c) $y = \frac{1}{2}(x+2)\cdot(x-2) \;\to\; y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{0}{1} = 0 \;\to\;$ Ordenada: $f(0) = -2 \;\to\; V(0, -2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	6	0	–2	0	6



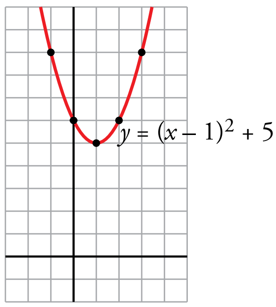
d) $y = (x-1)^2 + 5 \;\to\; y = x^2 - 2x + 6$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \;\to\;$ Ordenada: $f(1) = 5 \;\to\; V(1, 5)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3
y	9	6	5	6	9



Las ordenadas aumentan a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.

Página 106

4. Resuelve, analítica y gráficamente, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

- *Analíticamente*

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{array}\right\} \; x^2 - 6x + 5 = x - 5 \;\rightarrow\; x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \; \begin{cases} x_1 = 5 \;\rightarrow\; y_1 = 0 \\ x_2 = 2 \;\rightarrow\; y_2 = -3 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: (5, 0) y (2, –3)

- *Gráficamente*

Representamos la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ y la recta $y = x - 5$:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = 5 \end{array}\right\} \; x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x(x - 6) = 0 \; \left.\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}\right\} \; V(3, -4)$$

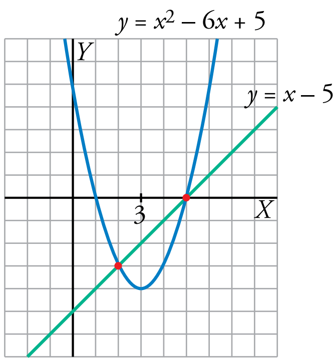
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \; x^2 - 6x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje X son (5, 0), (1, 0); con el eje Y, el punto (0, 5).

Puntos próximos al vértice:

x	2	4	6
y	–3	–3	5

La recta $y = x - 5$ pasa, por ejemplo, por los puntos (5, 0) y (3, –2).



Los puntos de corte de las dos curvas son (5, 0) y (2, –3).

5. Representa gráficamente esta función:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \le 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \dfrac{-3x + 15}{2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

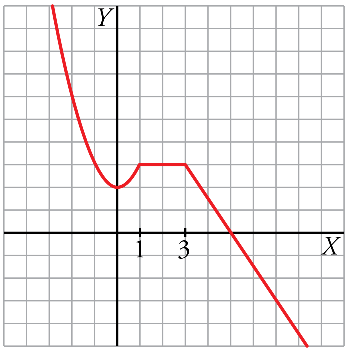
- El primer tramo de la función corresponde a un trozo de parábola definida solo para $x \le 1$:

— Vértice: $V(0, 2)$

— No corta al eje X y sí al eje Y, en (0, 2).

— Pasa por los puntos (1, 3), (–2, 6).

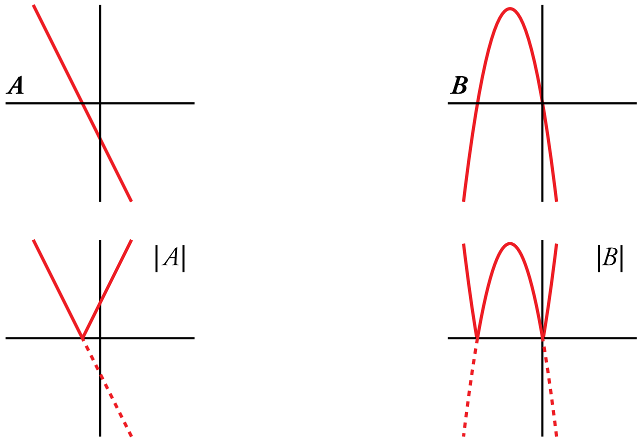
- El 2.º tramo corresponde a un trozo de la recta horizontal $y = 3$.
- El último tramo es un trozo de recta que pasa por (5, 0) y (3, 3).



3 Funciones con valor absoluto

Página 107

1. Representa en tu cuaderno el valor absoluto de estas funciones:



2. Representa estas funciones y pon sus expresiones analíticas sin usar el valor absoluto:

a) $y = |3 - 2x|$

b) $y = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$

c) $y = |x^2 - 4x|$

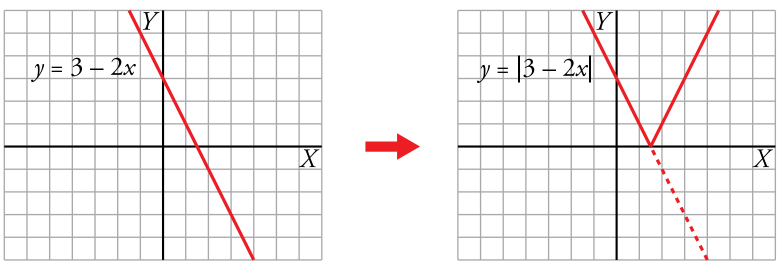
d) $y = |-x^2 + 6x - 5|$

a) $y = |3 - 2x| \;\to\; y = \begin{cases} -(3 - 2x) & \text{si } 3 - 2x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si } 3 - 2x \geq 0 \end{cases} \;\to\; y = \begin{cases} -3 + 2x & \text{si } x > \dfrac{3}{2} \\ 3 - 2x & \text{si } x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = 3 - 2x \;\to$

x	0	3/2	2
y	3	0	–1

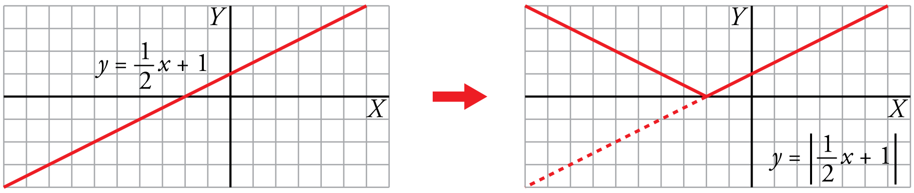


b) $y = \left|\frac{1}{2}x + 1\right| \;\to\; y = \begin{cases} -\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) & \text{si } \dfrac{1}{2}x + 1 < 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 1 & \text{si } \dfrac{1}{2}x + 1 \geq 0 \end{cases} \;\to\; y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - 1 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{1}{2}x + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = \frac{1}{2}x + 1 \rightarrow$

x	–4	–2	0
y	–1	0	1



c) $y = |x^2 - 4x| \rightarrow y = \begin{cases} -(x^2 - 4x) & \text{si } x^2 - 4x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{si } x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x < 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x \leq 0 \text{ o } x \geq 4 \end{cases}$

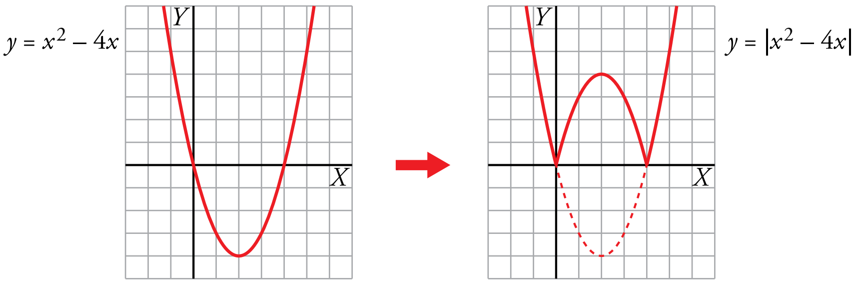
Representación gráfica: $y = x^2 - 4x$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow$ Ordenada: $f(2) = -4 \rightarrow V(2, -4)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



d) $y = |-x^2 + 6x - 5| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 6x - 5) & \text{si } -x^2 + 6x - 5 < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

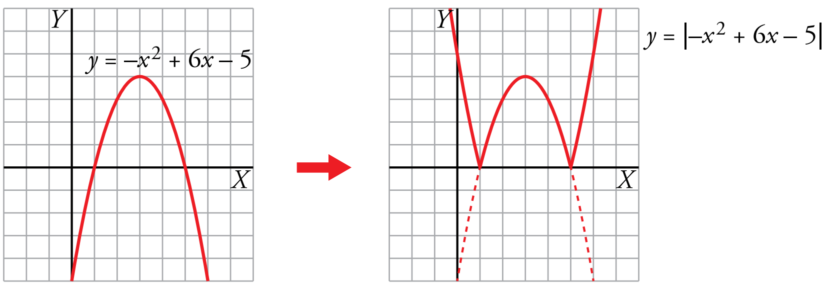
Representación gráfica: $y = -x^2 + 6x - 5$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow$ Ordenada: $f(3) = 4 \rightarrow V(3, 4)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	–5	0	3	4	3	0	–5



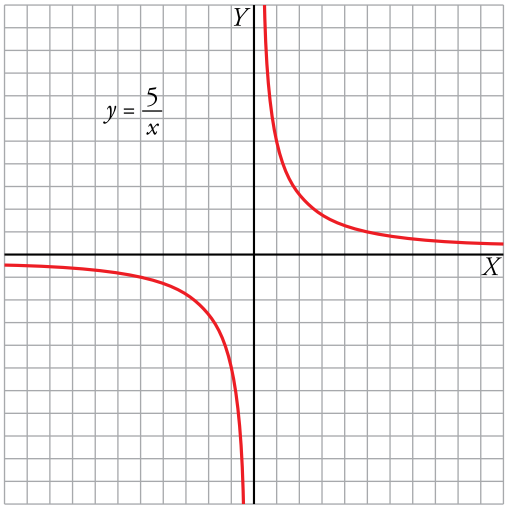
4 Funciones de proporcionalidad inversa

Página 108

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{5}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

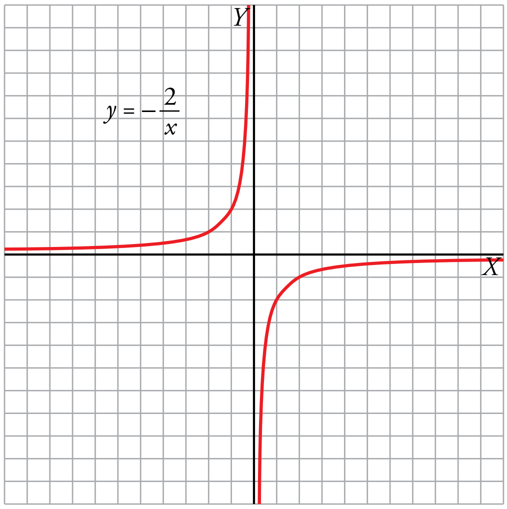


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–10	–5	–1	–0,5	0,5	1	5	10
y	–1/2	–1	–5	–10	10	5	1	1/2

b) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

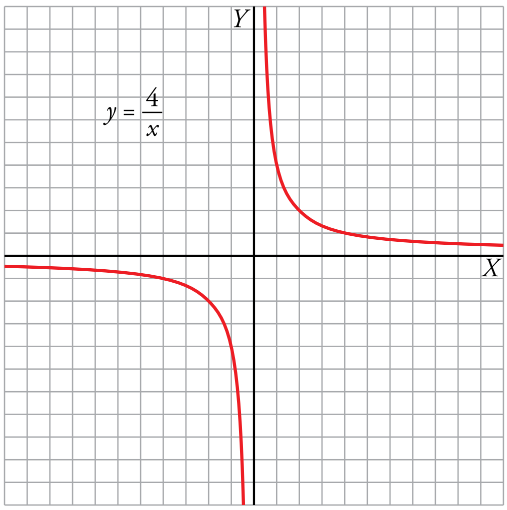


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4
y	1/2	1	2	4	–4	–2	–1	–1/2

c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$



- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–1/2	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	1/2

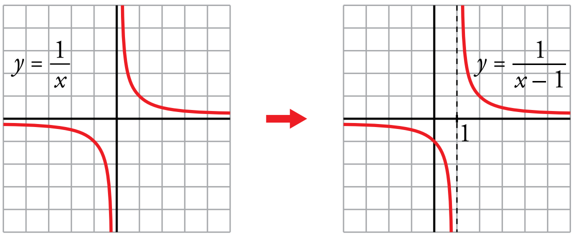
2. **Representa estas funciones y halla su dominio:**

a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+1}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+2}$

a) $y = \dfrac{1}{x-1} \rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
- $x = 1$ es asíntota vertical

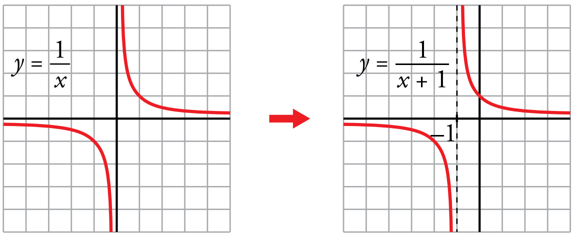
  $y = 0$ es asíntota horizontal



b) $y = \dfrac{1}{x+1} \rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
- $x = -1$ es asíntota vertical

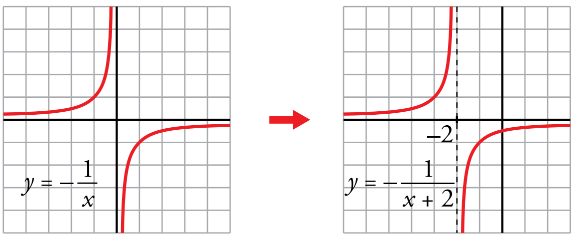
  $y = 0$ es asíntota horizontal



c) $y = -\dfrac{1}{x+2} \rightarrow y = -\dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 2 unidades a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $x = -2$ es asíntota vertical

  $y = 0$ es asíntota horizontal



5 Funciones radicales

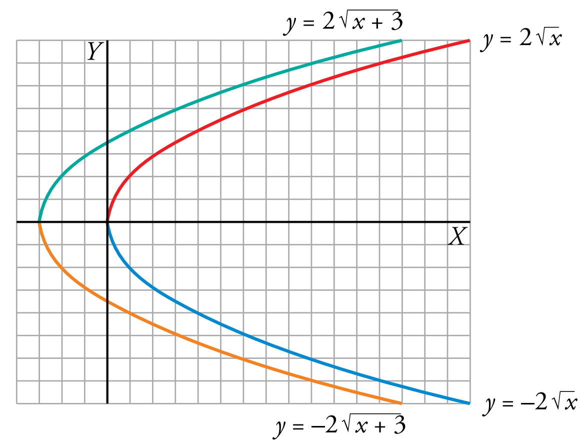
Página 109

1. Representa las siguientes funciones y halla el dominio de definición de cada una:

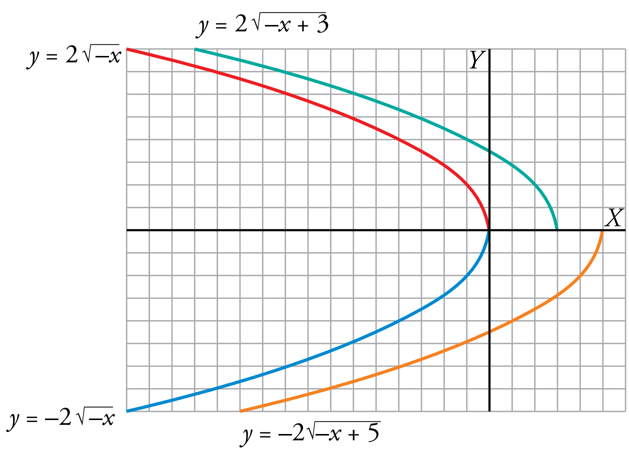
a) $y = 2\sqrt{x}$ **b)** $y = -2\sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{x+3}$ **d)** $y = -2\sqrt{x+3}$

e) $y = 2\sqrt{-x}$ **f)** $y = -2\sqrt{-x}$ **g)** $y = 2\sqrt{-x+3}$ **h)** $y = -2\sqrt{-x+5}$

a) b) c) d)



e) f) g) h)



Los dominios de definición son:

a) $[0, +\infty)$ b) $[0, +\infty)$ c) $[-3, +\infty)$ d) $[-3, +\infty)$

e) $(-\infty, 0]$ f) $(-\infty, 0]$ g) $(-\infty, 3]$ h) $(-\infty, 5]$

6 Funciones exponenciales

Página 110

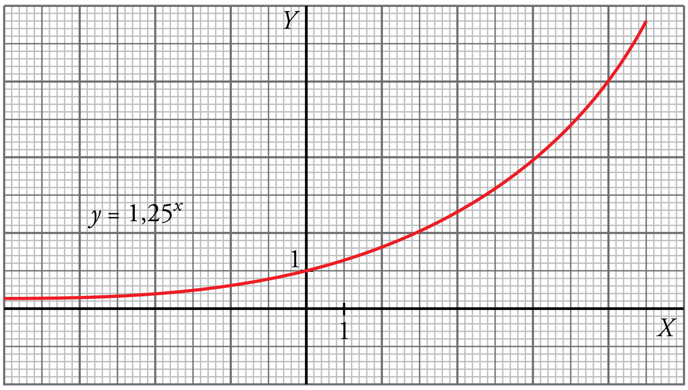
1. Representa las siguientes funciones en tu cuaderno. ¿Cuál es el dominio de definición de cada una?

a) $y = 1{,}25^x$ **b)** $y = 0{,}8^x$

a) $y = 1{,}25^x$, $Dom = \mathbb{R}$

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora:

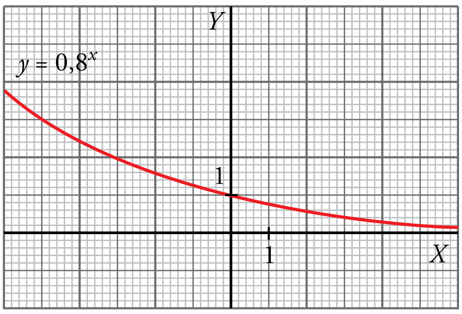
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	8
y	0,41	0,51	0,64	0,8	1	1,25	1,56	1,95	2,44	5,96



b) $y = 0{,}8^x$, $Dom = \mathbb{R}$

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1,95	1,56	1,25	1	0,8	0,64	0,51



2. Escribe en forma exponencial estas expresiones:

a) $2^{0,4x}$ **b)** $10^{0,01x}$ **c)** $1{,}01^{12x}$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x/28}$

a) $2^{0,4x} \to (2^{0,4})^x \to (1{,}32)^x$

b) $10^{0,01x} \to (10^{0,01})^x \to (1{,}02)^x$

c) $1{,}01^{12x} \to (1{,}01^{12})^x \to (1{,}13)^x$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x/28} \to \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/28}\right]^x \to (0{,}98)^x$

7 Funciones logarítmicas

Página 111

1. Representa en tu cuaderno cada par de funciones en los mismos ejes coordenados:

a) $y = 3^x$; $y = \log_3 x$ **b)** $y = 2{,}2^x$; $y = \log_{2,2} x$ **c)** $y = 4^x$; $y = \log_4 x$

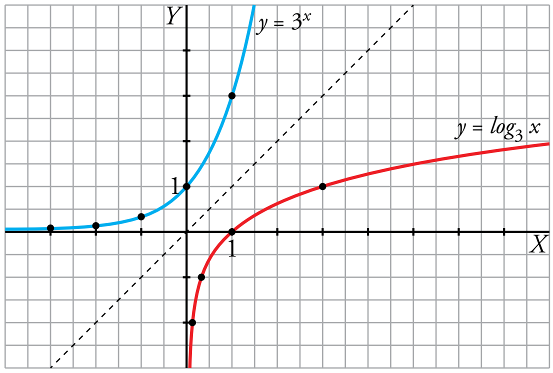
Di cuál es el dominio de definición de cada una.

a) $y = 3^x$, $Dom = \mathbb{R}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

$y = \log_3 x$, $Dom = (0, +\infty)$

x	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27
y	–3	–2	–1	0	1	2	3

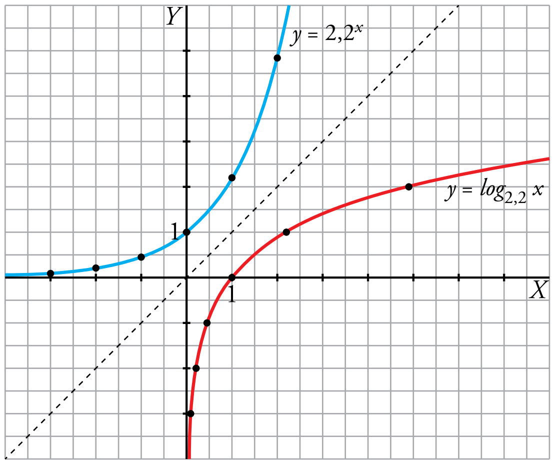


b) $y = 2{,}2^x$, $Dom = \mathbb{R}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,09	0,21	0,45	1	2,2	4,84	10,65

$y = \log_{2,2} x$, $Dom = (0, +\infty)$

x	0,09	0,21	0,45	1	2,2	4,84	10,65
y	–3	–2	–1	0	1	2	3

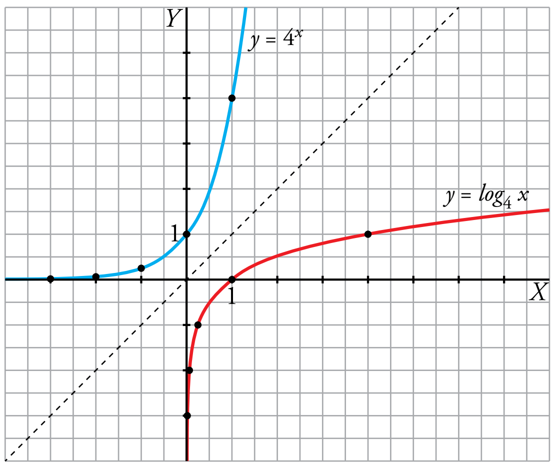


c) $y = 4^x$, $Dom = \mathbb{R}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64

$y = \log_4 x$, $Dom = (0, +\infty)$

x	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



Ejercicios y problemas

Página 113

Practica

Funciones lineales

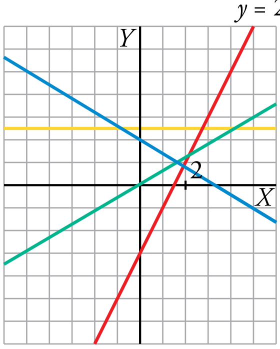
1. **Representa las siguientes funciones lineales:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$

d) $y = 2{,}5$



2. **Dados la pendiente y un punto, calcula en cada caso la ecuación de la recta:**

a) $P(0, 0)$, $m = 1$ **b)** $P(2, -1)$, $m = -2$

c) $A(-2, 1)$, $m = \frac{1}{2}$ **d)** $A(1, 3)$, $m = -\frac{5}{3}$

En todos los apartados buscamos la ecuación de una recta $\rightarrow$ $y = mx + n$

a) $m = 1 \rightarrow y = x + n$

Pasa por $P(0, 0) \rightarrow 0 = 0 + n \rightarrow n = 0$

Por tanto, $y = x$.

b) $m = -2 \rightarrow y = -2x + n$

Pasa por $P(2, -1) \rightarrow -1 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = 3$

Por tanto, $y = -2x + 3$.

c) $m = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + n$

Pasa por $A(-2, 1) \rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n \rightarrow n = 2$

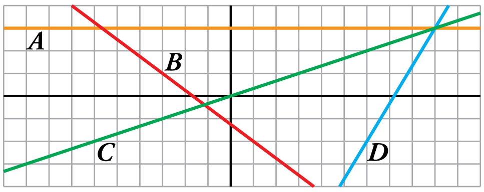
Por tanto, $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d) $m = -\frac{5}{3} \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + n$

Pasa por $A(1, 3) \rightarrow 3 = -\frac{5}{3} \cdot 1 + n \rightarrow n = 3 + \frac{5}{3} \rightarrow n = \frac{14}{3}$

Por tanto, $y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$.

3. **Calcula la ecuación de estas funciones lineales:**



A Función constante $\rightarrow$ $y = n$; Pasa por $(0, 3)$ $\rightarrow$ $n = 3$ $\rightarrow$ $y = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Función constante} \rightarrow y = n \\ \text{Pasa por } (0,3) \rightarrow n = 3\end{array}\right\} \rightarrow y = 3$$

B Función lineal $\rightarrow$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(-3, 1) \in B \\ (1, -2) \in B\end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{-2-1}{1-(-3)} = -\frac{3}{4} \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + n$$

$$(1, -2) \in B \rightarrow -2 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + n \rightarrow n = -2 + \frac{3}{4} \rightarrow n = -\frac{5}{4}$$

Por tanto, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

C Función de proporcionalidad directa $\rightarrow$ $y = mx$

$$\left.\begin{array}{l}(0, 0) \in C \\ (3, 1) \in C\end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{3}x$.

D Función lineal $\rightarrow$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(6, -2) \in D \\ (9, 3) \in D\end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{3-(-2)}{9-6} = \frac{5}{3} \rightarrow y = \frac{5}{3}x + n$$

$$(6, -2) \in D \rightarrow -2 = \frac{5}{3} \cdot 6 + n \rightarrow n = -2 - 10 \rightarrow n = -12$$

Por tanto, $y = \frac{5}{3}x - 12$.

4. **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*:**

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ **b)** $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ **d)** $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

a) $y = 0$

b) $m = \frac{-3+4}{2+2} = \frac{1}{4}$; $y + 4 = \frac{1}{4}(x + 2) \rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

c) $m = \frac{3}{3} = 1$; $y + 3 = x \rightarrow y = x - 3$

d) $m = \frac{1+5}{-3} = -2$; $y + 5 = -2x \rightarrow y = -2x - 5$

5. **Halla la ecuación, en cada caso, y represéntala:**

a) Recta que pasa por (2, –3) y es paralela a la recta que pasa por (1, –2) y (–4, 3).

b) Función de proporcionalidad que pasa por (–4, 2).

c) Función constante que pasa por (18; –1,5).

a) • La pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, –2) y (–4, 3) es:

$$m = \frac{3-(-2)}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -1$$

• Si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente, por tanto, la recta buscada tiene pendiente $m = -1 \rightarrow y = -x + n$

• La recta pasa por (2, –3) $\rightarrow -3 = -2 + n \rightarrow n = -1$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -x - 1$.

b) • Función de proporcionalidad $\rightarrow y = mx$

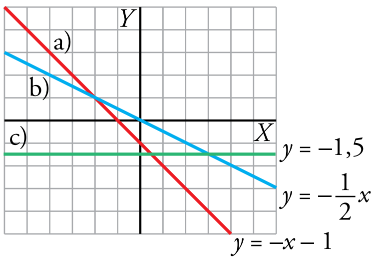
• Pasa por (–4, 2) $\rightarrow 2 = m \cdot (-4) \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, la recta buscada es $y = -\frac{1}{2}x$.

c) • Función constante $\rightarrow y = n$

• Pasa por (18; –1,5) $\rightarrow -1{,}5 = n$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -1{,}5$.



6. **Halla el valor de los parámetros *a*, *b*, *c*, *d* y *e* para que las rectas y los puntos cumplan las condiciones pedidas:**

a) Que la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (–2, *a*) tenga pendiente –1.

b) Que la recta $y = bx + 2$ pase por el punto (–3, 4).

c) Que las rectas de ecuaciones $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se corten en el punto de ordenada 2. ¿Cuál es la abscisa correspondiente?

d) Que los puntos (*d*, –2) y (4, *e*) pertenezcan a la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - 3$.

a) $\left.\begin{array}{r} 4m + n = 0 \\ -2m + n = a \end{array}\right\} \rightarrow m = -\frac{a}{6},\ n = \frac{2a}{3}$

Si $m = -1 \rightarrow -1 = -\frac{a}{6} \rightarrow a = 6$

b) La recta $y = bx + 2$ pasa por (–3, 4) $\rightarrow 4 = b \cdot (-3) + 2 \rightarrow 3b = -2 \rightarrow b = -\frac{2}{3}$

c) $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se cortan en el punto de ordenada 2: $\left.\begin{array}{l} 3x + c = 2 \\ cx + 3 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow c = 2 - 3x$

$(2 - 3x) \cdot x + 3 = 2 \rightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \begin{cases} x = -1/3 \\ x = 1 \end{cases}$

- $x = -\frac{1}{3} \rightarrow c = 2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \rightarrow c = 3$

  En este caso son la misma recta: $y = 3x + 3$

- $x = 1 \rightarrow c = 2 - 3 \cdot 1 \rightarrow c = -1$

  Las rectas son $y = 3x - 1$ e $y = -x + 3$ y se cortan en el punto $(1, 2)$.

d) $(d, -2)$ pertenece a la recta $y = \frac{1}{2}x - 3 \rightarrow -2 = \frac{1}{2} \cdot d - 3 \rightarrow d = 2$

$(4, e)$ pertenece a la recta $y = \frac{1}{2}x - 3 \rightarrow e = \frac{1}{2} \cdot 4 - 3 \rightarrow e = -1$

Funciones cuadráticas

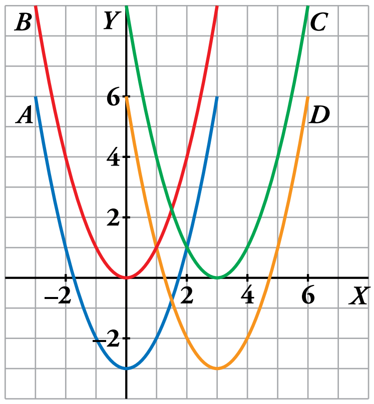
7. **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



a) $y = x^2 \leftrightarrow B$

b) $y = (x - 3)^2 \leftrightarrow C$

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow A$

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow D$

8. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta:**

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = -3x^2$

d) $y = 0,4x^2$

a) $y = x^2 + 1$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

b) $y = -x^2 + 4$

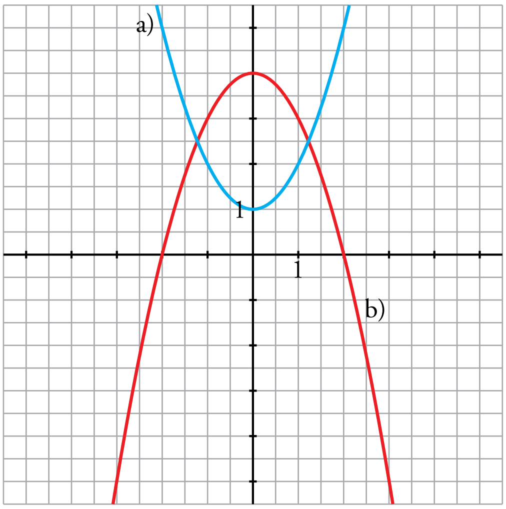
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–5	0	3	4	3	0	–5	–12

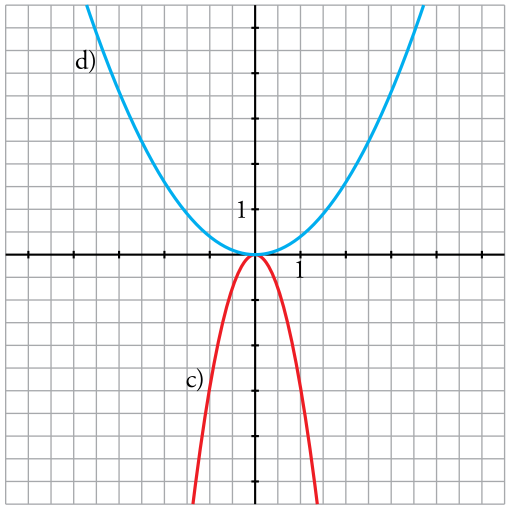
c) $y = -3x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–48	–27	–12	–3	0	–3	–12	–27	–48

d) $y = 0{,}4x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6,4	3,6	1,6	0,4	0	0,4	1,6	3,6	6,4





9. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 2)^2$ **b)** $y = x^2 - 4x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ **d)** $y = x^2 - 9$

a) Vértice: (–2, 0)

Cortes con los ejes:

(–2, 0), (0, 4)

Otros puntos: (–1, 1), (–3, 1)

b) Vértice: (2, –4)

Cortes con los ejes:

(0, 0), (4, 0)

Otros puntos: (5, 5), (–1, 5)

c) Vértice: (–2, –1)

Cortes con los ejes:

$\left(-\sqrt{2} - 2, 0\right), \left(\sqrt{2} - 2, 0\right)$, (0, 1)

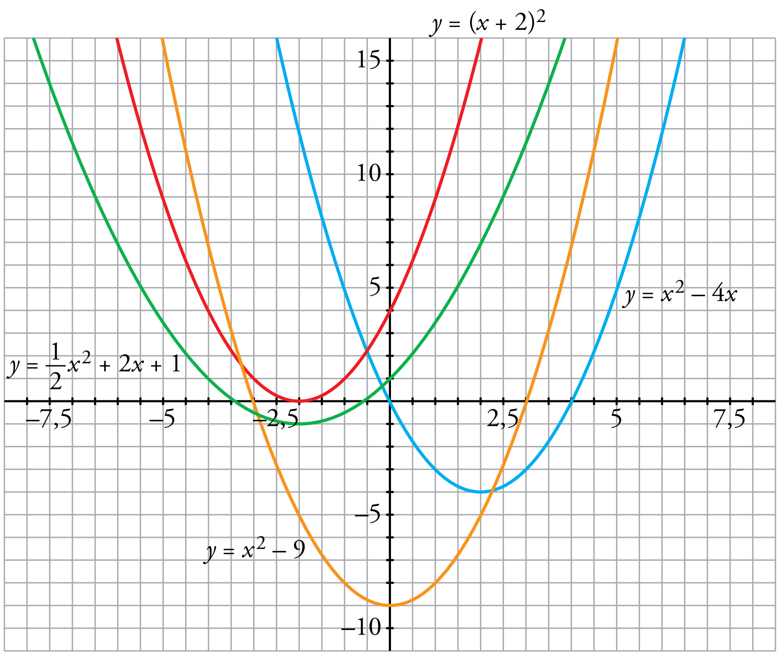
Otros puntos: $\left(1, \frac{7}{2}\right), \left(-5, \frac{7}{2}\right)$

d) Vértice: (0, –9)

Cortes con los ejes:

(–3, 0), (3, 0), (0, –9)

Otros puntos: (–2, –5), (2, –5)



10. **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo. Después, represéntalas.**

a) $y = 8 - x^2$

b) $y = 4 + (3 - x)^2$

c) $y = -x^2 - 2x + 4$

d) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $y = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

f) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

a) Vértice: (0, 8), máximo

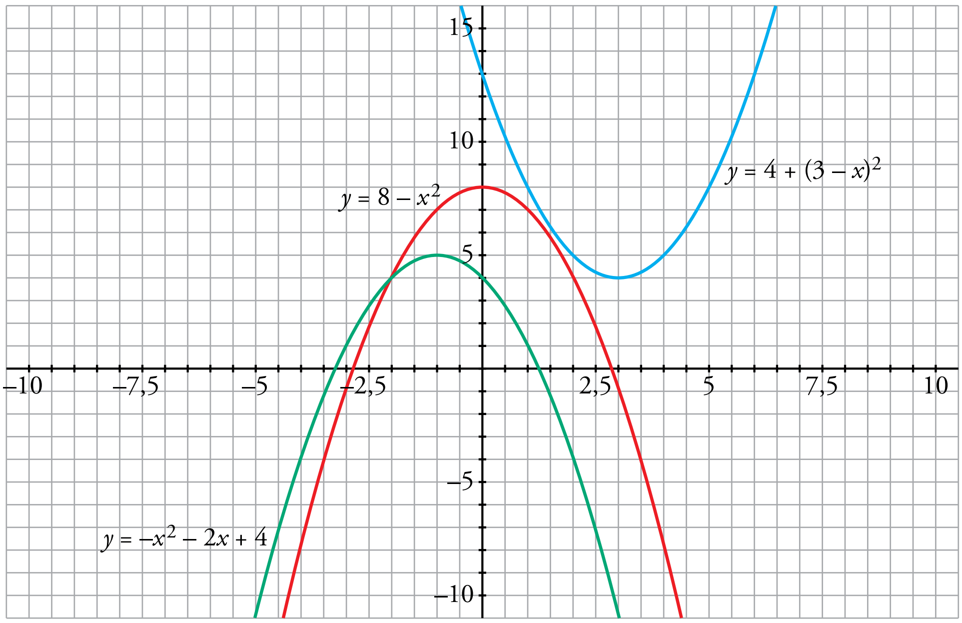
b) Vértice: (3, 4), mínimo

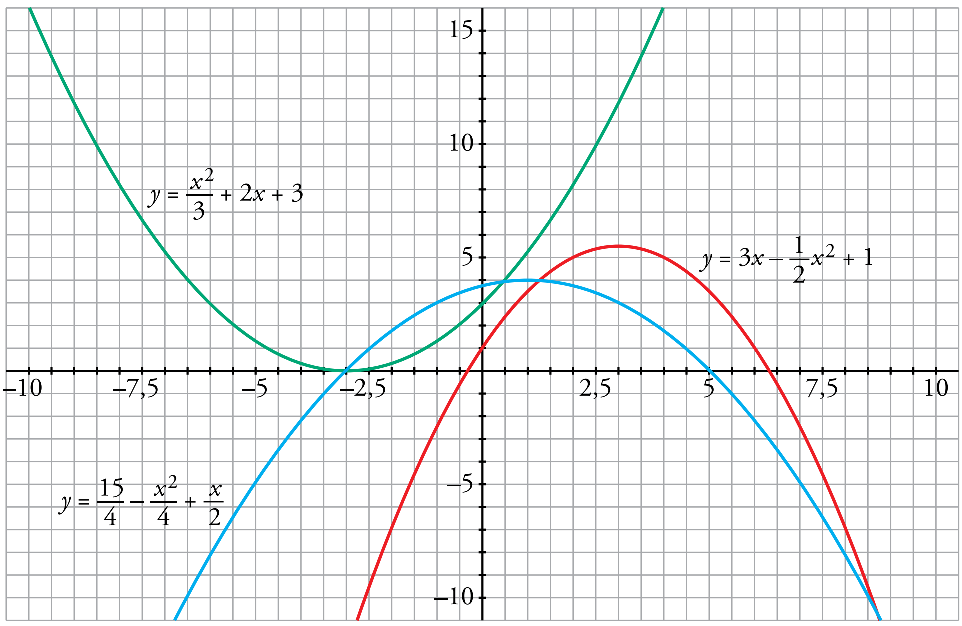
c) Vértice: (–1, 5), máximo

d) Vértice: $\left(3, \frac{11}{2}\right)$, máximo

e) Vértice: (1, 4), máximo

f) Vértice: (–3, 0), mínimo





11. **Representa estas funciones cuadráticas:**

a) $y = (x - 5)^2$ **b)** $y = x \cdot (x - 5)$

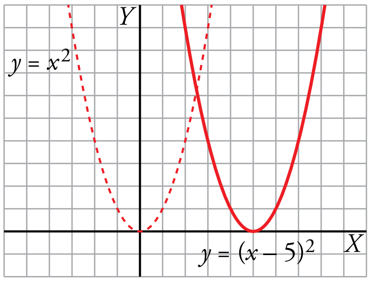
c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$ **d)** $y = 4 - (x - 2)^2$

a) $y = (x - 5)^2 \rightarrow$ Es la traslación 5 unidades a la derecha de $y = x^2$.

Vértice: (5, 0)

Tabla de valores:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	9	4	1	0	1	4	9



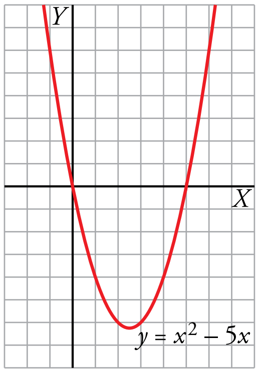
b) $y = x \cdot (x - 5) \rightarrow y = x^2 - 5x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{5}{2} \rightarrow$ Ordenada: $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{25}{4} \rightarrow V\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{-25}{4}\right)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6
y	6	0	–4	–6	$-\frac{25}{4}$	–6	–4	0	6

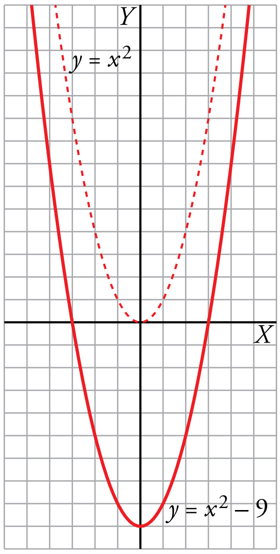


c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3) \rightarrow y = x^2 - 9 \rightarrow$ Es la traslación 9 unidades hacia abajo de $y = x^2$.

Vértice: (0, –9)

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7

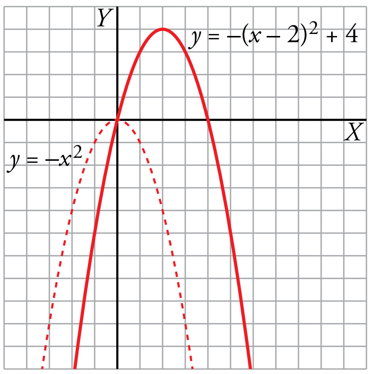


d) $y = 4 - (x - 2)^2 \rightarrow$ Es la traslación 4 unidades hacia arriba y 2 a la derecha de $y = -x^2$.

Vértice: (2, 4)

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–5	0	3	4	3	0	–5



12. **Utiliza una escala adecuada y representa.**

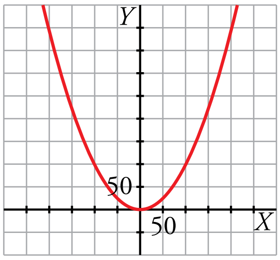
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ b) $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ d) $y = -10x^2 - 100x$

a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ $\to$ Vértice: (0, 0)

Tabla de valores:

x	–200	–150	–100	–50	0	50	100	150	200
y	400	225	100	25	0	25	100	225	400



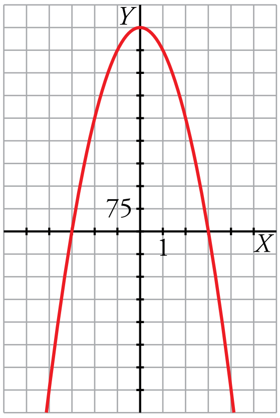
b) $y = -75x^2 + 675$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0}{-150} = 0 \to$ Ordenada: $f(0) = 675 \to V(0, 675)$

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–525	0	375	600	675	600	375	0	–525



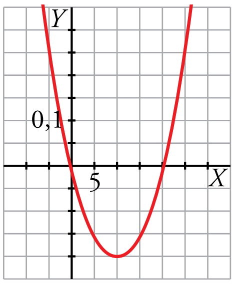
c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0{,}04}{0{,}004} = 10 \to$ Ordenada: $f(10) = -0{,}2 \to V(10; -0{,}2)$

Tabla de valores:

x	–5	0	5	10	15	20	25
y	0,25	0	–0,15	–0,2	–0,15	0	0,25



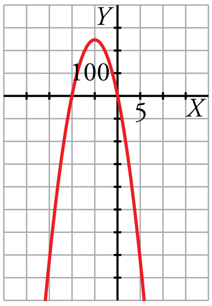
d) $y = -10x^2 - 100x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{100}{-20} = -5 \to$ Ordenada: $f(-5) = 250 \to V(-5, 250)$

Tabla de valores:

x	–15	–10	–5	0	5
y	–750	0	250	0	–750



Página 114

Funciones definidas a trozos

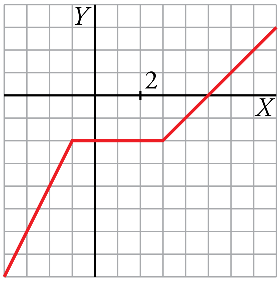
13. **Representa estas funciones definidas a trozos:**

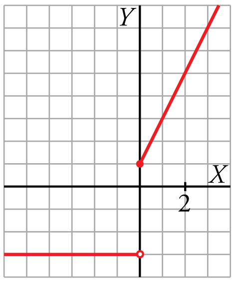
a) $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

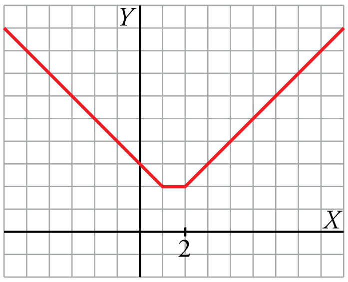
b) $y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

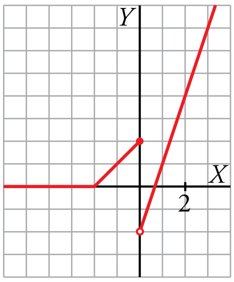
c) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

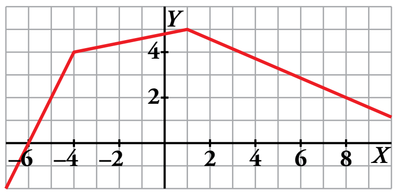
a)


b)


c)


d)


14. **Escribe la ecuación de la función a trozos que corresponde a esta gráfica:**



• El primer tramo pasa por (–6, 0) y (–4, 4):

$$m = \frac{4}{-4+6} = 2; \quad y = 2(x+6) = 2x + 12$$

• El segundo tramo pasa por (–4, 4) y (1, 5):

$$m = \frac{5-4}{1+4} = \frac{1}{5}; \quad y - 4 = \frac{1}{5}(x+4) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$$

• El tercer tramo pasa por (1, 5) y (8, 2):

$$m = \frac{2-5}{8-1} = -\frac{3}{7}; \quad y - 5 = -\frac{3}{7}(x-1) \;\rightarrow\; y = -\frac{3}{7}x + \frac{38}{7}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 12 & \text{si } x < -4 \\ \frac{1}{5}x + \frac{24}{5} & \text{si } -4 \le x \le 1 \\ -\frac{3}{7}x + \frac{38}{7} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

15. **Representa las siguientes funciones:**

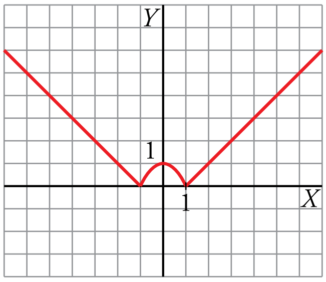
a) $f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si } x<-1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ -x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} x^2+4x & \text{si } x<0 \\ -x^2+4x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si } x<-1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

- La recta $y = -1 - x$ está definida para $x < -1$:

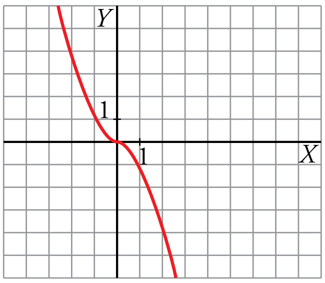
x	-2	$-1,5$
y	1	0,5

- La parábola $y = 1 - x^2$ definida si $-1 \le x \le 1$, corta al eje X en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y al eje Y en $(0, 1)$, vértice a su vez de la parábola.
- La recta $y = x - 1$ está definida para $x > 1$ y pasa por $(2, 1)$ y $(3, 2)$.



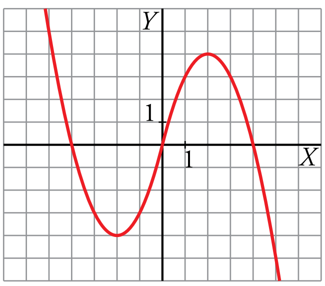
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ -x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

- La parábola $y = x^2$, definida para $x < 0$, pasa por $(-1, 1)$ y $(-2, 4)$.
- La parábola $y = -x^2$, definida para $x \ge 0$, tiene su vértice en $(0, 0)$ y pasa por $(1, -1)$ y $(2, -4)$.



c) $f(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{si } x<0 \\ -x^2+4x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

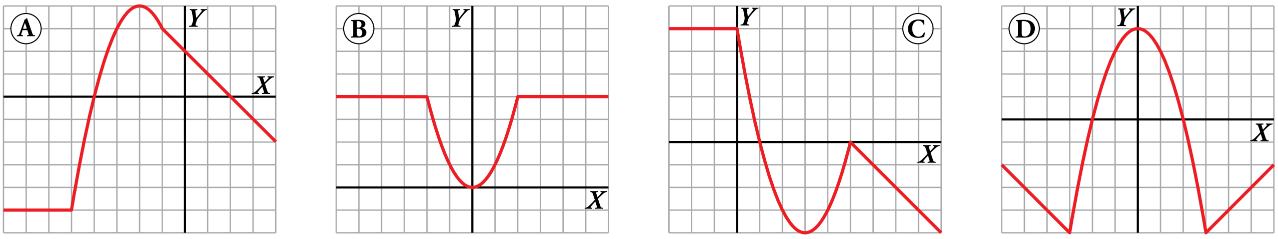
- La parábola $x^2 + 4x$, definida para $x < 0$, pasa por $(-4, 0)$, $(0, 0)$ y tiene vértice en $(-2, -4)$.
- La parábola $-x^2 + 4x$, definida para $x \ge 0$, pasa por $(0, 0)$, $(4, 0)$ y tiene vértice en $(2, 4)$.



16. **Sabemos que las ecuaciones de las parábolas que aparecen representadas en las gráficas son:**

a) $y = -x^2 - 4x$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$ **c)** $y = x^2$ **d)** $y = 4 - x^2$

Escribe la expresión analítica de la función representada en cada gráfica.



GRÁFICA A:

Primer tramo: $y = -5$ si $x \le -5$

Segundo tramo: $y = -x^2 - 4x$ si $-5 < x \le -1$

Tercer tramo: Función lineal que pasa por $(-1, 3)$ y $(2, 0)$.

$$m = \frac{0-3}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1 \to y = -x + n$$

Pasa por $(2, 0) \to 0 = -2 + n \to n = 2$

Luego: $y = -x + 2$ si $x > -1$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica A es: $y = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x \le -5 \\ -x^2 - 4x & \text{si} \quad -5 < x \le -1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

GRÁFICA B:

Primer tramo: $y = 4$ si $x \le -2$

Segundo tramo: $y = x^2$ si $-2 < x < 2$

Tercer tramo: $y = 4$ si $x \ge 2$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica B es: $y = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

GRÁFICA C:

Primer tramo: $y = 5$ si $x \le 0$

Segundo tramo: $y = x^2 - 6x + 5$ si $0 < x < 5$

Tercer tramo: Función lineal que pasa por $(5, 0)$ y $(6, -1)$.

$$m = \frac{-1-0}{6-5} = \frac{-1}{1} = -1 \to y = -x + n$$

Pasa por $(5, 0) \to 0 = -5 + n \to n = 5$

Luego: $y = -x + 5$ si $x \ge 5$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica C es: $y = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si} \quad 0 < x < 5 \\ -x + 5 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

GRÁFICA D:

Primer tramo: Función lineal que pasa por $(-3, -5)$ y $(-4, -4)$.

$$m = \frac{-4-(-5)}{-4-(-3)} = \frac{1}{-1} = -1 \;\rightarrow\; y = -x + n$$

Pasa por $(-3, -5) \;\rightarrow\; -5 = 3 + n \;\rightarrow\; n = -8$

Luego: $y = -x - 8$ si $x \le -3$

Segundo tramo: $y = 4 - x^2$ si $-3 < x < 3$

Tercer tramo: Función lineal que pasa por $(3, -5)$ y $(4, -4)$.

$$m = \frac{-4-(-5)}{4-3} = \frac{1}{1} = 1 \;\rightarrow\; y = x + n$$

Pasa por $(3, -5) \;\rightarrow\; -5 = 3 + n \;\rightarrow\; n = -8$

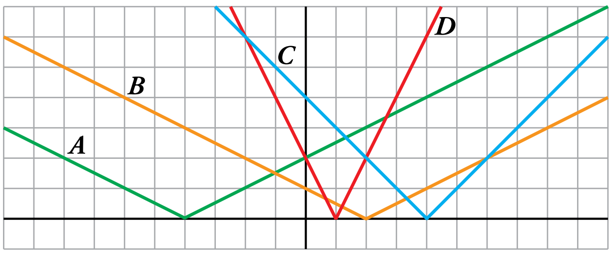
Luego: $y = x - 8$ si $x \ge 3$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica D es: $y = \begin{cases} -x-8 & \text{si} \quad x \le -3 \\ 4-x^2 & \text{si} \quad -3 < x < 3 \\ x-8 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

Valor absoluto de una función

17. **Asocia cada función con su correspondiente gráfica:**

a) $y = |2x - 2|$ **b)** $y = |4 - x|$ **c)** $y = \left|\frac{1}{2}x + 2\right|$ **d)** $y = \left|1 - \frac{1}{2}x\right|$

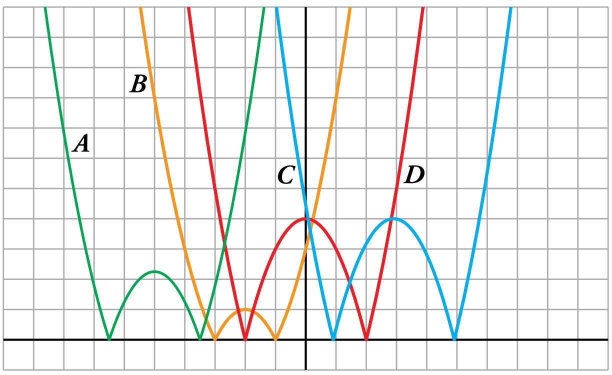


a) $y = |2x - 2| \;\rightarrow\; D$ b) $y = |4 - x| \;\rightarrow\; C$ c) $y = \left|\frac{1}{2}x + 2\right| \;\rightarrow\; A$ d) $y = \left|1 - \frac{1}{2}x\right| \;\rightarrow\; B$

18. **Asocia cada función con su gráfica:**

a) $y = |x^2 - 4|$ **b)** $y = |-x^2 - 10x - 22{,}75|$

c) $y = |x^2 - 6x + 5|$ **d)** $y = |-x^2 - 4x - 3|$



a) $y = |x^2 - 4| \;\rightarrow\; D$ b) $y = |-x^2 - 10x - 22{,}75| \;\rightarrow\; A$

c) $y = |x^2 - 6x + 5| \;\rightarrow\; C$ d) $y = |-x^2 - 4x - 3| \;\rightarrow\; B$

19. **Expresa cada una de estas funciones en forma de función definida a trozos, tal como se hace en el ejemplo. Luego, represéntalas.**

- $y = |2x - 6| \to y = \begin{cases} -2x + 6 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) $y = \left|4 - \frac{1}{3}x\right|$ **b)** $y = |2x + 2|$ **c)** $y = |x^2 - 2x - 3|$

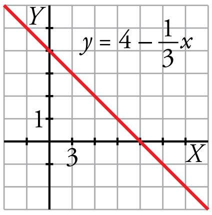
d) $y = |-x^2 + 2x - 1|$ **e)** $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right|$ **f)** $y = |9 - x^2|$

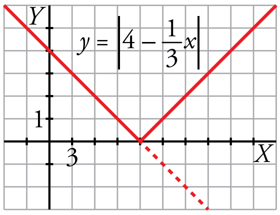
a) $y = \left|4 - \frac{1}{3}x\right| \to y = \begin{cases} -\left(4 - \frac{1}{3}x\right) & \text{si } 4 - \frac{1}{3}x < 0 \\ 4 - \frac{1}{3}x & \text{si } 4 - \frac{1}{3}x \geq 0 \end{cases} \to y = \begin{cases} -4 + \frac{1}{3}x & \text{si } x > 12 \\ 4 - \frac{1}{3}x & \text{si } x \leq 12 \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = 4 - \frac{1}{3}x \to$

x	0	12	15
y	4	0	–1



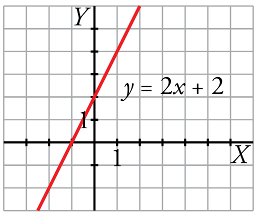


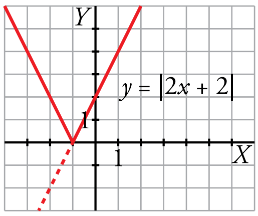
b) $y = |2x + 2| \to y = \begin{cases} -(2x + 2) & \text{si } 2x + 2 < 0 \\ 2x + 2 & \text{si } 2x + 2 \geq 0 \end{cases} \to y = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = 2x + 2 \to$

x	–2	–1	0
y	–2	0	2





c) $y = |x^2 - 2x - 3| \rightarrow y = \begin{cases} -(x^2 - 2x - 3) & \text{si} \;\; x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si} \;\; x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si} \;\; x \leq -1 \;\; \text{o} \;\; x \geq 3 \end{cases}$

Representación gráfica:

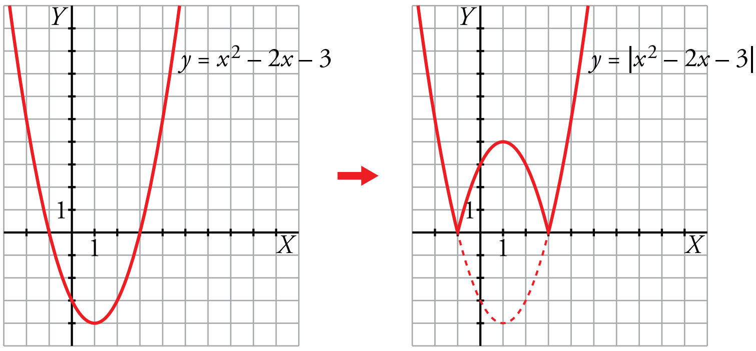
$y = x^2 - 2x - 3$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = -4 \rightarrow V(1, -4)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



d) $y = |-x^2 + 2x - 1| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 2x - 1) & \text{si} \;\; -x^2 + 2x - 1 < 0 \\ -x^2 + 2x - 1 & \text{si} \;\; -x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si} \;\; x < 1 \;\; \text{o} \;\; x > 1 \\ -x^2 + 2x - 1 & \text{si} \qquad x = 1 \end{cases} \rightarrow y = x^2 - 2x + 1$

Representación gráfica:

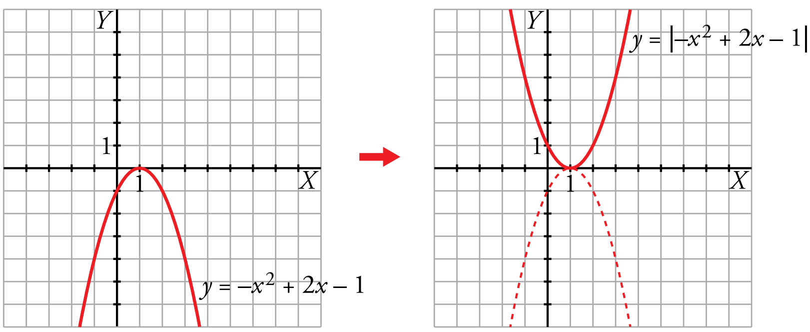
$y = -x^2 + 2x - 1$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 0 \rightarrow V(1, 0)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3
y	–4	–1	0	–1	–4



e) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right| \to y = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} & \text{si } \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} \ge 0 \end{cases} \to$

$\to y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2} & \text{si } 1 < x < 7 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} & \text{si } x \le 1 \text{ o } x \ge 7 \end{cases}$

Representación gráfica:

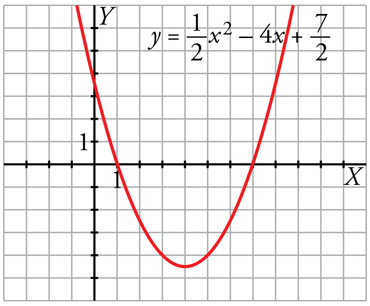
$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

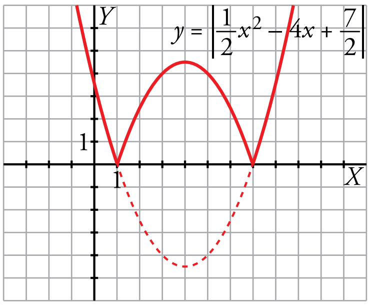
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{1} = 4 \to$ Ordenada: $f(4) = -\frac{9}{2} \to V\left(4, -\frac{9}{2}\right)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$





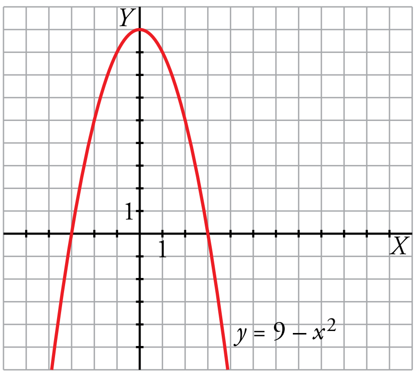
f) $y = |9 - x^2| \to y = \begin{cases} -(9 - x^2) & \text{si } 9 - x^2 < 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 9 - x^2 \ge 0 \end{cases} \to y = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < -3 \text{ o } x > 3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 \le x \le 3 \end{cases}$

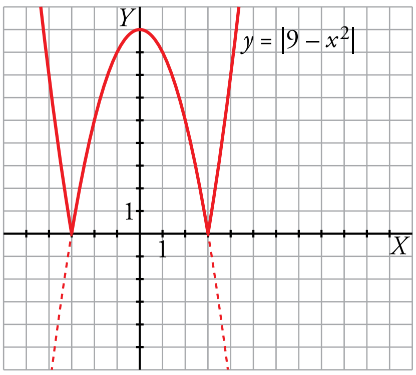
Representación gráfica:

$y = 9 - x^2 \to y = -x^2 + 9 \to$ Vértice: $(0, 9)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	5	8	9	8	5	0





20. **Representa la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = |x^2 - 1| - 2$

b) $y = 1 + |x|$

c) $y = 1 - |x^2 - 6x + 5|$

d) $y = |x| - |4 - x|$

a) $y = |x^2 - 1| - 2 \;\rightarrow\; y = \begin{cases} -(x^2 - 1) - 2 & \text{si } x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 - 2 & \text{si } x^2 - 1 \ge 0 \end{cases} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; y = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \le -1 \text{ o } x \ge 1 \end{cases}$

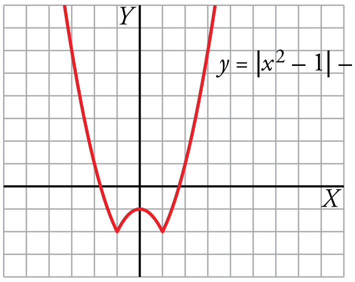
Representación gráfica:

- $y = -x^2 - 1$ (si $-1 < x < 1$) $\rightarrow$ Vértice: $(0, -1)$

x	–1	0	1
y	–2	–1	–2

- $y = x^2 - 3$ (si $x \le -1$ o $x \ge 1$) $\rightarrow$ Vértice: $(0, -3)$

x	–3	–2	$-\sqrt{3}$	–1	1	$\sqrt{3}$	2	3
y	6	1	0	–2	–2	0	1	6



b) $y = 1 + |x| \;\rightarrow\; y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

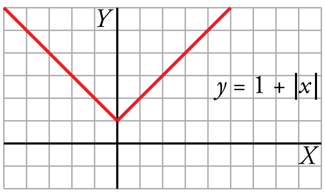
Representación gráfica:

- $y = 1 - x$ (si $x < 0$) $\rightarrow$

x	0	–1	–2
y	1	2	3

- $y = 1 + x$ (si $x \ge 0$) $\rightarrow$

x	0	1	2
y	1	2	3



c) $y = 1 - |x^2 - 6x + 5| \rightarrow y = \begin{cases} 1 - (-x^2 + 6x - 5) & \text{si } x^2 - 6x + 5 < 0 \\ 1 - (x^2 - 6x + 5) & \text{si } x^2 - 6x + 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 6x + 6 & \text{si } 1 < x < 5 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \leq 1 \text{ o } x \geq 5 \end{cases}$

Representación gráfica:

- $y = x^2 - 6x + 6$ (si $1 < x < 5$)

  Vértice:

  Abscisa: $p = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow$ Ordenada: $f(3) = -3 \rightarrow V(3, -3)$

x	1	2	3	4	5
y	1	–2	–3	–2	1

  Puntos de corte con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \\ x = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$

  Corta al eje X en: $\left(3 + \sqrt{3}, 0\right), \left(3 - \sqrt{3}, 0\right)$

  $x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow y = 6$

  Corta al eje Y en: $(0, 6)$

- $y = -x^2 + 6x - 4$ (si $x \leq 1$ o $x \geq 5$)

  Vértice:

  Abscisa: $p = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow$ Ordenada: $f(3) = 5 \rightarrow V(3, 5)$

  Puntos de corte con los ejes:

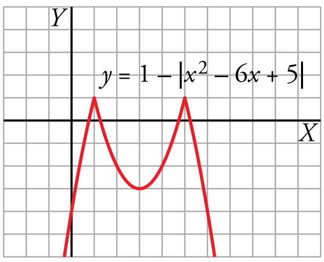
  $y = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 4 = 0 \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$

  Corta al eje X en: $\left(3 - \sqrt{5}, 0\right), \left(3 + \sqrt{5}, 0\right)$

  $x = 0 \rightarrow y = -0^2 + 6 \cdot 0 - 4 = -4 \rightarrow y = -4$

  Corta al eje Y en: $(0, -4)$

x	–1	0	1	5	6	7
y	–11	–4	1	1	–4	–11



d) $y = |x| \rightarrow y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$y = |4 - x| \rightarrow y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

Por tanto:

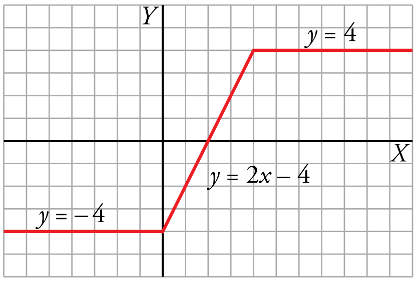
$$y = |x| - |4 - x| = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 4 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Representación gráfica:

- $y = -4$ (si $x < 0$). Función constante.
- $y = 2x - 4$ (si $0 \le x \le 4$). Función lineal:

x	0	2	4
y	–4	0	4

- $y = 4$ (si $x > 4$). Función constante.



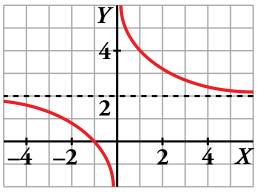
Página 115

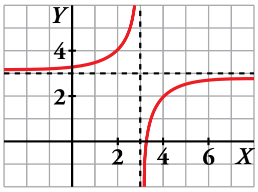
Otras funciones

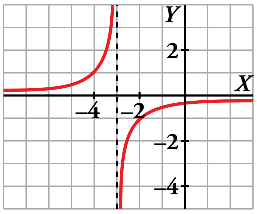
21. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas e indica el dominio de definición de cada una:**

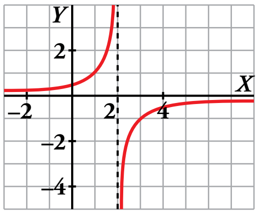
I) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ **II)** $y = 3 - \dfrac{1}{x - 3}$

III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ **IV)** $y = -\dfrac{1}{x + 3}$

a) 

b) 

c) 

d) 

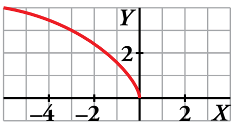
I → d) *Dom* = $\mathbb{R}$ – {2} II → b) *Dom* = $\mathbb{R}$ – {3}

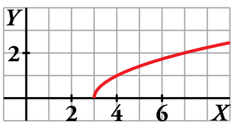
III → a) *Dom* = $\mathbb{R}$ – {0} IV → c) *Dom* = $\mathbb{R}$ – {–3}

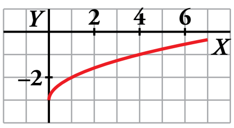
22. **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde e indica su dominio de definición:**

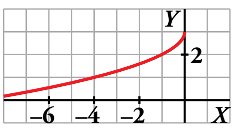
I) $y = \sqrt{x - 3}$ **II)** $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$

a) 

b) 

c) 

d) 

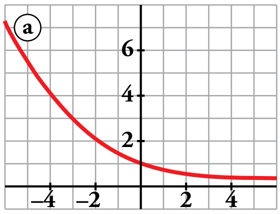
I → b) *Dom* = [3, +∞) II → c) *Dom* = [0, +∞)

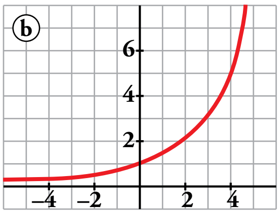
III → d) *Dom* = (–∞, 0] IV → a) *Dom* = (–∞, 0]

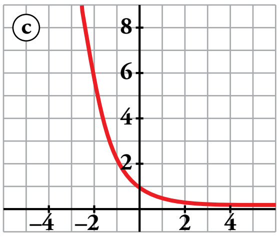
23. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

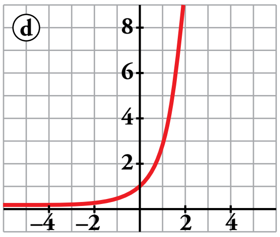
I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1,5^x$

III) $y = 0,4^x$ **IV)** $y = 0,7^x$









Di, en cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I $\rightarrow$ d) Creciente II $\rightarrow$ b) Creciente

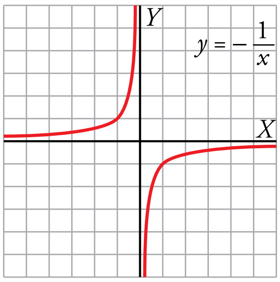
III $\rightarrow$ c) Decreciente IV $\rightarrow$ a) Decreciente

24. **Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:**

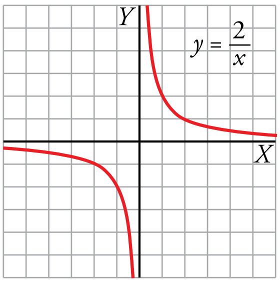
a) $y = -\dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x}$

c) $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **d)** $y = \dfrac{3}{x} + 2$

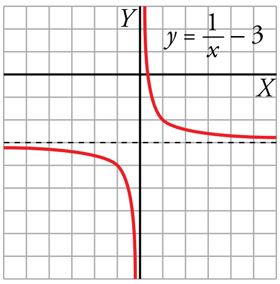
a)



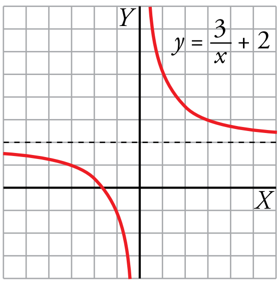
b)



c)



d)



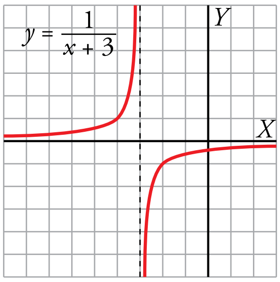
25. **Di cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones y cuáles son sus asíntotas. Represéntalas gráficamente.**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$ **b)** $y = -\dfrac{3}{x+1}$

c) $y = \dfrac{1}{1-x} + 2$ **d)** $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$

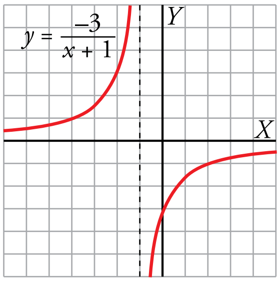
a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntotas: $x = -3$, $y = 0$



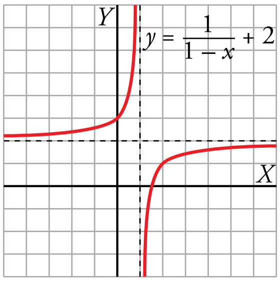
b) Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas: $x = -1$, $y = 0$



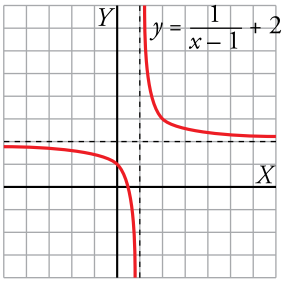
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$



d) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$



26. **Representa gráficamente las siguientes funciones e indica el dominio de definición de cada una:**

a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$

c) $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

e) $y = -2 - \sqrt{x}$ **f)** $y = -2 - 2\sqrt{-x}$

g) $y = 2 + \sqrt{-x}$ **h)** $y = 2\sqrt{-x} + 2$

a) $y = \sqrt{x} + 2 \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

b) $y = 2 - \sqrt{x} \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

c) $y = 2\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

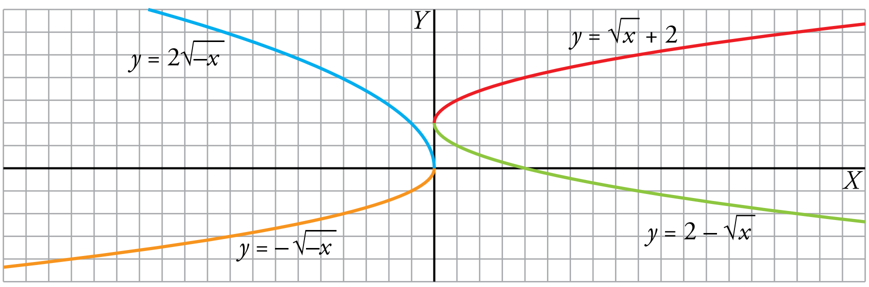
d) $y = -\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

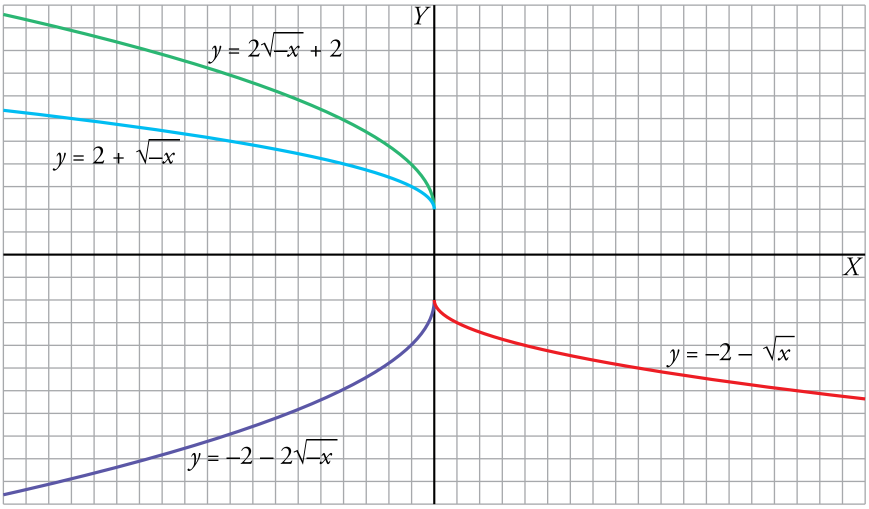
e) $y = -2 - \sqrt{x} \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

f) $y = -2 - 2\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

g) $y = 2 + \sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

h) $y = 2\sqrt{-x} + 2 \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$





27. **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{2 - x}$

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$

c) $y = \sqrt{-x - 1}$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

e) $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

f) $y = \sqrt{2(x - 1)}$

g) $y = -\sqrt{-(x + 2)}$

h) $y = 1 + \sqrt{1 - (x + 1)}$

a) $y = \sqrt{2 - x}$

$2 - x \ge 0 \rightarrow 2 \ge x \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 2]$

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$

$2x + 4 \ge 0 \rightarrow 2x \ge -4 \rightarrow x \ge -2 \rightarrow$ Dominio = $[-2, +\infty)$

c) $y = \sqrt{-x - 1}$

$-x - 1 \ge 0 \rightarrow -1 \ge x \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, -1]$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

$x + 3 \ge 0 \rightarrow x \ge -3 \rightarrow$ Dominio = $[-3, +\infty)$

e) $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

$x - 1 \ge 0 \rightarrow x \ge 1 \rightarrow$ Dominio = $[1, +\infty)$

f) $y = \sqrt{2(x - 1)}$

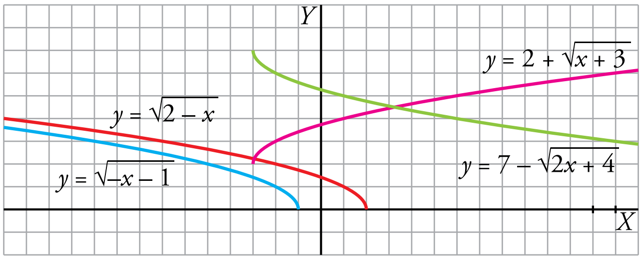
$2(x - 1) \ge 0 \rightarrow x - 1 \ge 0 \rightarrow x \ge 1 \rightarrow$ Dominio = $[1, +\infty)$

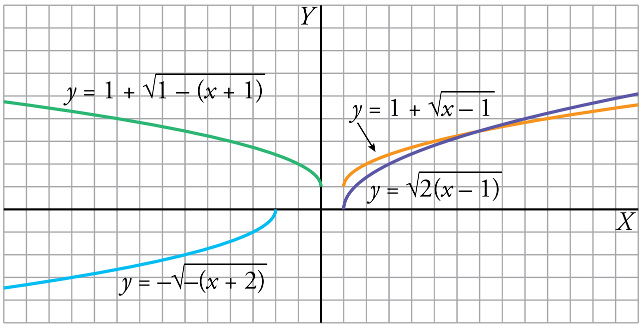
g) $y = -\sqrt{-(x + 2)}$

$-(x + 2) \ge 0 \rightarrow x + 2 \le 0 \rightarrow x \le -2 \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, -2]$

h) $y = 1 + \sqrt{1 - (x + 1)}$

$1 - (x + 1) \ge 0 \rightarrow 1 \ge x + 1 \rightarrow x \le 0 \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$





28. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores. (Ayúdate de la calculadora).**

a) $y = 2^{-x}$ **b)** $y = 3^x + 1$ **c)** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$ **d)** $y = 0{,}75^{-x}$

a) $y = 2^{-x}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

b) $y = 3^x + 1$

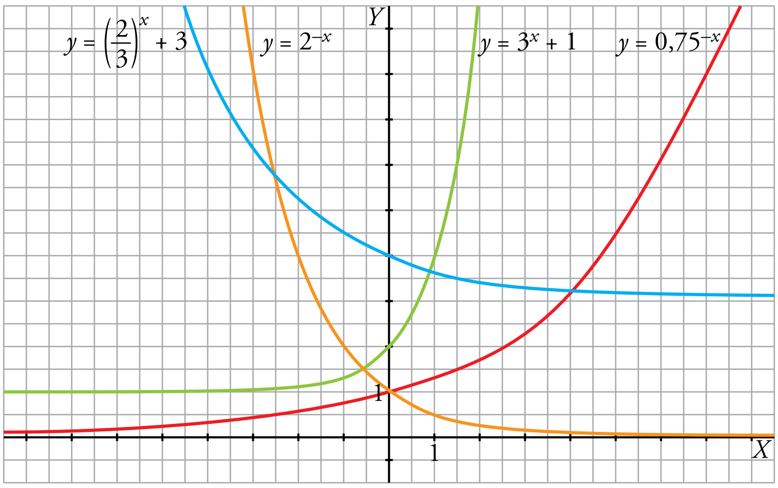
x	–2	–1	0	1	2	3
y	$1,\widehat{1}$	$1,\widehat{3}$	2	4	10	28

c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6,375	5,25	4,5	4	$3,\widehat{6}$	$3,\widehat{4}$	3,3

d) $y = 0{,}75^{-x}$

x	–4	–2	–1	0	1	2	3	4	8
y	0,32	0,5625	0,75	1	$1,\widehat{3}$	$1,\widehat{7}$	2,37	3,16	9,99



29. **Representa cada par de funciones sobre los mismos ejes coordenados. ¿Qué relación hay entre ellos?**

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 3^x$ **b)** $y = 0{,}25^x$; $y = 4^x$

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = (1/3)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

$y = 3^x$

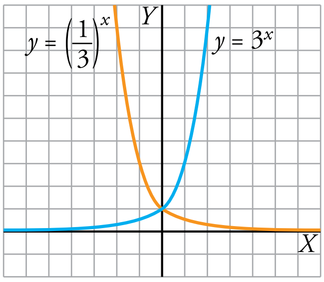
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

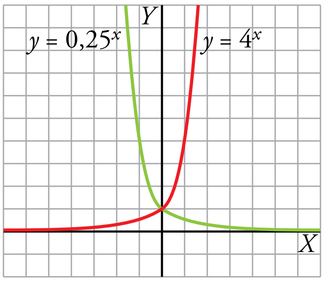
b) $y = 0{,}25^x \rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 0{,}25^x$	16	4	1	1/4	1/16

$y = 4^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 4^x$	1/16	1/4	1	4	16





Sus gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas.

30. **a) Representa las funciones siguientes:**

$$y = 3^x \text{ e } y = \log_3 x$$

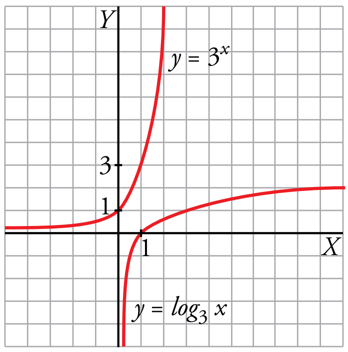
b) Comprueba si los puntos siguientes pertenecen a la gráfica de $y = \log_3 x$:

$$(243, 5) \quad \left(\frac{1}{27}, -3\right) \quad \left(\sqrt{3}; 0{,}5\right) \quad (-3, -1)$$

a) Una es inversa de la otra.

x	–2	–1	0	1	2
$y = 3^x$	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$y = \log_3 x$	–2	–1	0	1	2



b) Se sabe que $y = \log_3 x \rightarrow 3^y = x$. Luego:

$(243,5) \rightarrow 3^5 = 243 \rightarrow \log_3 243 = 5 \rightarrow$ Sí pertenece.

$\left(\frac{1}{27}, -3\right) \rightarrow 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \rightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3 \rightarrow$ Sí pertenece.

$\left(\sqrt{3}; 0,5\right) \rightarrow 3^{0,5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \rightarrow \log_3 \sqrt{3} = 0,5 \rightarrow$ Sí pertenece.

$(-3, -1) \rightarrow 3^{-1} = \frac{1}{3} \neq -3 \rightarrow$ No pertenece.

Página 116

Aplica lo aprendido

31. **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \ \rightarrow\ 2x^2 - 8x - 10 = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 5 \ \rightarrow\ y = 19 \\ x = -1 \ \rightarrow\ y = 1 \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \ \rightarrow$

  $$\rightarrow\ x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{4} \ \rightarrow$$

  $$\begin{cases} \left(\frac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (3,38; 0) \\ \left(\frac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (-0,88; 0) \end{cases}$$

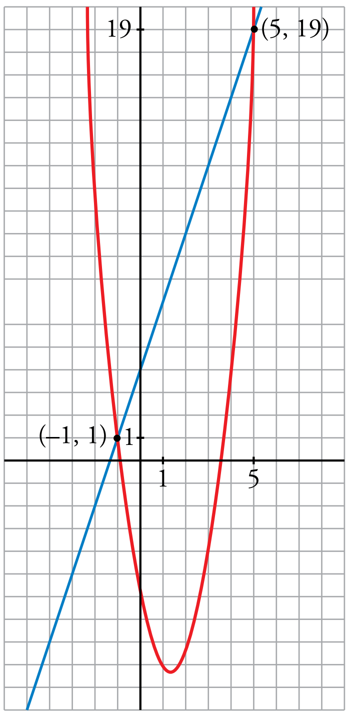
  Eje Y: $y = -6 \ \rightarrow\ (0, -6)$

  Vértice: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{73}{8}\right)$

- $y = 3x + 4$

  Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19



b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Analíticamente

Puntos de corte entre ambas:

$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 4).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = x^2 - 2x + 1$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \rightarrow$ Raíz doble: (1, 0)

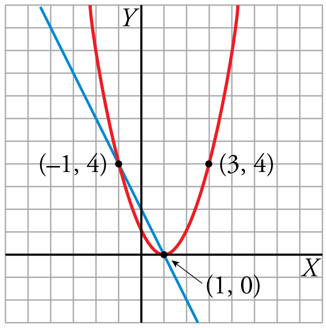
  Eje Y: $y = 1 \rightarrow (0, 1)$

  Vértice: (1, 0)

- $y = -2x + 2$

  Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4



c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

Analíticamente

$2x^2 - 8x - 3 = x^2 - 2x - 3 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x-6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Si $x_1 = 0 \rightarrow y_1 = -3$

Si $x_2 = 6 \rightarrow y_2 = 6^2 - 2 \cdot 6 - 3 = 21$

Solución: $x_1 = 0,\ y_1 = -3;\ x_2 = 6,\ y_2 = 21$

Gráficamente

Representamos cada una de la parábolas:

- $y = 2x^2 - 8x - 3$

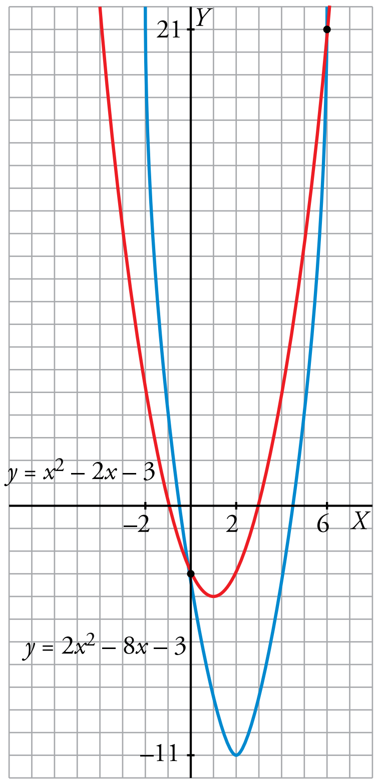
  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x - 3 = 0$

  $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{88}}{4} = \dfrac{4 \pm \sqrt{22}}{2} \begin{cases} (4{,}34;\ 0) \\ (-0{,}34;\ 0) \end{cases}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: (2, –11)



- $y = x^2 - 2x - 3$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} (3, 0) \\ (-1, 0) \end{cases}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: $(1, -4)$

d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$-x^2 + 5x = x^2 + 3x - 15/2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 15/2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{256}}{8} = \dfrac{4 \pm 16}{8} \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$

Si $x_1 = \dfrac{5}{2} \rightarrow y_1 = \dfrac{25}{4}$

Si $x_2 = -\dfrac{3}{2} \rightarrow y_2 = -\dfrac{39}{4}$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas:

- $y = -x^2 + 5x$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow -x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(-x + 5) = 0 \begin{cases} (0, 0) \\ (5, 0) \end{cases}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$

- $y = x^2 + 3x - 15/2$

  Cortes con los ejes:

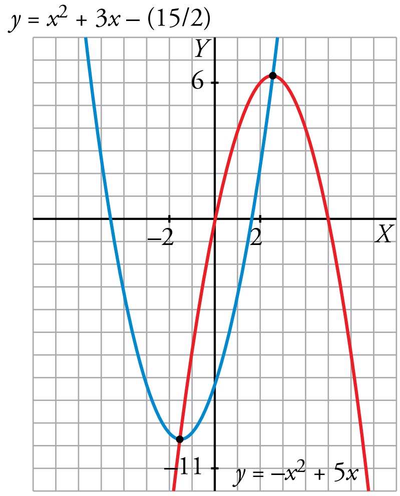
  Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 15 = 0$

  $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 120}}{4} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{156}}{4} \rightarrow$

  $\begin{cases} \left(\dfrac{-6 + \sqrt{156}}{4}, 0\right) \approx (1{,}62; 0) \\ \left(\dfrac{-6 - \sqrt{156}}{4}, 0\right) \approx (-4{,}62; 0) \end{cases}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -15/2 \rightarrow (0, -15/2)$

  Vértice: $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-39}{4}\right)$



32. **a) Calcula b y c para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ esté en el punto (3, 1).**

b) ¿Cuál es su eje de simetría?

c) ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?

a) Vértice en $x = 3 \rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \rightarrow -b = 6a = 6 \rightarrow b = -6$

Pasa por (3, 1) $\rightarrow 1 = 9 - 18 + c \rightarrow c = 10$

$y = x^2 - 6x + 10$

b) Su eje de simetría es $x = 3$.

c) Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 10 \rightarrow$ Punto (0, 10)

$x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \rightarrow$ No tiene solución, por tanto, no corta al eje X.

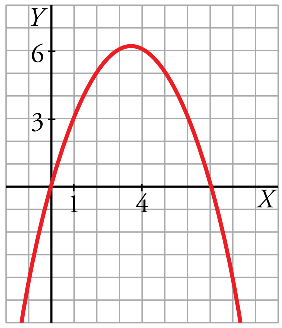
33. **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c?**

Si, además, sabemos que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), halla a y b y representa la parábola.

$c = 0 \qquad y = ax^2 + bx$

$$\left.\begin{array}{l} (1, 3) \rightarrow 3 = a + b \\ (4, 6) \rightarrow 6 = 16a + 4b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 3 - b \rightarrow a = -1/2 \\ 6 = 16(3 - b) + 4b \rightarrow b = 7/2 \end{array}$$

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x$



34. **Calcula a y b para que la función $y = \dfrac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ -1 = \dfrac{a}{-1 - b} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 4 - 2b \\ a = 1 + b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 + b = 4 - 2b \rightarrow b = 1 \\ a = 2 \end{array}\right\} y = \dfrac{2}{x - 1}$$

35. **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow 3 = ka^0 \rightarrow k = 3$

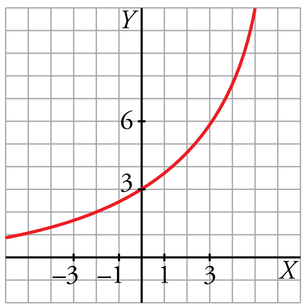
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow 3{,}6 = ka^1 \rightarrow 3{,}6 = 3a \rightarrow a = 1{,}2$

Tenemos la función: $y = 3 \cdot 1{,}2^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



36. **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y represéntala.**

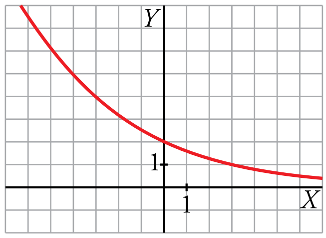
$y = ka^x$

Pasa por el punto (0, 2): $2 = k \cdot a^0 \rightarrow 2 = k$

Pasa por (2; 1,28): $1{,}28 = k \cdot a^2 \rightarrow 1{,}28 = 2a^2 \rightarrow a^2 = 0{,}64 \rightarrow a = 0{,}8$

La función es: $y = 2 \cdot 0{,}8^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3,906	3,125	2,5	2	1,6	1,28	1,024

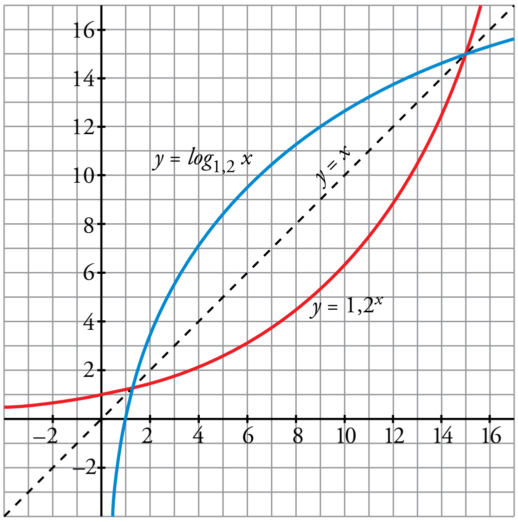


37. **a) Representa gráficamente la función exponencial $y = 1{,}2^x$ haciendo uso de una tabla de valores.**

b) ¿Cuál es la función inversa o recíproca de $y = 1{,}2^x$? Represéntala en los mismos ejes.

La función inversa de $y = 1{,}2^x$ es $y = log_{1,2}\, x$.

x	y
–4	0,48
0	1
1	1,2
2	1,44
4	2,07
8	4,3
10	6,2
12	8,9
16	18,5



38. **Representa las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

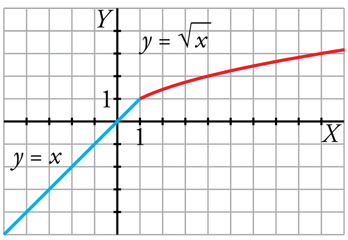
a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

- $y = x$ (si $x < 0$) $\rightarrow$

x	0	–1	–2
y	0	–1	–2

- $y = \sqrt{x}$ (si $x \ge 0$) $\rightarrow$

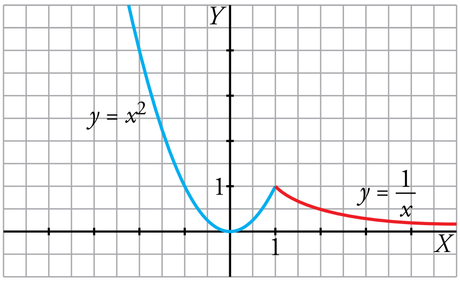
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3



b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

• $y = x^2$ (si $x < 1$) $\to$ Vértice: $(0, 0)$

x	1	0	–1	–2
y	1	0	1	4



• $y = \dfrac{1}{x}$ (si $x \ge 1$)

$y = 0 \to$ Asíntota horizontal

x	1	2	3	4
y	1	1/2	1/3	1/4

39. **Calcula el valor del parámetro k para que la siguiente función sea continua:**

$$y = \begin{cases} -x^2 - kx - 5 & \text{si } x \le -2 \\ \dfrac{1}{2}x + 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = -x^2 - kx - 5 \text{ es una función cuadrática y, por tanto, continua en } \mathbb{R} \text{ para todo } k \\ y_2(x) = \dfrac{1}{2}x + 4 \text{ es una función lineal y, por tanto, continua en } \mathbb{R} \end{array}\right\} \to$$

$\to y(x)$ es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ para todo k

Debemos hallar el valor de k para que $y(x)$ también sea continua en $x = -2$.

$y(x)$ será continua en $x = -2$ si $y_1(-2) = y_2(-2)$, es decir:

$$-(-2)^2 - k \cdot (-2) - 5 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 \to -4 + 2k - 5 = -1 + 4 \to$$

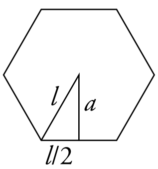
$$\to 2k = 12 \to k = 6$$

Resuelve problemas

40. **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un hexágono dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área? Dibuja ambas funciones.**

$p = 6l$

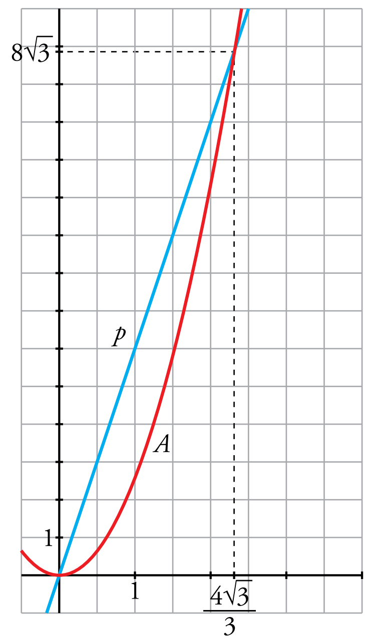
La fórmula del área es $A = \dfrac{p \cdot a}{2} = 3l \cdot a$



Debemos, por tanto, expresar la apotema en función del lado:

$$a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \to a = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Por tanto: $A = 3l \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}l = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}l^2$



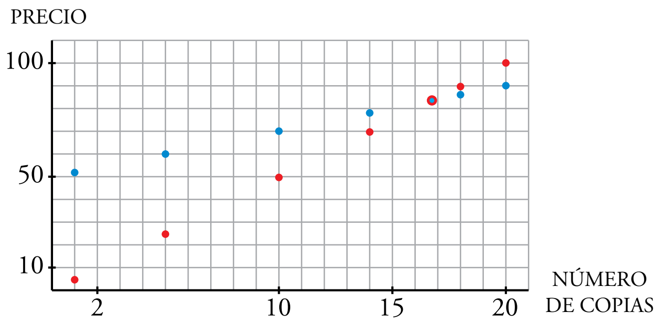
41. **Una casa de reprografía cobra 5 céntimos por cada fotocopia. Ofrece también un servicio de multicopia, por el que cobra 50 cént. fijos y 2 cént. por cada copia de un mismo ejemplar.**

Haz, para cada caso, una tabla de valores que muestre lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. Representa las funciones obtenidas.

¿Tiene sentido unir los puntos en cada una? Obtén la expresión analítica de cada función. ¿A partir de cuántas copias es más barato usar la multicopista?

FOTOCOPIAS	
UNIDADES	PRECIO
1	5
5	25
10	50
14	70
18	90
20	100

MULTICOPIA	
UNIDADES	PRECIO
1	52
5	60
10	70
14	78
18	86
20	90



No tiene sentido unir los puntos; solo se pueden dar valores naturales.

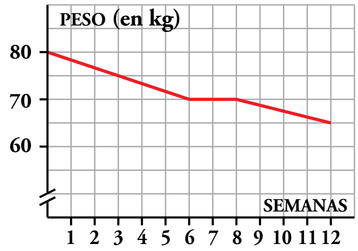
Expresiones analíticas:

Fotocopias (puntos rojos): $y = 5x$

Multicopias (puntos azules): $y = 50 + 2x$

A partir de 17 copias, es más económico utilizar la multicopia.

42. **El médico ha puesto a Marcos un régimen de adelgazamiento de 12 semanas y le ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir:**



a) ¿Cuánto pesaba Marcos al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto debe adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la 6.ª y la 8.ª semanas?

c) Halla la expresión analítica de esa función.

a) Marcos pesaba 80 kg al comenzar el régimen.

b) $\frac{5}{3} = 1{,}67$ kg por semana.

Entre la sexta y la octava semana no tiene que adelgazar nada.

c) Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Para $0 \le x \le 6$, la pendiente $m = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ y $n = 80 \to y = -\frac{5}{3}x + 80$
- Para $6 < x \le 8$, $y = 70$.
- Para $8 < x \le 12$, $m = -\frac{5}{4}$ y pasa por $(12, 65)$.

$y - 65 = -\frac{5}{4}(x - 12) \to y = -\frac{5}{4}x + 80$

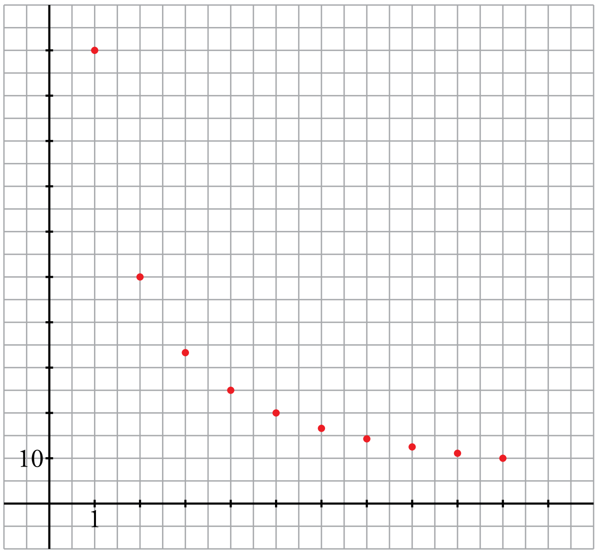
Luego, la expresión analítica de esta función será:

$$y = \begin{cases} -\frac{5}{3}x + 80 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 70 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ -\frac{5}{4}x + 80 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$$

43. **Andrea ha comprado por 100 € un regalo de cumpleaños para Carlos. El resto de los amigos del grupo deciden pagar el regalo entre todos.**

Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno dependiendo del número de personas que haya y dibújala.

Si el número de amigos es x, $x \in \mathbb{N}$, la función que da lo que debe pagar cada uno es $y = \frac{100}{x}$.



44. **El sueldo inicial de Ana es de 24 000 € anuales. En su contrato de trabajo figura que subirá un 8 % anual. ¿Cuánto ganará dentro de 10 años?**

a) Escribe la función que relaciona el sueldo con el tiempo.

b) ¿Para qué valores de la variable está definida?

El sueldo inicial es 24 000 €.

Al cabo de un año será $24\,000 \cdot 1{,}08$.

Al cabo de dos años será $24\,000 \cdot 1{,}08^2$.

Es decir, al cabo de 10 años será $24\,000 \cdot 1{,}08^{10} = 51\,814{,}20$ €.

a) $s(t) = 24\,000 \cdot 1{,}08^t$

b) Para los valores naturales de t.

Página 117

Problemas "+"

45. **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, *t*, una flecha que lanzamos con el arco hacia arriba con una velocidad de 40 m/s es h = $40t - 5t^2$.**

a) Representa gráficamente la función.

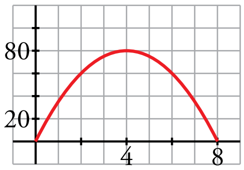
b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza su altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento se clava la flecha en el suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la flecha está a una altura superior a 35 metros?

a)



b) [0, 8]

c) Alcanza 80 m a los 4 segundos.

d) A los 8 segundos.

e) $40x - 5x^2 > 35 \rightarrow 5x^2 - 40x + 35 < 0 \rightarrow$

$\rightarrow x \in (1, 7)$

46. **Este año, Verónica ha conseguido recoger de su cosecha 240 kg de aguacates que hoy se venderían a 1,20 €/kg. A partir de ahora, cada día que pasa se estropean 4 kg, pero el precio aumenta 0,10 €/kg. ¿Cuándo debe vender los aguacates para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?**

La función beneficio es $B(t) = (240 - 4t) \cdot (1{,}20 + 0{,}1t) = -0{,}4t^2 + 19{,}2t + 288$, donde t son los días transcurridos.

La gráfica será una parábola de vértice con abscisa $p = \dfrac{19{,}2}{0{,}8} = 24$.

Como $B(24) = 518{,}4$, la respuesta es que debe vender los aguacates a los 24 días y obtendrá un beneficio de 518,4 euros.

47. **El coste por unidad de fabricación de un tipo de cajas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la variable independiente, *x*?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para fabricar 10 cajas. Haz lo mismo para 100 000 cajas.

c) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de cajas se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) • Para 10 cajas:

Coste por unidad $= \dfrac{3 + 1000}{10} = 100{,}3$

Coste total de 10 unidades = 1 003

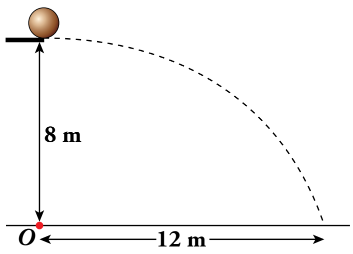
- Para 100 000 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

c) El coste por unidad se acerca a 0,3.

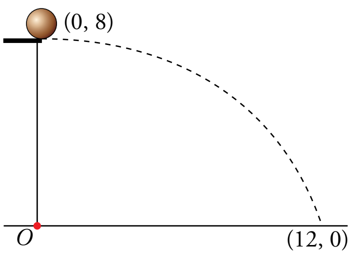
48. **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Esther lanza una pelota rodando y cae al agua a 12 m de la vertical del trampolín.**



Escribe la ecuación de la trayectoria descrita por la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua. Da su dominio de definición.

La trayectoria es una parábola $y = ax^2 + bx + c$ con su vértice en el punto de caída. Toma O como centro de coordenadas y ten en cuenta que el vértice es (0, 8).

RESOLUCIÓN 1



Tomando el centro de coordenadas en el punto O, el vértice de la parábola es (0, 8). La ecuación de la parábola queda así:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ \text{Para } x = 0,\ y = 8 \ \rightarrow\ 8 = b \end{array}\right\} y = ax^2 + 8$$

Calculamos el valor de a sabiendo que pasa por (12, 0):

$$0 = a \cdot 12^2 + 8 \ \rightarrow\ a = -\frac{8}{144} = -\frac{1}{18}$$

La ecuación de la trayectoria es $y = -\frac{1}{18}x^2 + 8$, definida en [0, 12].

RESOLUCIÓN 2

En la resolución anterior se ha tenido en cuenta que la trayectoria es una parábola con su vértice en el punto de caída. Resolvámoslo, ahora, como lo haría un físico, teniendo en cuenta, solamente, las leyes del movimiento:

Tiempo que tarda en caer 8 m: (movimiento uniformemente acelerado. Aceleración, g):

$\frac{1}{2}gt^2 = 8$. Tomamos $g = 10 \text{ m/s}^2 \ \rightarrow\ 5t^2 = 8 \ \rightarrow\ t = \sqrt{\frac{8}{5}}$

¿A qué velocidad rueda la pelota por el trampolín? Tengamos en cuenta que, a esa velocidad, recorre 12 m en $\sqrt{\frac{8}{5}}$ s (componente horizontal).

Movimiento uniforme $e = v \cdot t \ \rightarrow\ 12 = v \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \ \rightarrow\ v = \frac{12}{\sqrt{8/5}}$

Obtengamos la ecuación de la trayectoria tomando O como origen de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Comp. horizontal: } x = \dfrac{12}{\sqrt{8/5}}t \\ \text{Comp. vertical: } y = 8 - 5t^2\end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{8/5}\,x}{12} \to t^2 = \dfrac{8/5}{144}x^2 = \dfrac{1}{90}x^2 \\ y = 8 - 5 \cdot \dfrac{1}{90}x^2 = 8 - \dfrac{1}{18}x^2 \end{array}$$

Hemos obtenido la trayectoria $y = 8 - \frac{1}{18}x^2$, la misma que antes como es natural.

Reflexiona sobre la teoría

49. Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas y di si son crecientes o decrecientes:

a) $y = \dfrac{5x-8}{3}$ **b)** $\dfrac{y+4}{2} = 1$ **c)** $3x + y + 4 = 0$

¿Qué relación hay entre el crecimiento o decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $m = \frac{5}{3}$. Creciente.

b) $m = 0$. Ni crece ni decrece, es constante.

c) $m = -3$. Decreciente.

Si la pendiente es positiva, hay crecimiento. Si la pendiente es negativa, hay decrecimiento.

50. Dibuja y escribe la ecuación, en cada caso, de las parábolas que cumplen estas condiciones:

a) Su eje es $x = 2$, el coeficiente de la x^2 es –1 y corta al eje X en un solo punto.

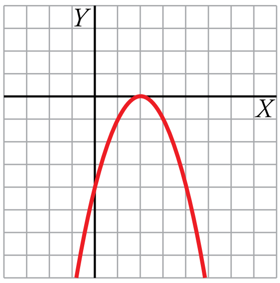
b) Tiene el vértice en el punto (3, –2) y tiene la misma forma que $y = x^2$.

c) Tiene el vértice en el origen de coordenadas y pasa por el punto (–3, –18).

a) La parábola es de la forma: $y = -x^2 + bx + c$

- Eje: $x = 2 \to -\dfrac{b}{2a} = 2 \to \dfrac{-b}{-2} = 2 \to b = 4$
- Corta al eje X en un único punto $\to$ pasa por $(2, 0) \to$
  $\to 0 = -4 + 4 \cdot 2 + c \to c = -4$

La parábola es $y = -x^2 + 4x - 4$.



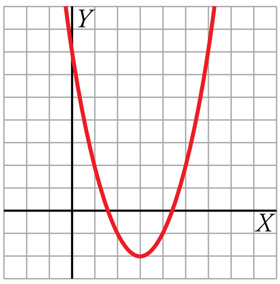
b) Vértice en $(3, -2) \to -\dfrac{b}{2a} = 3 \to b = -6a$

Tiene la misma forma que $y = x^2$, luego $a = 1$.

La función es de la forma $y = x^2 - 6x + c$.

Pasa por $(3, -2) \to 9 - 18 + c = -2 \to c = 7$

Por tanto, $y = x^2 - 6x + 7$.



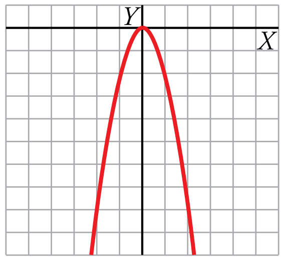
c) $y = ax^2 + bx + c$

$-\dfrac{b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0$

Pasa por (0, 0), luego $c = 0$.

Pasa por $(-3, -18) \rightarrow 9a = -18 \rightarrow a = -2$

La parábola es $y = -2x^2$.



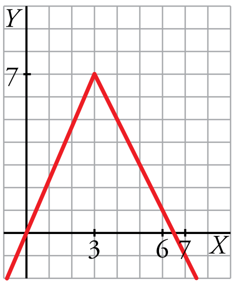
51. Construye funciones definidas a trozos que cumplan las siguientes condiciones y dibújalas:

a) Es continua y está compuesta por dos trozos de rectas. Pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente –2 en $x = 4$. Tiene un máximo en (3, 7).

b) Es continua y está compuesta por un trozo de parábola y un trozo de recta en este orden. Tiene un mínimo relativo en (0, 0) y un máximo relativo en (2, 4).

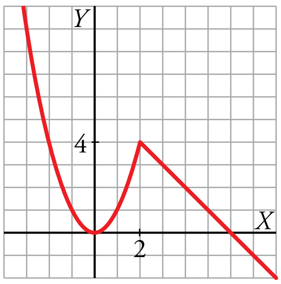
a) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{3}x & \text{si } x < 3 \\ -2x + 13 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$



b) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



52. Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Indica qué punto es y justifícalo. ¿En qué casos (valores de a) la función es decreciente?

Todas pasan por el punto (0, 1), ya que $a^0 = 1$.

Si $a < 1$, la función es decreciente.

53. ¿Verdadero o falso?

a) Las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$ forman una parábola tumbada al representarlas en los mismos ejes.

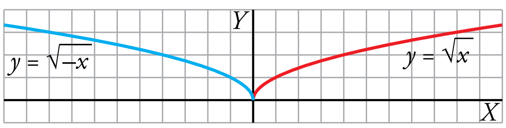
b) Si el eje de una parábola es $x = 2$, no puede pasar por los puntos (–1, 6) y (5, 8).

c) Las funciones $y = 4^x$ e $y = -4^x$ son simétricas respecto al eje Y.

d) Las funciones $y = 4^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ son simétricas respecto al eje Y.

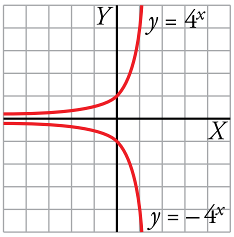
e) La función $y = log_3 x$ tiene dos asíntotas, una vertical y otra horizontal.

a) Falso.

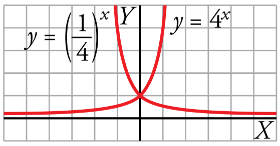


b) Verdadero. Las parábolas son simétricas respecto a su eje, por tanto, se debe verificar que $y(-1) = y(5)$.

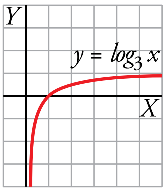
c) Falso. Son simétricas respecto al eje de abscisas.



d) Verdadero.



e) Falso. Solo tiene una asíntota vertical en $x = 0$.



Página 118

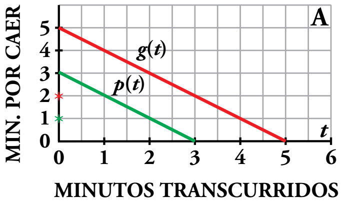
Interpreta y describe

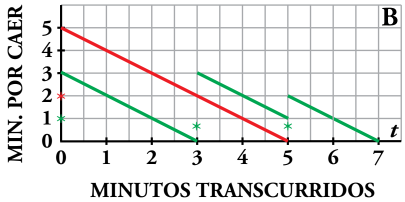
Dos funciones coordinadas

Cuando se voltea un reloj de arena, la función que relaciona el tiempo que falta para que la arena termine de caer con el tiempo que ha transcurrido es lineal. En el gráfico A se han representado dos funciones de este tipo: $g(t)$, en trazo rojo, para el reloj grande, y $p(t)$, en trazo verde, para el reloj pequeño.

El gráfico B describe el proceso que se ha de seguir para medir 7 minutos manipulando ambos relojes.

Cada asterisco indica el instante en que se voltea el reloj del color correspondiente.





- **Describe verbalmente la información que contiene el gráfico B.**

Se ponen en funcionamiento los dos relojes a la vez.

A los 3 minutos se acaba el reloj verde y quedan 2 minutos en el reloj rojo. Damos la vuelta al reloj verde.

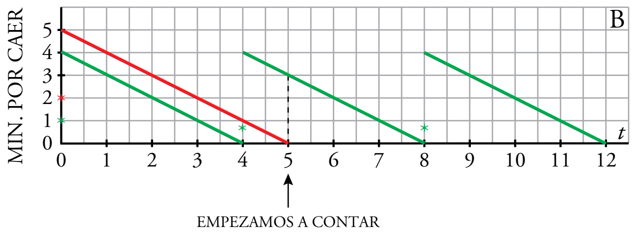
Pasados 2 minutos se acaba el reloj rojo y se da la vuelta al verde.

Pasados 2 minutos se acaba el reloj verde.

$$3 \text{ min} + 2 \text{ min} + 2 \text{ min} = 7 \text{ min}$$

- **Construye una gráfica similar a la B que indique el proceso que hay que seguir para medir siete minutos con un reloj de cuatro y otro de cinco minutos.**

La gráfica es la siguiente:



Se ponen en funcionamiento los dos relojes a la vez. Cuando se acaba el de 4 min (verde), en el de 5 min (rojo) queda 1 min. Le damos la vuelta al de 4 min. Cuando se acaba el minuto del de 5 min, en el de 4 min quedan 3 min. Empezamos a contar en este momento. Acaban los 3 min y le damos la vuelta para que pasen otros 4 min.

Infórmate

La prueba del carbono catorce (C^{14})

El carbono catorce es un isótopo radiactivo del carbono que se va desintegrando espontáneamente, de forma que se reduce a la mitad cada 5 568 años.

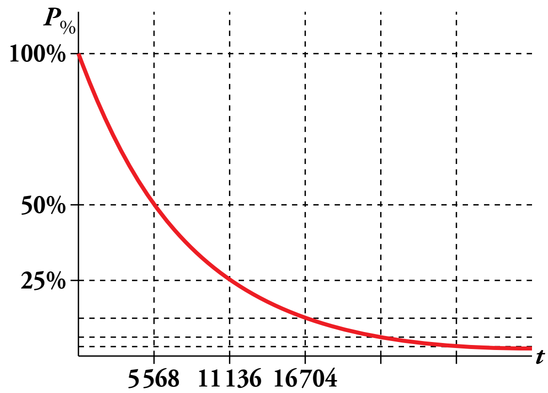
Por otro lado, el carbono catorce está en la atmósfera y es absorbido por las plantas, que lo incorporan en una determinada proporción.

Cuando una planta muere y queda almacenada en un yacimiento geológico, su carbono catorce sigue el proceso de desintegración mencionado, según una función exponencial decreciente:

$$P_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,568}}$$

$P_{\%} \rightarrow$ **Porcentaje de C^{14} respecto al que había inicialmente**

$t \rightarrow$ **Edad en años**



Así, analizando la proporción de C^{14} de un fósil y conociendo la inicial (planta viva), con la ecuación anterior se puede averiguar su edad geológica; es decir, el tiempo que hace que se formó.

- **¿Qué porcentaje de C^{14} tendrá un fósil con una edad de 33 000 años?**

$$t = 33\,000 \text{ años} \rightarrow P_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{33\,000}{5\,568}} \rightarrow P_{\%} = 1{,}64\,\%$$

El fósil tendrá un 1,64 % de C^{14}.

- **¿Cuál será la antigüedad de un fósil si tiene el 10 % del C^{14} de la planta viva?**

$$P_{\%} = 10\,\% \rightarrow 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,568}} = 10 \rightarrow 0{,}5^{\frac{t}{5\,568}} = 0{,}1 \rightarrow \log_{0{,}5}{}^{\frac{t}{5\,568}} = \log 0{,}1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{t}{5\,568} \cdot \log 0{,}5 = -1 \rightarrow t = \frac{-5\,568}{\log 0{,}5} \rightarrow t \approx 18\,496 \text{ años}$$

El fósil tendrá aproximadamente 18 500 años.

Página 119

Entrénate resolviendo problemas

- **Una vela dura una hora. Con las sobras de 10 velas se fabrica una nueva.**

  a) ¿Cuántas horas de luz tendremos con 442 velas?

  b) ¿Cuántas velas se necesitan para 1 000 horas de luz?

a) Con 442 velas se tiene luz para **442 horas** y hay 442 sobrantes.

Con 442 sobrantes se hacen 44 velas + 2 sobrantes $\rightarrow$ **44 horas** de luz y 46 sobrantes.

Con 46 sobrantes se hacen 4 velas y 6 sobrantes $\rightarrow$ **4 horas** de luz y 10 sobrantes.

Con 10 sobrantes se hace 1 vela $\rightarrow$ **1 hora** de luz y 1 sobrante.

Total: 442 + 44 + 4 + 1 = 491 horas de luz.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO (MÁS TÉCNICA)

Con una vela se consigue 1 hora de luz y sobra $\frac{1}{10}$ de vela.

Por tanto, una hora de luz se consigue con $\frac{9}{10}$ de vela.

Como hay 442 velas $\rightarrow$ $442 : \frac{9}{10} = 491 + \frac{1}{9}$

Es decir, se consiguen 491 horas de luz y sobra algo de vela.

b) El número de velas que necesitamos debe estar alrededor de $1\,000 \cdot \frac{9}{10} = 900$. Veamos, con más exactitud, cuántas necesitamos.

Con 900 velas se tiene luz para **900 horas** y hay 900 sobrantes.

Con 900 sobrantes se hacen 90 velas $\rightarrow$ **90 horas** de luz y 90 sobrantes.

Con 90 sobrantes se hacen 9 velas $\rightarrow$ **9 horas** de luz y 9 sobrantes.

Conseguimos, en total, 999 horas de luz y nos quedan 9 sobrantes.

Necesitamos, por tanto, una vela más, 901, aunque con ellas conseguiremos, no 1 000, sino 1 001 horas de luz.

- **Una granjera fue al mercado a vender una cesta de huevos. La primera clienta compró la mitad de los huevos más medio huevo. La segunda compró la mitad de los que le quedaban más medio huevo, y lo mismo hizo la tercera. Con esto concluyó la venta, ya que a la granjera no le quedaban más huevos.**

  ¿Cuántos huevos tenía?

RESOLUCIÓN UTILIZANDO ÁLGEBRA

	TENÍA	VENDE	LE QUEDA
1.ª VENTA	x	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$	$x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$
2.ª VENTA	$\frac{x-1}{2}$	$\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$	$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{2x-2-x-1}{4}=\frac{x-3}{4}$
3.ª VENTA	$\frac{x-3}{4}$	$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$	$\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8}=\frac{2x-6-x-1}{8}=\frac{x-7}{8}$

Después de la tercera venta, no le queda nada. Por tanto, $\frac{x-7}{8}=0 \to x=7$

Comprobación:

	TENÍA	VENDE	LE QUEDA
1.ª VENTA	7	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$	3
2.ª VENTA	3	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	1
3.ª VENTA	1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	0

RESOLUCIÓN SIN UTILIZAR ÁLGEBRA

Si después de una compra le quedan a huevos, antes de la compra tenía:

$\left(a+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=2a+1$ huevos.

	LE QUEDAN	TENÍA ANTES
3.ª VENTA	0	$2\cdot 0+1=1$
2.ª VENTA	1	$2\cdot 1+1=3$
1.ª VENTA	3	$2\cdot 3+1=7$

- **Un padre repartió entre sus hijos un rebaño de ovejas.**

  — El mayor de ellos se llevó una oveja más 1/7 de las restantes.

  — Al segundo le correspondieron dos ovejas más 1/7 de las restantes.

  — El tercero recibió tres ovejas más 1/7 de las que quedaban.

  — Y así sucesivamente hasta llegar al más pequeño.

  De esta manera, todos recibieron la misma herencia y no sobró ninguna oveja.

  ¿Cuántos hermanos eran?

  ¿Cuántas ovejas había en el rebaño?

	HABÍA	LE TOCAN	SOBRAN
PRIMERO	x	$1+\frac{x-1}{7}=\frac{x+6}{7}$	$x-\frac{x+6}{7}=\frac{6x-6}{7}$
SEGUNDO	$\frac{6x-6}{7}$	$2+\frac{\frac{6x-6}{7}-2}{7}=\frac{49\cdot 2+6x-6-2\cdot 7}{49}=\frac{6x+78}{49}$	

Como a todos les toca lo mismo, $\frac{x+6}{7}=\frac{6x+78}{49} \to x=36$. Había 36 ovejas.

Al primer hermano (y a todos los demás) le tocan 1 + (35/7) = 6 ovejas. Hay, por tanto, 36 : 6 = 6 hermanos.

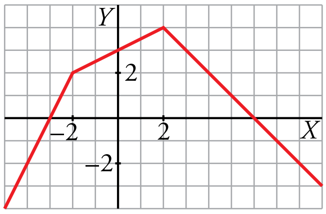
Comprobación:

	HABÍA	LE TOCA	SOBRAN
1.º	36	1 + (35/7) = 6	30
2.º	30	2 + (28/7) = 6	24
3.º	24	3 + (21/7) = 6	18
4.º	18	4 + (14/7) = 6	12
5.º	12	5 + (7/7) = 6	6
6.º	6	6 + (0/7) = 6	0

Autoevaluación

1. Representa la función definida a trozos cuya ecuación es:

$$y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x/2 + 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$



2. Halla el vértice de cada una de las siguientes parábolas y represéntalas:

a) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

c) $y = (5 - x)(x + 1)$

d) $y = -(x - 3)^2 - 1$

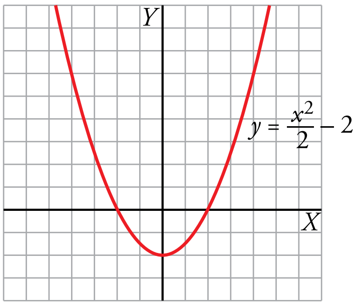
e) $y = 2x^2 + 4x$

f) $y = 9 - (x - 1)^2$

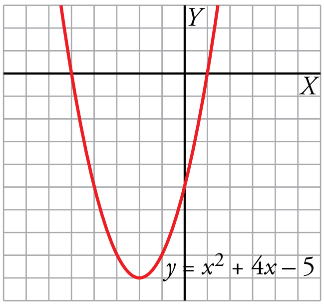
g) $y = 2(x - 1)(x + 3)$

h) $y = (x + 2)^2 - 2x^2$

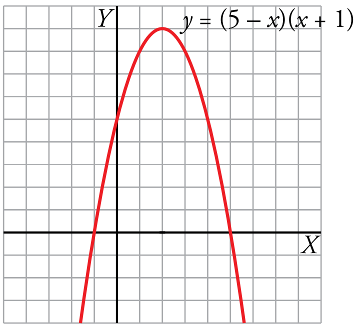
a) Vértice en el punto (0, –2).



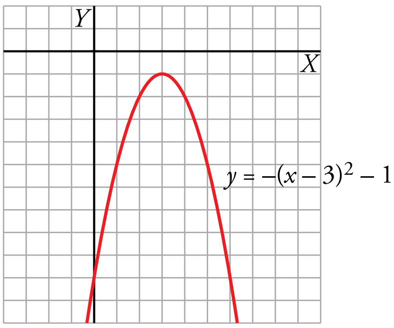
b) Vértice en el punto (–2, –9).



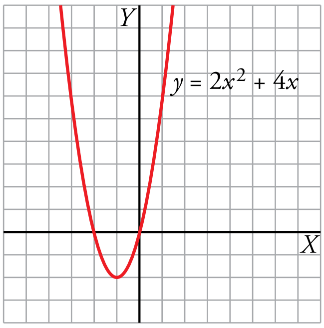
c) Vértice en el punto (2, 9).



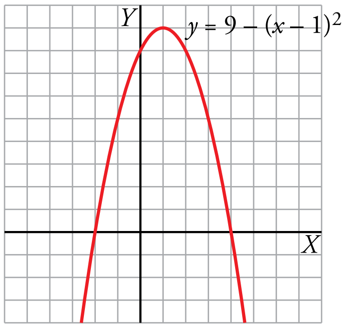
d) Vértice en el punto (3, –1).



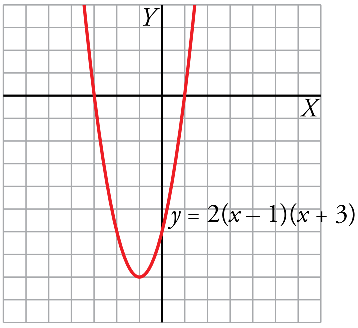
e) Vértice en el punto (–1, –2).



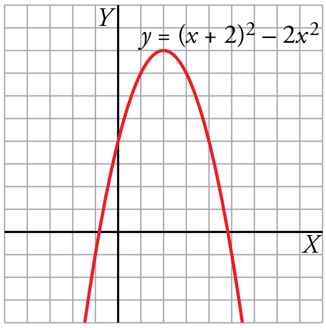
f) Vértice en el punto (1, 9).



g) Vértice en el punto (–1, –8).



h) Vértice en el punto (2, 8).



3. Expresa estas funciones sin utilizar el valor absoluto (del tipo definidas a trozos). Represéntalas.

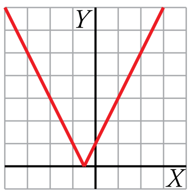
a) $y = |2x + 1|$

b) $y = \left|1 - \dfrac{x}{4}\right|$

c) $y = |-x^2 + 4x - 3|$

d) $y = |9 - (x - 2)^2|$

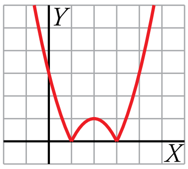
a) $y = |2x + 1| = \begin{cases} -(2x+1) & \text{si} \quad 2x + 1 < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad 2x + 1 \ge 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si} \quad x < -\dfrac{1}{2} \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$



b) $y = \left|1 - \dfrac{x}{4}\right| = \begin{cases} -\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) & \text{si} \quad 1 - \dfrac{x}{4} < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad 1 - \dfrac{x}{4} \ge 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -1 + \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x > 4 \\ 1 - \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x \le 4 \end{cases}$

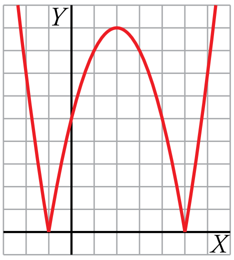
c) $y = |-x^2 + 4x - 3| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x - 3) & \text{si } -x^2 + 4x - 3 < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$



d) $y = |9 - (x - 2)^2| \rightarrow y = |-x^2 + 4x + 5| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x + 5) & \text{si } -x^2 + 4x + 5 < 0 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -x^2 + 4x + 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

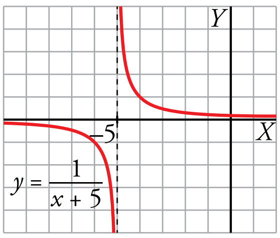


4. Representa las siguientes funciones e indica sus dominios de definición:

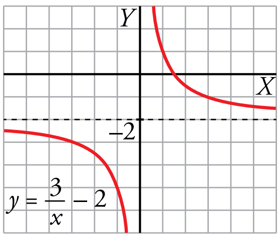
a) $y = \dfrac{1}{x+5}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x} - 2$ **c)** $y = \dfrac{3}{x-1} + 1$

d) $y = \sqrt{x+2}$ **e)** $y = 2\sqrt{x-1}$ **f)** $y = -\sqrt{x-3}$

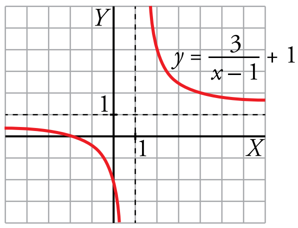
a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-5\}$



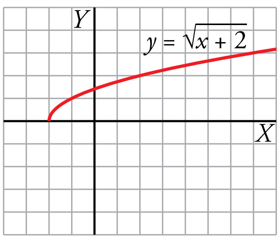
b) Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$



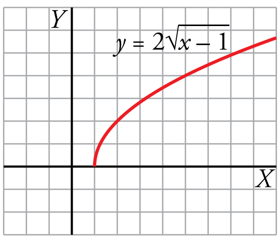
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$



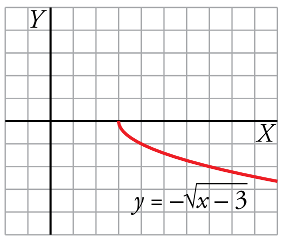
d) Dominio = $[-2, +\infty)$



e) Dominio = $[1, +\infty)$



f) Dominio = $[3, +\infty)$

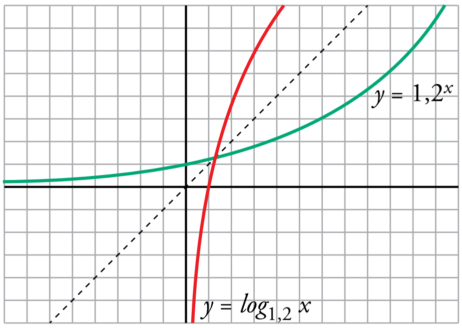


5. **Representa estos pares de funciones:**

a) $y = 1,2^x$; $y = log_{1,2}\, x$ **b)** $y = 2,2^x$; $y = log_{2,2}\, x$

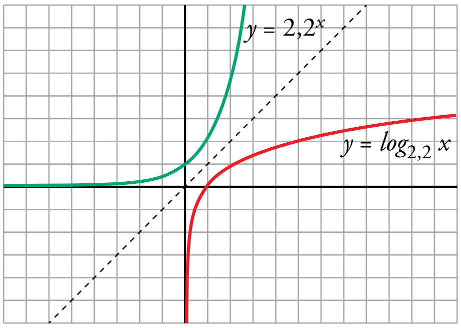
¿Respecto a qué recta son simétricas las dos funciones de cada par?

a)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

b)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

6. **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base del cuadro midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie?

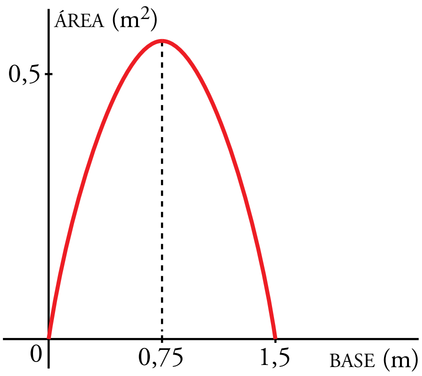
b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera, x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) Altura = 1 m; Área = 0,5 m^2

b) Base = x, altura = $\dfrac{3 - 2x}{2} = 1,5 - x$; Área = $x\,(1,5 - x) = 1,5x - x^2$

c)



$y = -x^2 + 1,5x$ es una parábola que corta al eje X en los puntos de abscisas 0 y 1,5.

La abscisa del vértice es $\dfrac{1,5}{2} = 0,75$.

Su ordenada es 0,5625. Este es el punto "más alto de la curva".

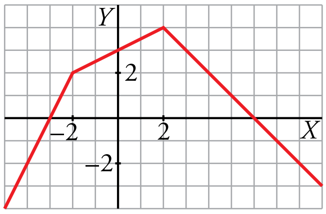
Por tanto, el área máxima se obtiene para $x = 0,75$ m, y es de 0,5625 m^2.

NOTA: Se trata de un cuadrado de 0,75 m de lado.

Autoevaluación

1. Representa la función definida a trozos cuya ecuación es:

$$y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x/2 + 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$



2. Halla el vértice de cada una de las siguientes parábolas y represéntalas:

a) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

c) $y = (5 - x)(x + 1)$

d) $y = -(x - 3)^2 - 1$

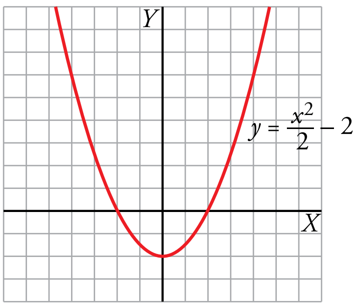
e) $y = 2x^2 + 4x$

f) $y = 9 - (x - 1)^2$

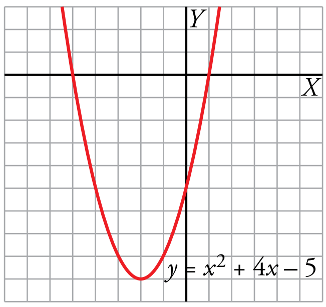
g) $y = 2(x - 1)(x + 3)$

h) $y = (x + 2)^2 - 2x^2$

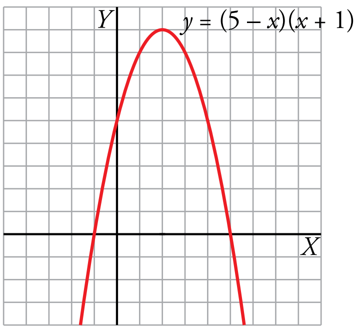
a) Vértice en el punto (0, –2).



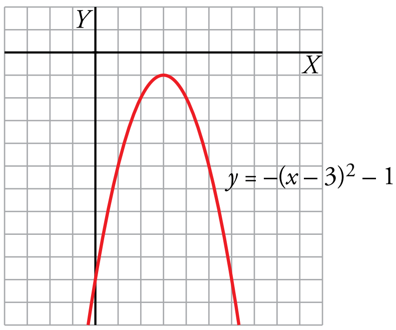
b) Vértice en el punto (–2, –9).



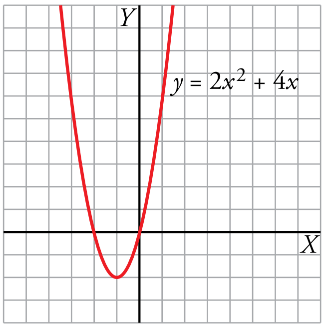
c) Vértice en el punto (2, 9).



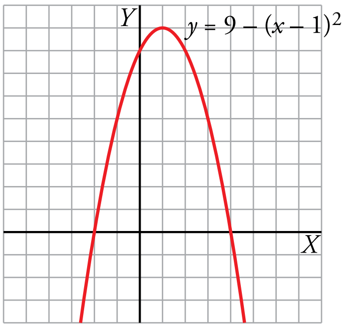
d) Vértice en el punto (3, –1).



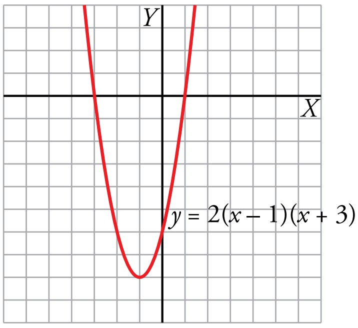
e) Vértice en el punto (–1, –2).



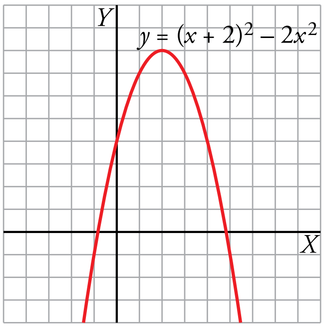
f) Vértice en el punto (1, 9).



g) Vértice en el punto (–1, –8).



h) Vértice en el punto (2, 8).



3. Expresa estas funciones sin utilizar el valor absoluto (del tipo definidas a trozos). Represéntalas.

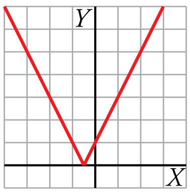
a) $y = |2x + 1|$

b) $y = \left|1 - \dfrac{x}{4}\right|$

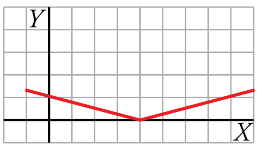
c) $y = |-x^2 + 4x - 3|$

d) $y = |9 - (x - 2)^2|$

a) $y = |2x + 1| = \begin{cases} -(2x+1) & \text{si } \ 2x+1 < 0 \\ 2x+1 & \text{si } \ 2x+1 \ge 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } \ x < -\dfrac{1}{2} \\ 2x+1 & \text{si } \ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

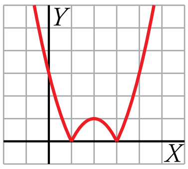


b) $y = \left|1 - \dfrac{x}{4}\right| = \begin{cases} -\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) & \text{si } \ 1 - \dfrac{x}{4} < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{4} & \text{si } \ 1 - \dfrac{x}{4} \ge 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -1 + \dfrac{x}{4} & \text{si } \ x > 4 \\ 1 - \dfrac{x}{4} & \text{si } \ x \le 4 \end{cases}$



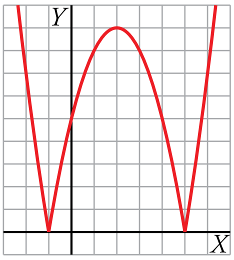
c) $y = |-x^2 + 4x - 3| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x - 3) & \text{si } -x^2 + 4x - 3 < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$



d) $y = |9 - (x - 2)^2| \rightarrow y = |-x^2 + 4x + 5| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x + 5) & \text{si } -x^2 + 4x + 5 < 0 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -x^2 + 4x + 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

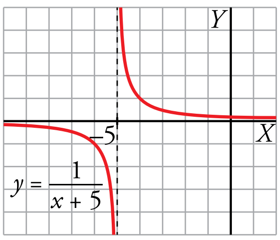


4. **Representa las siguientes funciones e indica sus dominios de definición:**

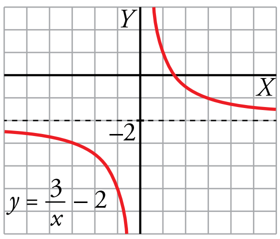
a) $y = \dfrac{1}{x+5}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x} - 2$ **c)** $y = \dfrac{3}{x-1} + 1$

d) $y = \sqrt{x+2}$ **e)** $y = 2\sqrt{x-1}$ **f)** $y = -\sqrt{x-3}$

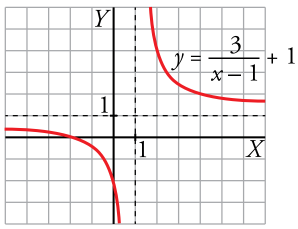
a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-5\}$



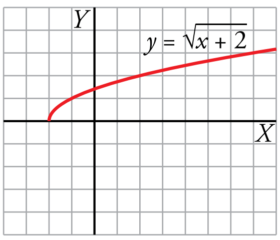
b) Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$



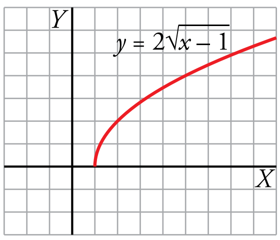
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$



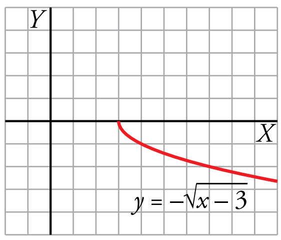
d) Dominio = $[-2, +\infty)$



e) Dominio = $[1, +\infty)$



f) Dominio = $[3, +\infty)$

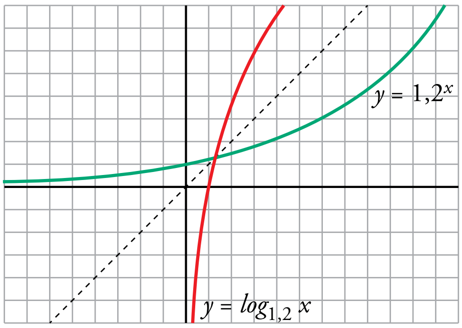


5. **Representa estos pares de funciones:**

a) $y = 1{,}2^x$; $y = \log_{1,2} x$ **b)** $y = 2{,}2^x$; $y = \log_{2,2} x$

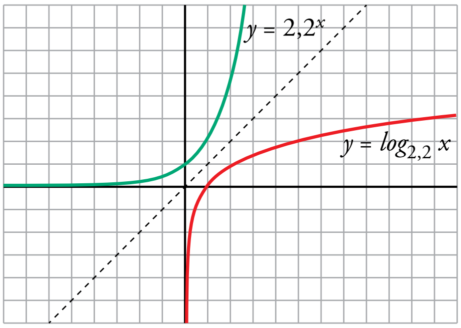
¿Respecto a qué recta son simétricas las dos funciones de cada par?

a)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

b)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

6. **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) **Si la base del cuadro midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie?**

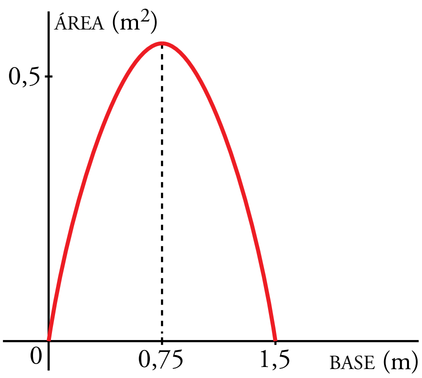
b) **¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera, *x*?**

c) **¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?**

a) Altura = 1 m; Área = 0,5 m²

b) Base = x, altura = $\frac{3 - 2x}{2} = 1{,}5 - x$; Área = $x\,(1{,}5 - x) = 1{,}5x - x^2$

c)



$y = -x^2 + 1{,}5x$ es una parábola que corta al eje X en los puntos de abscisas 0 y 1,5.

La abscisa del vértice es $\frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$.

Su ordenada es 0,5625. Este es el punto "más alto de la curva".

Por tanto, el área máxima se obtiene para $x = 0{,}75$ m, y es de 0,5625 m².

NOTA: Se trata de un cuadrado de 0,75 m de lado.