

Página 123

Resuelve

- 1. Sabiendo que 1 estadio = 185 m, halla en kilómetros el radio de la Tierra que obtuvo Eratóstenes. Compáralo con la realidad: 6 371 km.**

Si a $1/50$ del ángulo total le corresponde un arco de 5 000 estadios, al ángulo total le corresponden $50 \times 5\,000 = 250\,000$ estadios. Esta es la longitud de la circunferencia terrestre. El radio R se obtiene así:

$$2\pi R = 250\,000 \rightarrow R = \frac{250\,000}{2\pi} = 39\,788,7 \text{ estadios} = 7\,360\,916 \text{ m} \approx 7\,361 \text{ km}$$

- 2. ¿Cuánto mide el lado de la ciudad china?**

Llamamos x a la medida, en pasos, del lado del cuadrado (ciudad).

Los catetos del triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto en la puerta norte, N , miden $\frac{x}{2}$ y 20 pasos.

Este triángulo es semejante al grande, cuyos catetos miden 1 775 pasos y

$$20 + x + 14 = x + 34 \text{ pasos.}$$

La semejanza de los dos triángulo permite poner:

$$\frac{\frac{x}{2}}{1\,775} = \frac{20}{x + 34} \rightarrow \frac{x}{3\,550} = \frac{20}{x + 34} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 34x - 71\,000 = 0 \rightarrow x = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 + 284\,000}}{2} = \frac{-34 \pm 534}{2}$$

Solo es válida la raíz positiva: $x = 250$ pasos.

1 Semejanza

Página 125

- 1. Para construir una carpa semiesférica para su maqueta, Gonzalo ha necesitado 402 cm^2 de tela. Sabiendo que tiene un diámetro de 16 cm, calcula la superficie y el volumen de la carpa en la realidad.**

Calculamos en primer lugar el volumen de la carpa, en maqueta:

$$V_{\text{ESFERA MAQUETA}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = 2144,60 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CARPA MAQUETA}} = 2144,60 : 2 = 1072,30 \text{ cm}^3$$

Por tanto:

$$V_{\text{CARPA REAL}} = V_{\text{CARPA MAQUETA}} \cdot 500^3 = 134037500000 \text{ cm}^3 = 134037,5 \text{ m}^3$$

$$S_{\text{CARPA REAL}} = S_{\text{CARPA MAQUETA}} \cdot 500^2 = 100500000 \text{ cm}^2 = 10050 \text{ m}^2$$

- 2. La Estatua de la Libertad de Nueva York mide 30,6 m de los pies a la cabeza. Si con ella se reprodujo a una persona cuya estatura era de 170 cm, ¿qué escala utilizaron para su construcción?**

$$30,6 \text{ m} = 3060 \text{ cm}$$

3060 cm de la escultura corresponden a 170 cm en la realidad.

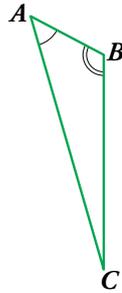
$$\text{Escala} \rightarrow 3060 : 170 = 18$$

La escala es 18:1; es decir, 18 cm en la escultura representan 1 cm en la realidad.

2 Semejanza de triángulos

Página 127

1. Estamos en A . Queremos calcular la distancia a un lugar lejano e inaccesible, C . Para eso, señalamos otro punto próximo, B , y medimos: $\overline{AB} = 53$ m. Medimos también los ángulos $\hat{A} = 46^\circ$ y $\hat{B} = 118^\circ$.



Ahora dibujamos en nuestro cuaderno un triángulo $A'B'C'$ con las siguientes medidas: $\overline{A'B'} = 53$ mm, $\hat{A}' = 46^\circ$, $\hat{B}' = 118^\circ$.

- Construye el triángulo $A'B'C'$ en tu cuaderno.
- Explica por qué $\widehat{A'B'C'}$ es semejante a \widehat{ABC} .
- Mide $\overline{A'C'}$ con la regla.
- Deduce cuánto mide la distancia buscada, \overline{AC} .

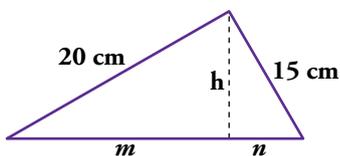
- Se construye el triángulo con las indicaciones dadas.
- Los triángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales.
- $\overline{A'C'}$ mide unos 17 cm.
- Si llamamos $x = \overline{AC}$:

$$\frac{53 \text{ mm}}{53 \text{ m}} = \frac{170 \text{ mm}}{x} \rightarrow x = 170 \text{ m}$$

3 La semejanza en los triángulos rectángulos

Página 129

1. En este triángulo rectángulo, calcula las longitudes h , m y n .



En \widehat{ABC} aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(m + n)^2 = 20^2 + 15^2 \rightarrow (m + n)^2 = 625 \rightarrow m + n = 25$$

Ahora aplicamos el teorema del cateto.

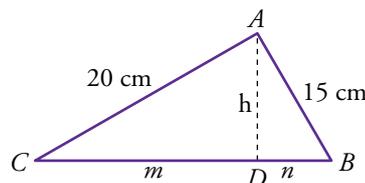
$$\left. \begin{aligned} 20^2 &= (m + n) \cdot m \\ 15^2 &= (m + n) \cdot n \end{aligned} \right\} \text{ Como } m + n = 25:$$

$$20^2 = 25m \rightarrow m = \frac{400}{25} = 16 \text{ cm}$$

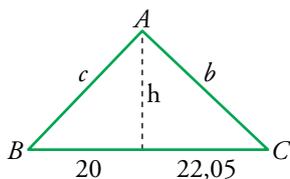
$$15^2 = 25n \rightarrow n = \frac{225}{25} = 9 \text{ cm}$$

Por último aplicamos el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n \rightarrow h^2 = 16 \cdot 9 = 144 \rightarrow h = 12 \text{ cm}$$



2. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 20 cm y 22,05 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los catetos y de la altura sobre la hipotenusa.



Aplicamos el teorema del cateto a \widehat{ABC} :

$$b^2 = (20 + 22,05) \cdot 22,05 = 927,2025 \rightarrow b = 30,45 \text{ cm}$$

$$c^2 = (20 + 22,05) \cdot 20 = 841 \rightarrow c = 29 \text{ cm}$$

Para calcular la altura sobre la hipotenusa de \widehat{ABC} utilizamos el teorema de la altura:

$$h^2 = 20 \cdot 22,05 = 441 \rightarrow h = 21 \text{ cm}$$

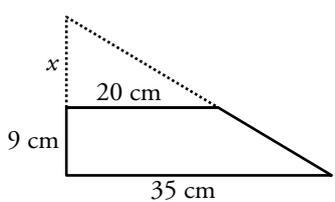
4 Aplicaciones de la semejanza de triángulos

Página 130

1. Calcula el volumen de un tronco de cono cuya altura es 9 cm y cuyas bases tienen radios de 20 cm y 35 cm.

a) Hazlo paso a paso, razonadamente.

b) Compruébalo aplicando la fórmula anterior.

a) 
$$\frac{x}{20} = \frac{x+9}{35} \rightarrow 35x = 20x + 180 \rightarrow$$

$$\rightarrow 15x = 180 \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

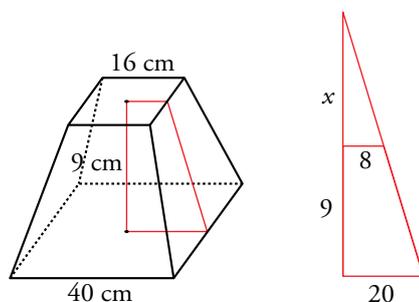
$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 35^2 \cdot (12 + 9) - \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 12 = \frac{1}{3}\pi(25\,725 - 4\,800) = 21\,912,61 \text{ cm}^3$$

b)
$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi(35^2 + 35 \cdot 20 + 20^2) \cdot 9 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2\,325 \cdot 9 = 21\,912,61 \text{ cm}^3$$

2. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases son cuadrados.

Lados de los cuadrados: 40 cm y 16 cm

Altura: 9 cm



$$\frac{x+9}{20} = \frac{x}{8} \rightarrow 8x + 72 = 20x \rightarrow 12x = 72 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}[40^2 \cdot (9 + 6)] - \frac{1}{3}(16^2 \cdot 6) = \frac{1}{3}(24\,000 - 1\,536) = 7\,488 \text{ cm}^3$$

Página 131

3. Un globo sube 643 m sobre la superficie de la Tierra. Averigua qué superficie terrestre se verá desde arriba. Hazlo de dos formas:

a) Razonadamente, utilizando el teorema del cateto.

b) Aplicando la fórmula anterior, para comprobar que la solución es correcta.

c) ¿A qué altura hemos de ascender para ver exactamente el 5 % de la superficie de la Tierra? (Aplica la fórmula).

a) Por el teorema del cateto:

$$R^2 = (R - h)(R + d) \text{ donde: } R = \text{radio de la Tierra} = 6371 \text{ km}$$

$$d = 643 \text{ m} = 0,643 \text{ km}$$

$$6371^2 = (6371 - h)(6371 + 0,643) \rightarrow h = \frac{6371 \cdot 6371,643 - 6371^2}{6371,643} = 0,643 \text{ km}$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6371 \cdot 0,643 = 25726,35 \text{ km}^2$$

$$b) A_{\text{CASQUETE}} = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} = \frac{2\pi \cdot 6371^2 \cdot 0,643}{6371,643} \approx 25723,76 \text{ km}^2$$

$$c) S_{\text{TIERRA}} = 4\pi R^2 = 509805890,96 \text{ km}^2$$

$$5\% \text{ de } S_{\text{TIERRA}} = 25490294,548 \text{ km}^2$$

$$A = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} \rightarrow AR + Ad = 2\pi R^2 d \rightarrow AR = d(2\pi R^2 - A) \rightarrow d = \frac{AR}{2\pi R^2 - A}$$

$$d = \frac{25490294,548 \cdot 6371}{2\pi \cdot 6371^2 - 25490294,548} = 707,9 \text{ km}$$

4. Un cohete se aproxima a la Luna, cuyo diámetro, según sabemos, es de 3500 km.

a) Averigua qué superficie de Luna se ve desde el cohete cuando se encuentra a 1000 km de distancia. Hazlo razonadamente y comprueba el resultado aplicando la fórmula.

b) ¿A qué distancia debe estar el cohete para poder asegurar que sus ocupantes pueden ver al 10 % de la superficie de la Luna? (Aplica la fórmula).

$$a) \frac{R}{R + d} = \frac{R - h}{R} \rightarrow \frac{1750}{2750} = \frac{1750 - h}{1750} \rightarrow h = \frac{1750^2 - 1750 \cdot 2750}{-2750} = 636,36 \text{ km}$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 1750 \cdot 636,36 = 6997143,654 \text{ km}^2$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} = \frac{2\pi \cdot 1750^2 \cdot 1000}{2750} = 6997183,638 \text{ km}^2$$

$$b) S_{\text{LUNA}} = 4\pi R^2 = 38484510 \text{ km}^2$$

$$10\% \text{ de } S_{\text{LUNA}} = 3848451 \text{ km}^2$$

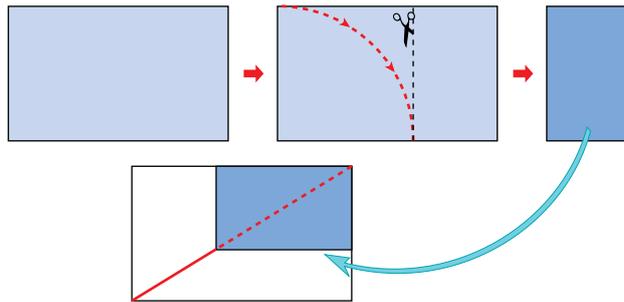
$$d = \frac{S_{\text{LUNA}} \cdot R}{2\pi R^2 - S_{\text{LUNA}}} = \frac{6734789250}{15393804} = 437,5 \text{ km}$$

5 Semejanza de rectángulos. Aplicaciones

Página 133

1. Si a una hoja A-4 se le corta una tira de 2,5 cm de ancho a lo largo del lado mayor, obtendrás un rectángulo áureo. Constrúyete dos.

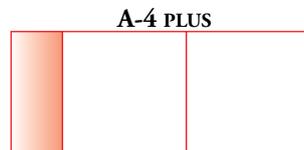
A uno de ellos, córtale un cuadrado. Comprueba que el rectángulo remanente es semejante al rectángulo inicial.



Experiencia práctica.

2. Si a una hoja A-4 le añadimos un cuadrado, el rectángulo resultante, al que llamaremos A-4 PLUS, tiene la siguiente propiedad: si le quitamos dos cuadrados, el rectángulo remanente es semejante al inicial.

El rectángulo sombreado es semejante al rectángulo total.



- a) Compruébalo con una hoja A-4.
b) Demuéstralo teniendo en cuenta que las dimensiones del A-4 PLUS son $\sqrt{2} + 1$ y 1, y las del rectángulo sobrante son 1 y $\sqrt{2} - 1$.

a) Experiencia práctica.

- b) Debemos comprobar que $\frac{\sqrt{2} + 1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Página 134

Hazlo tú. ¿A qué distancia de nuestros ojos debemos poner una bola de 3 cm de diámetro para que al mirar a la Luna la tape completamente?

Distancia a la luna = 384 000 km = $3,84 \cdot 10^{10}$ cm

Diámetro de la bola = 3 cm

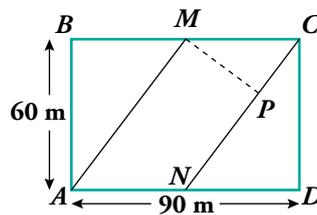
Diámetro de la luna = 3 500 km = $3,5 \cdot 10^8$ cm

Distancia a la bola = x cm

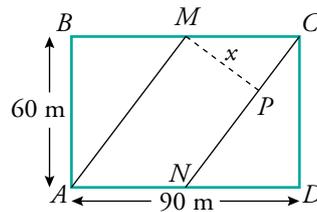
Como la luna y la bola tendrían el mismo tamaño aparente, la razón entre sus distancias a los ojos debe ser igual que la razón entre sus diámetros:

$$\frac{3,84 \cdot 10^{10}}{x} = \frac{3,5 \cdot 10^8}{3} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 3,84 \cdot 10^{10}}{3,5 \cdot 10^8} = 329 \text{ cm} = 3,29 \text{ metros}$$

Hazlo tú. Si M y N son los puntos medios de BC y AD , calcula \overline{MP} .



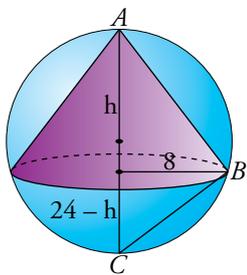
\widehat{CDN} es semejante a \widehat{MPC} por ser rectángulos y ser $\widehat{MCP} = \widehat{CND}$ (alternos internos).



Siendo $x = \overline{MP}$ podemos afirmar que:

$$\frac{x}{60} = \frac{45}{\sqrt{60^2 + 45^2}} \rightarrow \frac{x}{60} = \frac{45}{75} \rightarrow 75x = 2700 \rightarrow x = 36$$

Hazlo tú. En una esfera de diámetro 24 cm se inscribe un cono de radio 8 cm. ¿Cuál será su altura?



\widehat{ABC} es rectángulo en \widehat{B} (ángulo inscrito en una semicircunferencia).

El radio del cono es la altura sobre la hipotenusa de \widehat{ABC} .

$$\left. \begin{array}{l} \text{proyección de } AB \text{ sobre } AC \rightarrow h \\ \text{proyección de } BC \text{ sobre } AC \rightarrow 24 - h \end{array} \right\}$$

Por el teorema de la altura tenemos que:

$$8^2 = h \cdot (24 - h) \rightarrow 64 = 24h - h^2 \rightarrow h^2 - 24h + 64 = 0 = \begin{cases} 12 + 4\sqrt{5} \text{ cm} \\ 12 - 4\sqrt{5} \text{ cm} \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas, es decir, existen dos conos que cumplen las condiciones.

Ejercicios y problemas

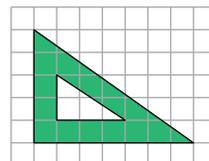
Página 135

Practica

Razón de semejanza. Escalas

1.  a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?

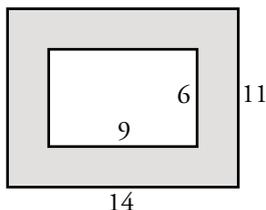
b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?



a) No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

b) $\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 2,5 = 5 \\ 3 \cdot 2,5 = 7,5 \end{array} \right\}$ Los catetos medirán 5 y 7,5 unidades.

2.  Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.

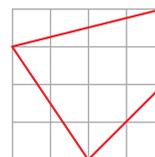


$$\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6} \rightarrow \text{No son semejantes.}$$

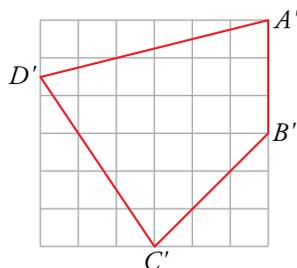
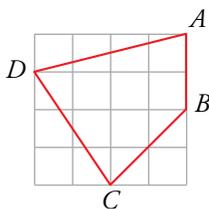
3.  Queremos reproducir la figura adjunta a escala $3/2$.

a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

b) Calcula la longitud de sus lados.



a)



b) $\overline{A'B'} = 3$

$$\overline{B'C'} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{A'D'} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

$$\overline{D'C'} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$$

Se observa que, en todos los casos:

$$\text{Longitud lado ampliado} = \frac{3}{2} \cdot \text{Longitud lado original}$$

puesto que:

$$\overline{AB} = 2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{DC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

4.  En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1500\,000 \\ 2,5 \rightarrow x \end{array} \right\} x = 2,5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000 \text{ cm} = 37,5 \text{ km}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 1500\,000 \rightarrow 1 \\ 36\,000\,000 \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{36\,000\,000}{1500\,000} = 24 \text{ cm}$$

5.  Indica, en cada caso, cuál es la escala del plano:

a) 1 mm del plano representa 10 m reales.

b) 50 km reales se representan por 1 dm en el plano.

c) 0,001 mm reales se representan por 1 cm en el plano.

a) Como $10 \text{ m} = 10\,000 \text{ mm}$, la escala es 1:10 000.

b) Como $50 \text{ km} = 500\,000 \text{ dm}$, la escala es 1:500 000.

c) Como $0,001 \text{ mm} = 0,0001 \text{ cm}$, la escala es 10 000:1.

6.  En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm^2 . ¿Cuál es la superficie real del salón?

$$7 \cdot 200^2 = 280\,000 \text{ cm}^2 = 28 \text{ m}^2$$

7.  Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?

$$\text{Área} = \frac{275 \cdot 150}{2} = 20\,625 \text{ cm}^2$$

$$\text{En el plano ocupará } \frac{20\,625}{25^2} = 33 \text{ cm}^2.$$

8.  Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm^2 .

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm^3 de agua.

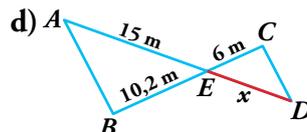
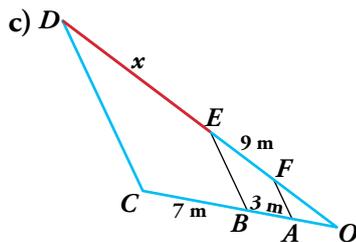
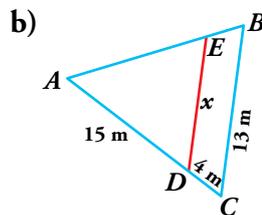
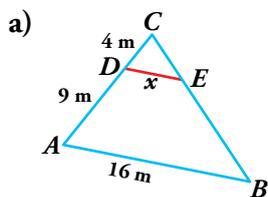
$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} \rightarrow h \\ 4 \text{ cm} \rightarrow d \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} h = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.}$$

$$\text{b) } 40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$$

$$\text{c) } 20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000 \text{ cm}^3 = 312,5 \text{ m}^3$$

Semejanza de triángulos

9.  Identifica triángulos en posición de Tales en cada figura y calcula, en cada caso, la longitud del segmento DE :



a) Los triángulos \widehat{ACB} y \widehat{DCE} están en posición de Tales porque tienen \widehat{C} en común y los lados DE y AB son paralelos. Por tanto, son semejantes y se cumple:

$$\frac{x}{16} = \frac{4}{13} \rightarrow x = \frac{16 \cdot 4}{13} = \frac{64}{13} = 4,92 \text{ m}$$

b) \widehat{BAC} y \widehat{EAD} están en posición de Tales porque \widehat{A} es común a ambos y ED y BC son paralelos. Por tanto, son semejantes y:

$$\frac{x}{13} = \frac{15}{19} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 13}{19} = 10,26 \text{ m}$$

c) \widehat{FOA} , \widehat{EOB} y \widehat{DOC} están en posición de Tales, porque \widehat{O} es común a los tres triángulos y $FA \parallel EB \parallel DC$. Por tanto:

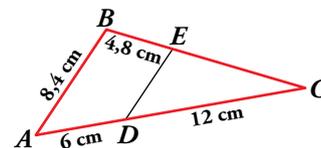
$$\frac{x}{7} = \frac{9}{3} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 7}{3} = \frac{63}{3} = 21 \text{ m}$$

d) \widehat{AEB} y \widehat{CED} están en posición de Tales, porque $\widehat{AEB} = \widehat{CED}$ (opuestos por el vértice) y $AB \parallel CD$. Por tanto:

$$\frac{15}{x} = \frac{10,2}{6} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 15}{10,2} = 8,82 \text{ m}$$

10.  En la figura, el segmento DE es paralelo a AB .

Justifica que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula \overline{DE} y \overline{EC} .



Los triángulos ABC y CDE son semejantes porque tienen un ángulo común, \widehat{C} , y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos, $DE \parallel AB$. Están en posición de Tales.

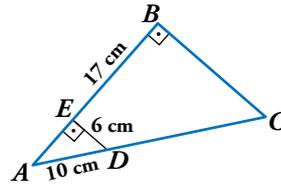
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{\overline{DE}}{8,4} = \frac{12}{18} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 8,4}{18} = 5,6 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{x}{4,8 + x} = \frac{5,6}{8,4} \rightarrow 8,4x = 26,88 + 5,6x \rightarrow 2,8x = 26,88 \rightarrow x = 9,6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{EC} = 9,6 \text{ cm}$$

11.  ¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y AED ?

Halla el perímetro del trapecio $EBCD$.



Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, \hat{A} . Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos \overline{EA} aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}, \quad \overline{AB} = 8 + 17 = 25 \text{ cm}$$

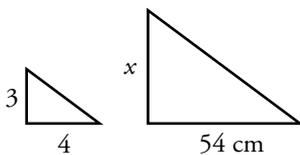
- $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \rightarrow \frac{10+x}{10} = \frac{25}{8} \rightarrow 80 + 8x = 250 \rightarrow 8x = 170$

$$x = 21,25 \rightarrow \overline{DC} = 21,25 \text{ cm}$$

- $\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \frac{\overline{BC}}{6} = \frac{25}{8} \rightarrow \overline{BC} = \frac{150}{8} = 18,75 \text{ cm}$

- Perímetro de $EBCD = 17 + 18,75 + 21,25 + 6 = 63 \text{ cm}$

12.  En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es $3/4$. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm .



$$\frac{54}{x} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{54 \cdot 4}{3} = 72 \text{ cm} \text{ mide el cateto mayor.}$$

$$h = \sqrt{54^2 + 72^2} = 90 \text{ cm} \text{ mide la hipotenusa.}$$

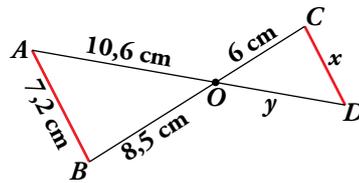
$$\text{Perímetro} = 54 + 72 + 90 = 216 \text{ cm}$$

13.  La razón de semejanza entre dos triángulos es $2/5$. Si el área del mayor es 150 cm^2 , ¿cuál es el área del menor?

$$\text{El área del menor es } 150 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 24 \text{ cm}^2.$$

Página 136

14.  Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD .



- a) Di por qué son semejantes los triángulos AOB y ODC .
b) Calcula x e y .

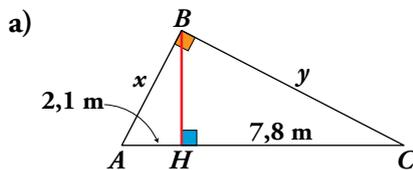
a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

b) $\frac{x}{7,2} = \frac{6}{8,5} \rightarrow x = \frac{7,2 \cdot 6}{8,5} \approx 5,08 \text{ cm}$

$\frac{6}{8,5} = \frac{y}{10,6} \rightarrow y = \frac{10,6 \cdot 6}{8,5} \approx 7,48 \text{ cm}$

Teoremas del cateto y de la altura

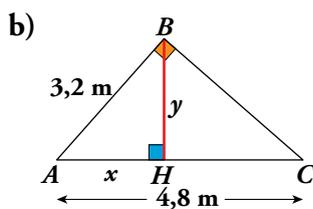
15.  En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura BH sobre la hipotenusa. Halla, en cada caso, los segmentos x e y .



a) $\overline{BH}^2 = 2,1 \cdot 7,8 \rightarrow \overline{BH} \approx 4,05 \text{ m}$

En el triángulo ABH , $x^2 = 2,1^2 + 4,05^2 \rightarrow x \approx 4,56 \text{ m}$

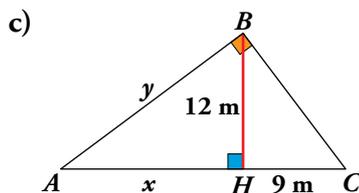
En el triángulo BHC , $y^2 = 7,8^2 + 4,05^2 \rightarrow y \approx 8,79 \text{ m}$



b) Por el teorema del cateto:

$3,2^2 = 4,8x \rightarrow x \approx 2,13 \text{ m}$

En el triángulo ABH , $y^2 = 3,2^2 - 2,13^2 \rightarrow y \approx 2,39 \text{ m}$

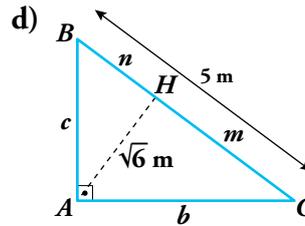
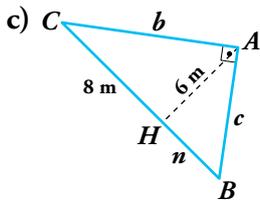
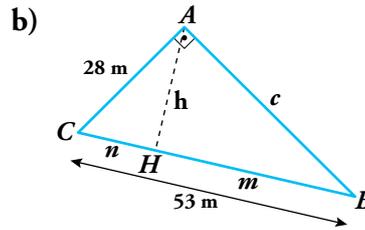
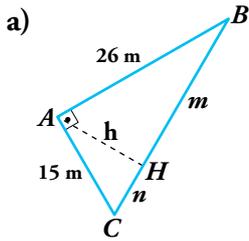


c) Por el teorema de la altura:

$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = 16 \text{ m}$

En el triángulo ABH , $y^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow y = 20 \text{ m}$

16.  Calcula los valores que faltan en cada uno de los siguientes triángulos, rectángulos en A:



a) Por el teorema de Pitágoras:

$$(m + n)^2 = 15^2 + 26^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow m + n = \sqrt{901} \approx 30,02 \text{ m}$$

Por el teorema del cateto:

$$15^2 = 30,02 \cdot n \rightarrow n = 7,50 \text{ m}$$

$$26^2 = 30,02 \cdot m \rightarrow m = 22,52 \text{ m}$$

Por el teorema de la altura:

$$h^2 = 7,50 \cdot 22,52 \rightarrow h = 13 \text{ m}$$

c) Por el teorema de la altura:

$$6^2 = 8 \cdot n \rightarrow n = 4,5 \text{ m}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow b = 10 \text{ m}$$

Por el teorema del cateto:

$$c^2 = (8 + 4,5) \cdot 4,5 \rightarrow c = 7,5 \text{ m}$$

b) Por el teorema de Pitágoras:

$$53^2 = 28^2 + c^2 \rightarrow c = 45 \text{ m}$$

Por el teorema del cateto:

$$28^2 = 53 \cdot n \rightarrow n = 14,79 \text{ m}$$

$$45^2 = 53 \cdot m \rightarrow m = 38,21 \text{ m}$$

Por el teorema de la altura:

$$h^2 = 14,79 \cdot 38,21 \rightarrow h = 23,77 \text{ m}$$

d) Por el teorema de la altura $(\sqrt{6})^2 = m \cdot n$:

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{6})^2 &= m \cdot n \\ 5 &= m + n \end{aligned} \right\} \rightarrow m = 5 - n$$

$$6 = (5 - n)n \rightarrow 6 = 5n - n^2 \rightarrow n^2 - 5n + 6 = 0$$

$$n = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

• Si $n = 3$, por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 3^2 + (\sqrt{6})^2 \rightarrow c = \sqrt{15} = 3,87 \text{ m}$$

Si $n = 3 \rightarrow m = 2$, y por el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 \rightarrow b = \sqrt{10} = 3,16 \text{ m}$$

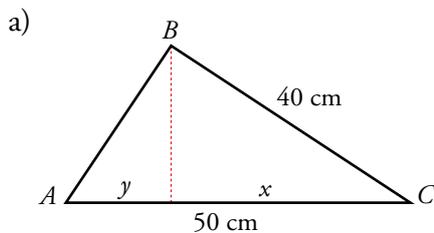
• Si $n = 2$, por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 \rightarrow c = 3,16 \text{ m}$$

$$b^2 = 3^2 + (\sqrt{6})^2 \rightarrow b = 3,87 \text{ m}$$

Las soluciones son complementarias.

- 17.**  Dibuja, en cada caso, un triángulo rectángulo y traza su altura sobre la hipotenusa.
- a) Calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa si esta mide 50 cm y el cateto mayor, 40 cm.
- b) La hipotenusa mide 25 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 9 cm. Halla el cateto mayor.
- c) La altura relativa a la hipotenusa mide 6 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 4,5 cm. Halla la hipotenusa.



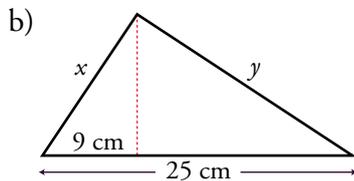
$$40^2 = 50 \cdot x \rightarrow x = 32 \text{ cm}$$

Proyección de AB sobre AC :

$$50 - 32 = 18 \text{ cm}$$

$$\text{O bien: } \overline{AB} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ cm}$$

$$30^2 = 50 \cdot y \rightarrow y = 18 \text{ cm}$$

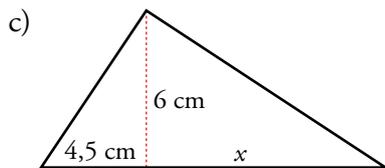


La proyección de y sobre la hipotenusa es:

$$25 - 9 = 16 \text{ cm}$$

Por el teorema del cateto:

$$y^2 = 25 \cdot 16 \rightarrow y = 20 \text{ cm}$$



Por el teorema de la altura:

$$6^2 = 4,5 \cdot x \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Hipotenusa} = 4,5 + 8 = 12,5 \text{ cm}$$

- 18.**  El mástil de una bandera está sujeto a tierra por dos cables que forman un ángulo recto en el punto más alto del mástil. Las distancias desde la base del mástil a los puntos de sujeción de los cables son 12 m y 15 m. Calcula la altura del mástil.

Por el teorema de la altura:

$$h^2 = 12 \cdot 15 = 180 \rightarrow h = \sqrt{180} = 13,42 \text{ m}$$

Aplica lo aprendido

- 19.**  Dos depósitos cilíndricos semejantes tienen un volumen de 100 m^3 y 250 m^3 , respectivamente. Si la altura del menor es 1,5 m, ¿cuánto mide el radio del mayor?

Como los depósitos son semejantes, sabemos que $V_{\text{MAYOR}} = k^3 \cdot V_{\text{MENOR}}$, con k = razón de semejanza:

$$250 = k^3 \cdot 100 \rightarrow k^3 = \frac{250}{100} = \frac{5}{2} \rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

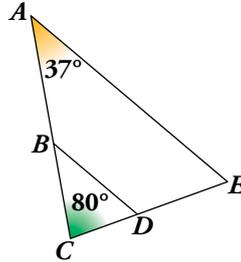
Por otra parte:

$$V_{\text{MENOR}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 100 = \pi \cdot r^2 \cdot 1,50 \rightarrow r^2 = \frac{100}{1,50\pi} = \frac{200}{3\pi} \rightarrow r = \sqrt{\frac{200}{3\pi}} \text{ m}$$

Por lo que podemos calcular el radio del mayor:

$$R = k \cdot r = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{200}{3\pi}} = 6,25 \text{ m}$$

20.  Si BD es paralelo a AE , y $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm y $\overline{BC} = 6,4$ cm:
- Calcula \overline{CD} .
 - ¿Podemos saber cuánto vale \overline{AE} sin medirlo directamente?
 - Si $\hat{A} = 37^\circ$ y $\hat{C} = 80^\circ$, calcula \hat{E} , \hat{B} y \hat{D} .



a) Los triángulos ACE y BCD son semejantes.

$$\text{Por tanto: } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \rightarrow \frac{15}{6,4} = \frac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \frac{11 \cdot 6,4}{15} \approx 4,69 \text{ cm}$$

b) No podemos saber lo que mide AE porque no conocemos la medida del lado correspondiente, BD .

$$\text{c) } \hat{E} = 180^\circ - (37^\circ + 80^\circ) = 63^\circ; \hat{B} = \hat{A} = 37^\circ; \hat{D} = \hat{E} = 63^\circ$$

21.  Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2 , ¿cuál es el área del segundo?

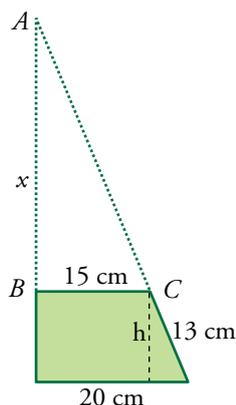
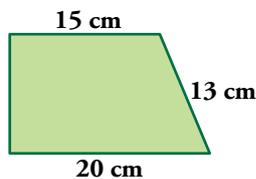
Como los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales. Así:

$$k = \frac{13,6}{8} = 1,7 \text{ es la razón de semejanza.}$$

Por tanto:

$$\text{Área del mayor} = k^2 \cdot \text{Área del menor} = 1,7^2 \cdot 26 = 75,14 \text{ cm}^2$$

22.  Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio rectángulo y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.



$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{x+12}{20} \rightarrow 20x = 15x + 180 \rightarrow x = 36 \text{ cm}$$

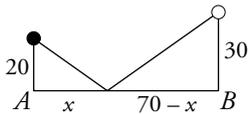
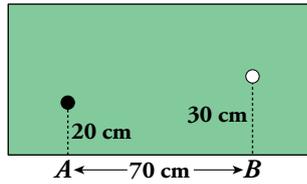
Catetos del triángulo: 20 cm y 48 cm

$$\text{Hipotenusa: } \sqrt{20^2 + 48^2} = 52 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro: } 20 + 48 + 52 = 120 \text{ cm}$$

Página 137

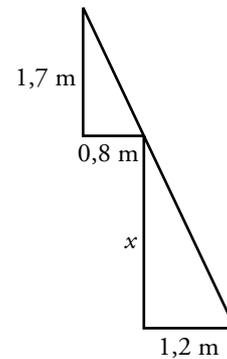
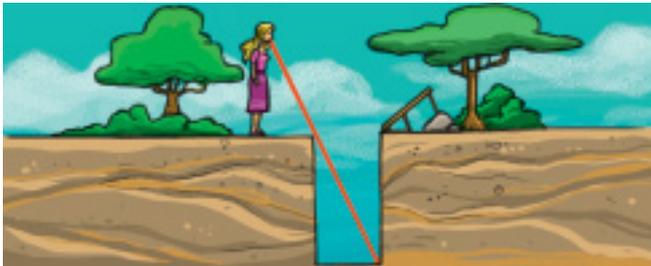
23.  ¿En qué punto comprendido entre A y B debe dar la bola blanca para que al rebotar alcance a la bola negra?



$$\frac{20}{x} = \frac{30}{70-x} \rightarrow 1400 - 20x = 30x \rightarrow 1400 = 50x \rightarrow x = 28 \text{ cm}$$

Debe dar a 28 cm del punto A .

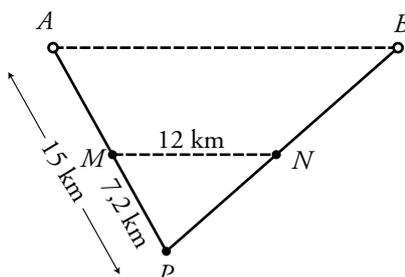
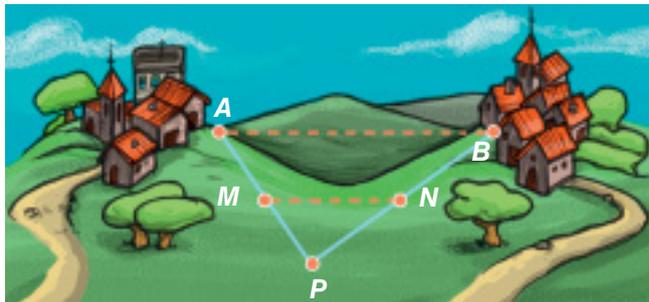
24.  ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



$$\frac{x}{1,7} = \frac{1,2}{0,8} \rightarrow x = \frac{1,2 \cdot 1,7}{0,8} \rightarrow x = 2,55 \text{ m}$$

La profundidad es de 2,55 m.

25.  Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia \overline{AB} , fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $\overline{AP} = 15 \text{ km}$, $\overline{PM} = 7,2 \text{ km}$ y $\overline{MN} = 12 \text{ km}$. (MN es paralela a AB). Halla la distancia \overline{AB} .

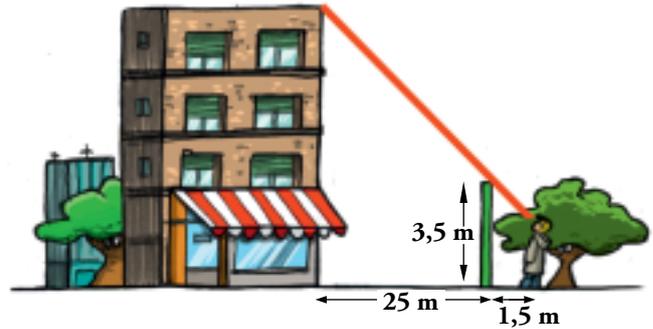
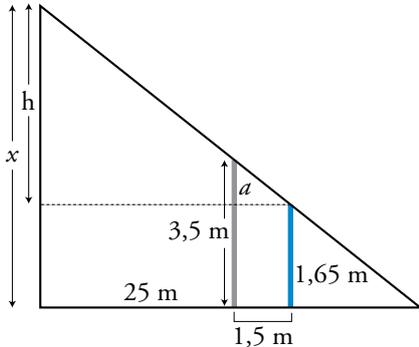


Los triángulos APB y MPN son semejantes.

Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7,2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7,2} = 25 \text{ km}$$

26. Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?



$$a = 3,5 - 1,65 = 1,85 \text{ m}$$

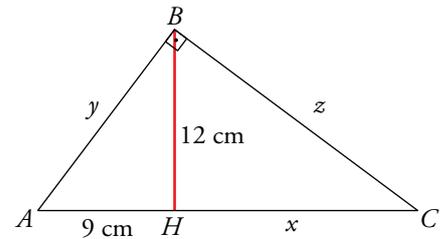
$$\frac{25 + 1,5}{1,5} = \frac{h}{1,85} \rightarrow h = \frac{26,5 \cdot 1,85}{1,5} = 32,68 \text{ m}$$

$$\text{Altura de la casa: } 32,68 + 1,65 = 34,33 \text{ m}$$

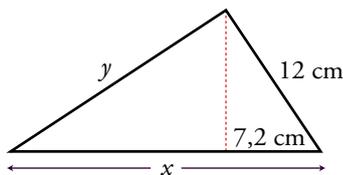
27. La altura relativa a la hipotenusa del triángulo ABC , rectángulo en B , mide 12 cm y la proyección del cateto AB sobre la hipotenusa mide 9 cm. Halla el perímetro de ese triángulo.

Por el teorema de la altura: $12^2 = 9 \cdot x \rightarrow x = 16$

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 12^2 + 9^2 \rightarrow y = 15 \text{ cm} \\ z^2 &= 12^2 + 16^2 \rightarrow z = 20 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \text{Perímetro: } 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$



28. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m y su proyección sobre la hipotenusa mide 7,2 m. Calcula el área y el perímetro del triángulo.



Por el teorema del cateto:

$$12^2 = 7,2x \rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$$y^2 = 20^2 - 12^2 \rightarrow y = 16 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ m}^2, \text{ Perímetro} = 16 + 12 + 20 = 48 \text{ m}$$

29. El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m.

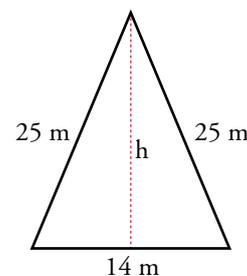
Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

Altura del triángulo: $h^2 = 25^2 - 7^2 \rightarrow h = 24 \text{ m}$

$$\text{Área} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 168 \text{ m}^2$$

$$\text{Razón de semejanza} = \frac{96}{64} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Área del triángulo semejante} = 168 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 378 \text{ m}^2$$



- 30.** Dos triángulos ABC y PQR son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m.

Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

Perímetro del triángulo ABC : $24 + 28 + 34 = 86$ m

Razón de semejanza: $\frac{129}{86} = \frac{3}{2}$

Lados del triángulo PQR : $24 \cdot \frac{3}{2} = 36$ cm; $28 \cdot \frac{3}{2} = 42$ cm; $34 \cdot \frac{3}{2} = 51$ cm

- 31.** Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m^2 y 108 m^2 . Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?

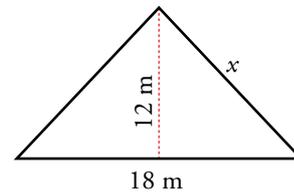
Razón de semejanza: $\sqrt{\frac{108}{48}} = 1,5$

Lado desigual del segundo: $12 \cdot 1,5 = 18$ cm

Altura del segundo: $108 = \frac{18 \cdot h}{2} \rightarrow h = 12$ cm

Lados desiguales del segundo: $x^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow x = 15$ cm

Perímetro del segundo: $18 + 15 + 15 = 48$ cm



- 32.** Los lados de un triángulo ABC miden:

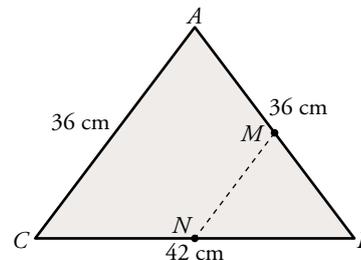
$$\overline{AC} = \overline{AB} = 36 \text{ cm}, \quad \overline{CB} = 42 \text{ cm}$$

Desde un punto M de AB se traza una paralela a AC , que corta al lado BC en un punto N . ¿Cuánto deben medir los lados del triángulo MBN para que su área sea $1/9$ de la del triángulo ABC ?

$$\frac{\text{Área de } MNB}{\text{Área de } ABC} = \frac{1}{9} \rightarrow k^2 = \frac{1}{9} \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$36 \cdot \frac{1}{3} = 12 \text{ cm}; \quad 42 \cdot \frac{1}{3} = 14 \text{ cm}$$

$$\overline{MB} = \overline{MN} = 12 \text{ cm}; \quad \overline{NB} = 14 \text{ cm}$$



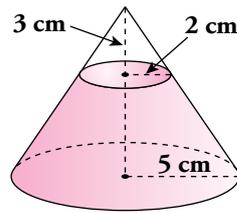
- 33.** Queremos construir un ortoedro de volumen $36\,015 \text{ cm}^3$ que sea semejante a otro de dimensiones $25 \times 15 \times 35 \text{ cm}$. ¿Cuánto medirán sus aristas?

$$V = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13\,125 \text{ cm}^3$$

$$k^3 = \frac{36\,015}{13\,125} = 2,744 \rightarrow k = 1,4$$

Las aristas del ortoedro deben medir: $25 \cdot 1,4 = 35$ cm; $15 \cdot 1,4 = 21$ cm y $35 \cdot 1,4 = 49$ cm.

34.  De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.

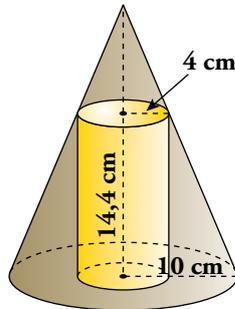


Calculamos la altura del cono grande, x :

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 7,5 = 62,5\pi \text{ cm}^3$$

35.  En un cono de 10 cm de radio hemos inscrito un cilindro de radio 4 cm y altura 14,4 cm. Halla la altura del cono.



$$\frac{x + 14,4}{x} = \frac{10}{4} \rightarrow 4x + 57,6 = 10x \rightarrow 6x = 57,6 \rightarrow x = 9,6 \text{ cm}$$

Altura del cono: $9,6 + 14,4 = 24 \text{ cm}$

Resuelve problemas

- 36.**  Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular de 15 cm de altura en el que los lados de las bases miden 8 cm y 14 cm.

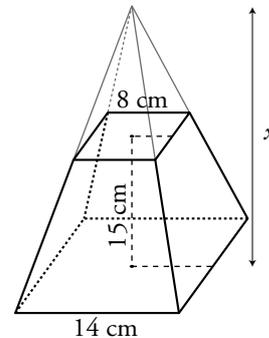
Calculamos la altura de la pirámide menor, x :

$$\frac{x + 15}{x} = \frac{7}{4} \rightarrow 4x + 60 = 7x \rightarrow 60 = 3x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

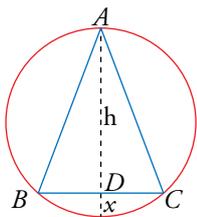
$$\text{Volumen de la pirámide grande} = \frac{1}{3} \cdot 14^2 \cdot (20 + 15) = 2286,67 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen de la pirámide pequeña} = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 20 = 426,67 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen del tronco de pirámide} = 2286,67 - 426,67 = 1860 \text{ cm}^3$$



- 37.**  En una circunferencia de radio desconocido, hemos inscrito un triángulo isósceles de lados $\overline{AB} = \overline{AC} = 16 \text{ m}$ y $\overline{BC} = 10 \text{ m}$. Halla el radio de esa circunferencia.



Por el teorema de Pitágoras sobre \widehat{ADC} :

$$16^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = \sqrt{231} = 15,20 \text{ m}$$

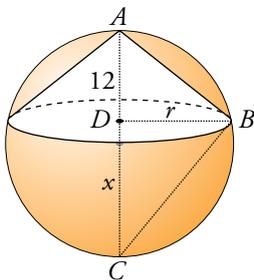
Observamos que \widehat{ADB} y \widehat{BDE} son semejantes. Por tanto:

$$\frac{15,20}{5} = \frac{5}{x} \rightarrow 15,20x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{15,20} = 1,64 \text{ m}$$

Luego, el radio de la circunferencia será:

$$\frac{h + x}{2} = \frac{15,20 + 1,64}{2} = 8,42 \text{ m}$$

- 38.**  En una esfera de 15 cm de radio hemos inscrito un cono de altura 12 cm. Calcula su área lateral.



Radio de la esfera: 15 cm

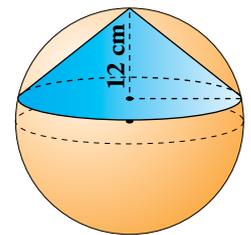
$$\overline{DC} = 30 - 12 = 18 \text{ cm}$$

Calculamos el radio del cono utilizando el teorema de la altura en el triángulo ABC :

$$r^2 = 12 \cdot 18 \rightarrow r \approx 14,7 \text{ cm}$$

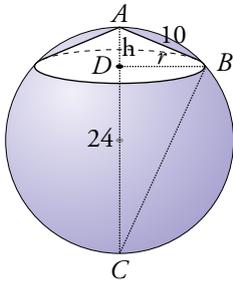
$$\text{Generatriz del cono: } g^2 = 12^2 + 14,7^2 \rightarrow g \approx 18,98 \text{ cm}$$

$$\text{Área lateral del cono: } \pi r g = \pi \cdot 14,7 \cdot 18,98 \approx 279\pi \text{ cm}^2$$



- 39.** En una esfera de 24 cm de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.

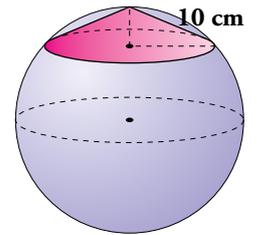
Para calcular la altura del cono, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo ABC :



$$10^2 = h \cdot 24 \rightarrow h \approx 4,17 \text{ cm}$$

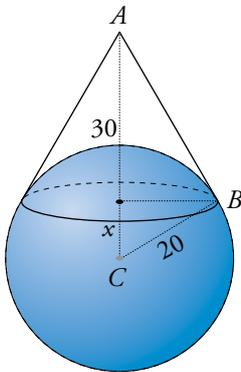
$$\text{Radio del cono: } r^2 = 10^2 - 4,17^2 \rightarrow r \approx 9,09 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 9,09^2 \cdot 4,17 \approx 114,85\pi \text{ cm}^3$$



- 40.** Sobre una esfera de 20 cm de radio se encaja un cono de 30 cm de altura. Halla el área del casquete esférico que determina el cono.

Para hallar x , aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo ABC :

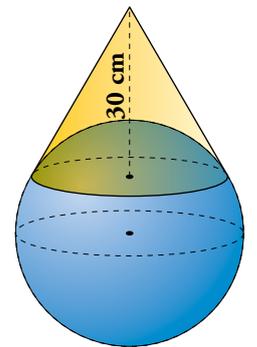


$$20^2 = (30 + x)x \rightarrow 400 = 30x + x^2$$

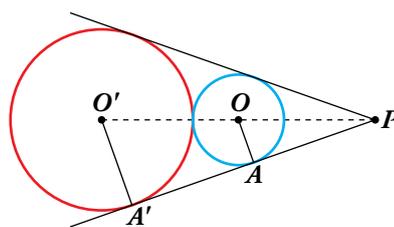
$$x^2 + 30x - 400 = 0 \rightarrow x = \frac{-30 \pm 50}{2} = \begin{cases} -40. \text{ No vale.} \\ 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Altura del casquete} = 20 - 10 = 10 \text{ cm}$$

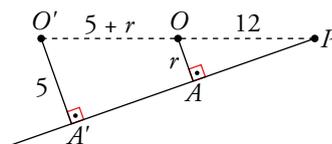
$$\text{Área del casquete} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 = 400\pi \text{ cm}^2$$



- 41.** Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si $\overline{OP} = 12 \text{ cm}$ y $\overline{O'A'} = 5 \text{ cm}$, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor?



Los triángulos OAP y $O'A'P$ son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

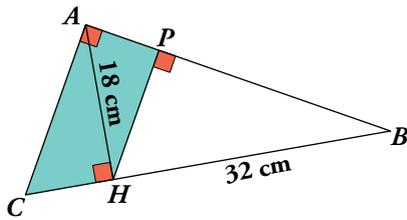


$$\frac{5}{r} = \frac{17+r}{12} \rightarrow 60 = 17r + r^2 \rightarrow r^2 + 17r - 60 = 0$$

$$r = \frac{-17 \pm 23}{2} = \begin{cases} -20. \text{ No vale} \\ 3 \end{cases}$$

El radio de la circunferencia menor mide 3 cm.

42. En el triángulo ABC , rectángulo en A , conocemos $\overline{AH} = 18$ cm y $\overline{HB} = 32$ cm.



- Calcula \overline{CH} , \overline{AC} y \overline{AB} .
- Aplica el teorema del cateto en el triángulo rectángulo AHB para obtener \overline{AP} . Calcula \overline{PH} .
- Halla el área y el perímetro del trapecio $APHC$.

a) Por el teorema de la altura:

$$\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB} \rightarrow 18^2 = \overline{CH} \cdot 32 \rightarrow \overline{CH} = 10,125 \text{ cm}$$

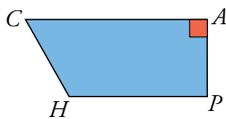
$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{18^2 + 10,125^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \overline{AC} \approx 20,65 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{18^2 + 32^2} \rightarrow \overline{AB} \approx 36,72 \text{ cm}$$

b) $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}} = \frac{18^2}{36,71} \approx 8,83$ cm

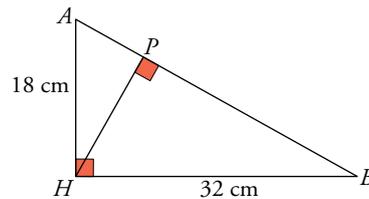
$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{18^2 - 8,83^2} \rightarrow \overline{HP} \approx 15,69 \text{ cm}$$

c)



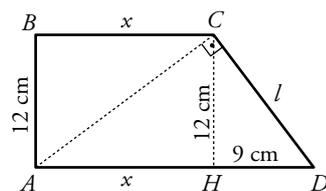
$$\text{Perímetro (APHC)} = \overline{CH} + \overline{HP} + \overline{PA} + \overline{AC} = 55,295 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Área (APHC)} &= \frac{\overline{PH} + \overline{AC}}{2} \cdot \overline{AP} = \\ &= \frac{15,69 + 20,65}{2} \cdot 8,83 \approx 160,44 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



43. En un trapecio rectángulo, la diagonal menor es perpendicular al lado oblicuo, la altura mide 12 cm y la diferencia entre las bases es de 9 cm.

Calcula el perímetro y el área del trapecio.



En el triángulo ACD :

$$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = 16 \text{ cm} \rightarrow \overline{AD} = 9 + 16 = 25 \text{ cm}$$

En el triángulo CHD :

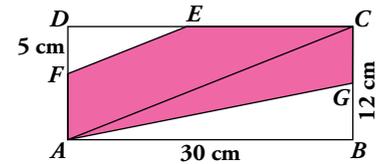
$$l^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow l = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro del trapecio: } 12 + 16 + 15 + 25 = 68 \text{ cm}$$

$$\text{Área del trapecio: } \frac{16 + 25}{2} \cdot 12 = 246 \text{ cm}^2$$

44.  En el rectángulo de la figura, EF es paralelo a AC , y G es el punto medio de BC .

Si $\overline{DF} = 5$ cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono $FECGA$?



$$\overline{AC}^2 = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32,31 \text{ cm}$$

Los triángulos FDE y ADC son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32,31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13,46 \text{ cm}$$

En el triángulo FDE , $\overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 - \overline{DF}^2 = 13,46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12,5$ cm

$$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12,5 = 17,5 \text{ cm}$$

$$\overline{CG} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{AG}^2 = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30,59 \text{ cm}$$

$$\overline{AF} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{Área del triángulo } FDE = \frac{12,5 \cdot 5}{2} = 31,25 \text{ cm}^2$$

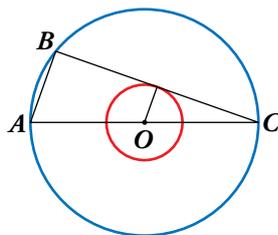
$$\text{Área del triángulo } ABG = \frac{30 \cdot 6}{2} = 90 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del pentágono} = 30 \cdot 12 - 31,25 - 90 = 238,75 \text{ cm}^2$$

Perímetro del pentágono:

$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} = 13,46 + 17,5 + 6 + 30,59 + 7 = 74,55 \text{ cm}$$

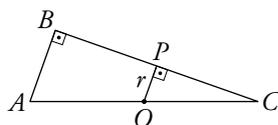
45.  En estas dos circunferencias concéntricas, el radio de la mayor es el triple que el de la menor.



Hemos trazado el diámetro AC y la cuerda BC , que es tangente a la circunferencia interior.

Si $\overline{AB} = 10$ cm, ¿cuánto miden los radios de cada circunferencia?

Los triángulos ABC y OPC son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

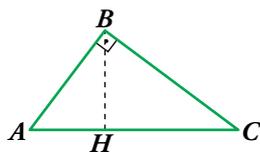


$$\text{Si } \overline{OP} = r \rightarrow \overline{OC} = 3r \rightarrow \overline{AC} = 6r$$

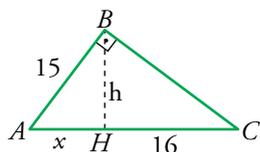
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \rightarrow \frac{10}{r} = \frac{6r}{3r} \rightarrow 10 = 2r \rightarrow r = 5$$

Los radios miden 5 cm y 15 cm.

46. En el triángulo rectángulo ABC , hemos trazado la altura sobre la hipotenusa BH .



Halla el área del triángulo en el que conocemos $\overline{AB} = 15$ cm y $\overline{HC} = 16$ cm.



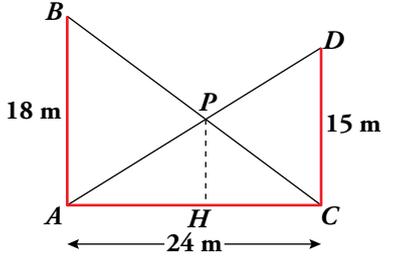
$$\left. \begin{array}{l} h^2 + x^2 = 15^2 \\ h^2 = 16 \cdot x \end{array} \right\} 16x + x^2 = 225 \rightarrow x^2 + 16x - 225 = 0 \rightarrow$$

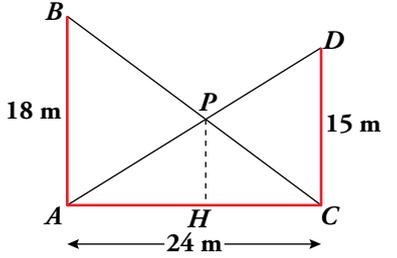
$$\rightarrow x = \frac{-16 \pm 34}{2} = \begin{cases} -25. \text{ No vale} \\ 9 \end{cases}$$

$$h^2 = 16 \cdot 9 \rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

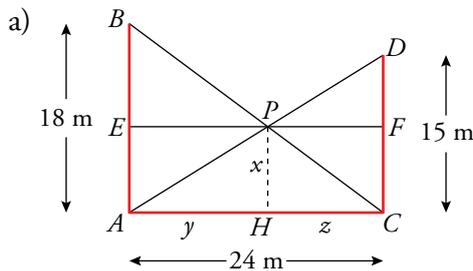
Problemas “+”

47.  AB y CD son dos edificios de 18 m y 15 m, respectivamente, y que distan entre sí 24 m. Desde el punto de corte, P , de las rectas AD y CB , se traza una perpendicular a AC . H es el pie de esa perpendicular.



a) Calcula \overline{PH} .

b) Demuestra que la longitud de PH depende de la altura de los edificios y no de su separación.



Trazamos el segmento EF paralelo a AC y que pasa por P .

Los triángulos \widehat{BEP} y \widehat{PHC} son semejantes porque son rectángulos y $\widehat{BPE} = \widehat{PCH}$. Por una razón análoga también lo son \widehat{DPF} y \widehat{PAH} .

Tenemos, por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{18-x}{x} &= \frac{y}{z} \\ \frac{15-x}{x} &= \frac{z}{y} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{18-x}{x} = \frac{x}{15-x} \rightarrow (18-x)(15-x) = x^2 \rightarrow$$

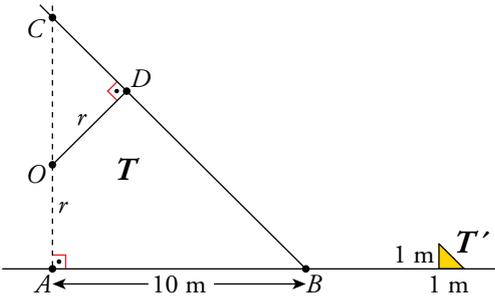
$$\rightarrow 270 - 18x - 15x + x^2 = x^2 \rightarrow x = \frac{270}{33} = 8,18 \text{ m}$$

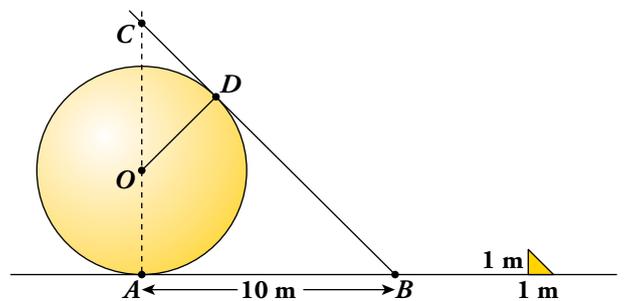
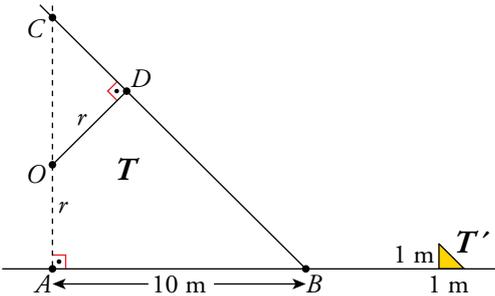
b) Hemos visto que la ecuación de la que hemos obtenido \overline{PH} es:

$$\frac{h-x}{x} = \frac{x}{h'-x}$$

donde h y h' son las alturas de los edificios.

Esta ecuación no depende de y ni de z , los parámetros de los que depende la separación de los edificios.

48.  Una esfera apoyada en el suelo proyecta una sombra que llega hasta 10 m del punto donde la esfera toca el suelo. En ese momento, un poste vertical de 1 m de alto produce una sombra de 1 m. Calcula el radio de la esfera.



Los triángulos T y T' son semejantes.

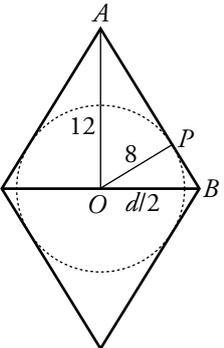
$$\overline{AC} = \overline{AB} = 10 \text{ m}$$

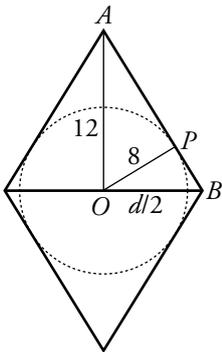
$$\overline{CB} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Por la semejanza de OCD y ABC , tenemos:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} \rightarrow \frac{r}{10} = \frac{10-r}{10\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}r = 10-r \rightarrow$$

$$\rightarrow r(\sqrt{2} + 1) = 10 \rightarrow r = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} = 10(\sqrt{2} - 1) \approx 4,14 \text{ cm}$$

49.  Una de las diagonales de un rombo mide 24 cm y el radio del círculo inscrito en dicho rombo es 8 cm. Calcula el perímetro y el área del rombo.



En el triángulo rectángulo OAP :

$$\overline{AP}^2 = 12^2 - 8^2 \rightarrow \overline{AP} = \sqrt{80} \approx 8,94 \text{ cm}$$

En el triángulo rectángulo OAB :

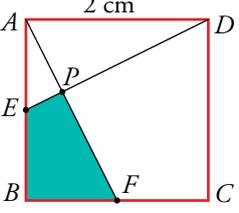
$$8^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB} \rightarrow \overline{PB} = \frac{64}{8,94} \approx 7,16 \text{ cm}$$

Lado del rombo: $8,94 + 7,16 = 16,1 \text{ cm}$

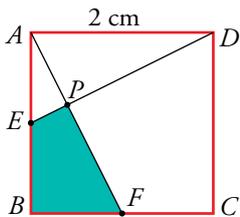
Perímetro del rombo: $4 \cdot 16,1 = 64,4 \text{ cm}$

Diagonal: $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 16,1^2 - 12^2 \rightarrow \frac{d}{2} \approx 10,73 \rightarrow d \approx 21,46 \text{ cm}$

Área: $\frac{24 \cdot 21,46}{2} = 257,52 \text{ cm}^2$

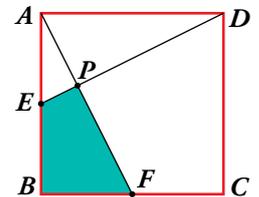
50.  En el cuadrado de la figura, E es el punto medio del lado AB , y F , el punto medio de BC .

Si el lado del cuadrado mide 2 cm, ¿cuál es el área del cuadrilátero $EPFB$?



Calcularemos el área de $EPFB$ como el área del triángulo ABF menos el área del triángulo AEP .

$$\overline{ED} = \overline{AF} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$



Los triángulos ABF y AEP son semejantes porque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} \text{ es común.} \\ \widehat{AEP} = \widehat{AFB} \text{ por la igualdad de los triángulos } ADE \text{ y } AFB. \end{array} \right.$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{BF}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{EP}}{1} \rightarrow \overline{EP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{AP}}{2} \rightarrow \overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{EPFB} = A_{ABF} - A_{APE} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$$

Reflexiona sobre la teoría

51.  ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

- a) Dos triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa son semejantes.
 - b) Todos los pentágonos regulares son semejantes.
 - c) Si los lados de un triángulo son a , b , c ; y los de otro, $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$, no son semejantes.
 - d) Las pirámides cuadrangulares son todas semejantes entre sí.
 - e) Una escala 100:1 significa que 1 cm del dibujo corresponde a 1 m en la realidad.
- a) Falso. Cualquier triángulo inscrito en una circunferencia y que abarque un ángulo llano es rectángulo, pero no todos son semejantes.
- b) Verdadero. Todos los polinomios regulares con el mismo número de lados tienen sus ángulos iguales y los lados proporcionales.
- c) Falso. Por ejemplo, si el triángulo es equilátero ($a = b = c$), entonces $a + 1 = b + 1 = c + 1$ y los triángulos son semejantes.
- d) Falso. Las bases serán semejantes pero para que lo sean las pirámides, debería coincidir el cociente entre el lado de la base y la altura, cosa que no necesariamente ocurre.
- e) Falso. Una escala 100:1 es de ampliación, es decir, a 1 cm de la realidad le corresponde 1 m del dibujo.

52.  Justifica en qué casos podemos asegurar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes:

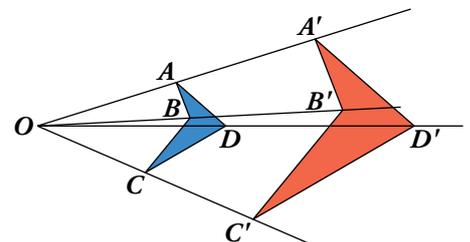
- a) $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'}$, $\hat{C} = \hat{C}'$
- b) $\frac{\overline{AC}}{A'C'} = \frac{\overline{AB}}{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$
- c) $\frac{\overline{AB}}{A'B'} \neq \frac{\overline{BC}}{B'C'}$, $\hat{B} = \hat{B}'$
- d) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$

En b), porque tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.

En d), porque tienen los tres ángulos iguales.

53.  Se llama homotecia de centro O y razón k a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro P' tal que O , P y P' están alineados y $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = k$.

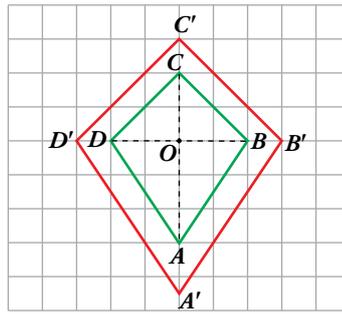
Justifica si las figuras azul y roja son homotéticas y en caso afirmativo di cuál es el centro y la razón.



Sí se trata de una homotecia de centro O y $k = 2$, puesto que:

- O , A , A' están alineados.
- O , B , B' están alineados.
- O , C , C' están alineados.
- O , D , D' están alineados.
- $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = 2$

54. Hemos aplicado una homotecia al cuadrilátero $ABCD$ para obtener el cuadrilátero $A'B'C'D'$.

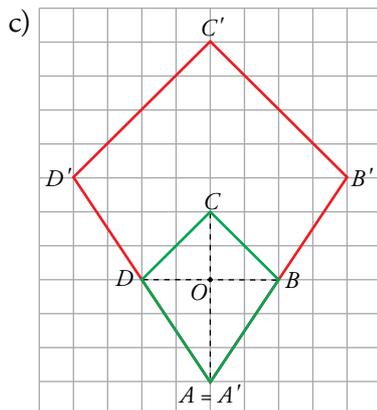


- ¿Cuál es el centro y cuál es la razón?
- Justifica que $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son semejantes.
- Aplica a $ABCD$ una homotecia de centro A y razón 2.

a) El centro de la homotecia es O y la razón es $k = \frac{3}{2}$, puesto que:

- O, A, A' están alineados.
- O, B, B' están alineados.
- O, C, C' están alineados.
- O, D, D' están alineados.
- $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{3}{2}$

b) Las figuras son semejantes puesto que todos sus lados son proporcionales, según se ha visto en el apartado a). Además, los ángulos son iguales.



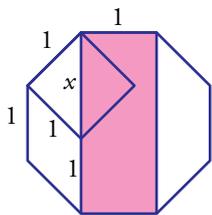
Aprende y reflexiona

El número de plata y el triángulo cordobés

- **Compruébalo:** $\frac{\sqrt{2}+1}{1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

Visto en el ejercicio 2b de la página 133.

- **Demuestra que el rectángulo coloreado sobre el octógono regular de la derecha es de plata.**

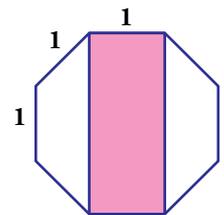


x es la diagonal de un cuadrado de radio 1.

Su medida es $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Los lados del rectángulo miden, por tanto, 1 y $1 + \sqrt{2}$.

La relación entre ellos es $\frac{1 + \sqrt{2}}{1} = 1 + \sqrt{2}$, número de plata.



- **Prueba que la relación entre los lados del triángulo cordobés (radio y lado del octógono regular) es:**

$$\frac{r}{1} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 1,306562964 \text{ (número cordobés)}$$

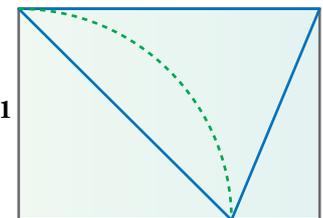
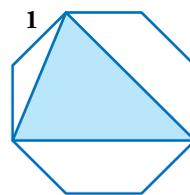
El radio del octógono es la mitad de la diagonal del rectángulo anterior:

$$d = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

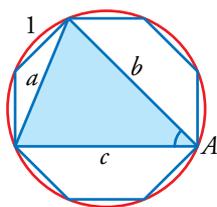
$$r = \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{2(2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{4 - 2}{2(2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{1}{2 - \sqrt{2}}} = 1,306562964$$

- **Demostrar que estos dos triángulos son cordobeses es fácil (45° e isósceles). Otra cosa es obtener sus dimensiones a partir del lado 1 en cada figura y probar que su cociente es el número cordobés.**

Intenta hacer ambas cosas en cada una de las dos figuras.



- Triángulo construido en el octógono:



Por construcción, $b = c$ y $a \neq b$.

El triángulo es isósceles.

El ángulo \hat{A} es un ángulo inscrito en la circunferencia y abarca un ángulo de $\frac{2}{8}$ de $360^\circ = 90^\circ$.

Por tanto, $\hat{A} = 45^\circ$.

El triángulo es, por tanto, cordobés.

Calculamos ahora la medida de los lados del triángulo. En el ejercicio anterior vimos que el

radio del octógono es $r = \sqrt{\frac{1}{2 - \sqrt{2}}}$.

El lado a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con dos catetos de medida r . Por tanto:

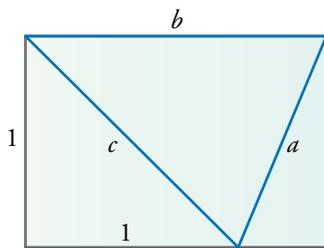
$$a = \sqrt{\frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

El lado b , según vimos, es $b = 1 + \sqrt{2}$.

Veamos que el cociente $\frac{b}{a}$ es el número de plata:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + 2 + 2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}, \text{ el número cordobés} \end{aligned}$$

- Triángulo construido en una hoja A-4:



Los lados de una hoja A-4 están en la relación $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Es decir, $b = \sqrt{2}$.

Calculamos el lado c aplicando el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Como $b = c \neq a$, el triángulo es isósceles.

El lado c es la diagonal de un cuadrado, luego el ángulo menor del triángulo es de 45° .

El triángulo construido es cordobés.

Nos falta calcular la medida del lado a , que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y $\sqrt{2} - 1$:

$$a = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{1 + 2 + 1 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$$

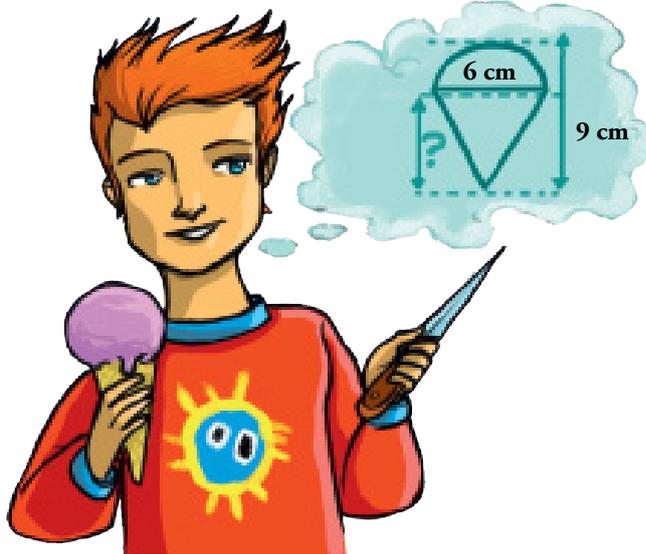
Comprobamos que la relación entre los lados es el número cordobés:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(2 - \sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Entrénate resolviendo problemas

- Roberto y Carmina van a compartir un helado.

¿A qué altura deben cortar el cucurucho para que las dos mitades sean iguales?



Hallamos primero el volumen del cucurucho entero:

Volumen de la media esfera:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \right] = \frac{36\pi}{2} = 18\pi \text{ cm}^3$$

Volumen del cono: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot 3^2 \cdot 6] = 18\pi \text{ cm}^3$

Luego, simplemente, habría que cortar a 6 cm de altura; es decir, el cono (cucurucho) para uno y la media esfera para el otro.

- Para preparar una empanada de 15 pulgadas de diámetro y 1 pulgada de grosor, se necesitan 18 onzas de masa. ¿Cuántas onzas de masa se necesitarán para una empanada de pulgada y media de grosor y 25 pulgadas de diámetro?

El volumen de la primera empanada es, en pulgadas cúbicas, $\pi \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 \cdot 1$, y para prepararla se necesitan 18 onzas.

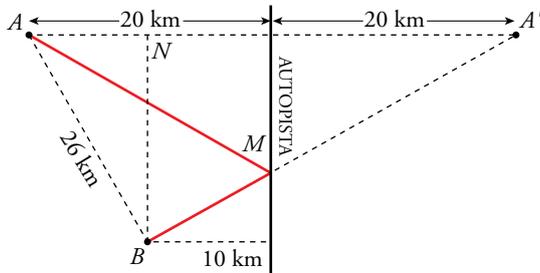
Para la segunda empanada se necesitarán este número de onzas:

$$18 \cdot \left(\frac{25}{15}\right)^2 \cdot \frac{1,5}{1} = 18 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{18 \cdot 25 \cdot 3}{3^2 \cdot 2} = 75 \text{ onzas}$$

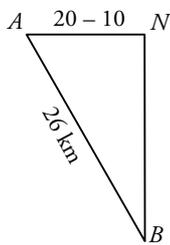
- Dos localidades A y B se encuentran al mismo lado de una autopista recta, de la cual distan 20 km y 10 km, respectivamente.

Se desea construir una carretera lo más corta posible, que una ambas localidades en un punto de la autopista. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 26 km, halla la longitud de la carretera.

El dibujo nos ayuda a relacionar los datos con lo que se nos pregunta.



Observamos que el recorrido AMB tiene la misma longitud que $A'MB$. Y que este recorrido es mínimo cuando el punto M está alineado con A' y B . Por tanto:



$$\overline{BN} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AN}^2} = \sqrt{676 - 100} = 24 \text{ km}$$

La longitud de la carretera es:

$$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{BA'} = \sqrt{\overline{BN}^2 + \overline{NA}^2} = \sqrt{24^2 + (10 + 20)^2} = 38,42 \text{ km}$$

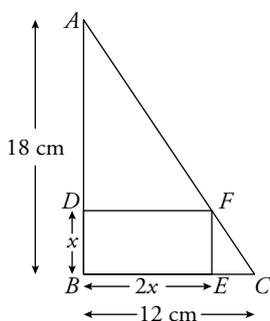
Autoevaluación

1. Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m². ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

$$\text{Perímetro} = \frac{850}{400} = 2,125 \text{ m} = 212,5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{37\,500}{400^2} = 0,234375 \text{ m}^2 = 2343,75 \text{ cm}^2$$

2. En un triángulo rectángulo, se inscribe un rectángulo de lados paralelos a los catetos en el que la base mide el doble que la altura. Si los catetos miden 12 cm y 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?



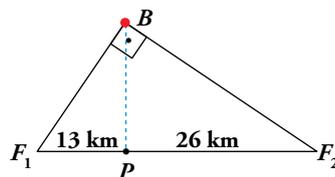
Los triángulos \widehat{ABC} y \widehat{FEC} son semejantes, por lo que podemos afirmar:

$$\begin{aligned} \frac{18}{x} &= \frac{12}{12 - 2x} \rightarrow 18(12 - 2x) = 12x \rightarrow \\ &\rightarrow 216 - 36x = 12x \rightarrow 216 = 48x \rightarrow x = 4,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

La altura es de 4,5 cm y la base, 9 cm.

3. Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F_1 y F_2 . Desde ese punto, la línea que lo une al puerto P es perpendicular a la costa.

Sabemos que $\overline{PF_1} = 13 \text{ km}$ y que $\overline{PF_2} = 26 \text{ km}$.



Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.

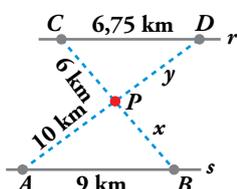
- Para calcular \overline{BP} , aplicamos el teorema de la altura:

$$\overline{BP}^2 = 13 \cdot 26 \rightarrow \overline{BP} = 18,38 \text{ km}$$

- $\overline{BF_1}^2 = 13 \cdot 26 + 13^2 \rightarrow \overline{BF_1} = 22,52 \text{ km}$

- $\overline{BF_2}^2 = 13 \cdot 26 + 26^2 \rightarrow \overline{BF_2} = 31,84 \text{ km}$

4. Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s . Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D . Con los datos de la figura, calcula x e y .

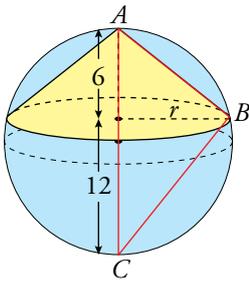


Los triángulos CDP y APB son semejantes.

$$\frac{6}{x} = \frac{6,75}{9} \rightarrow x = 8 \text{ km}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{6,75}{9} \rightarrow y = 7,5 \text{ km}$$

5. En una esfera de diámetro 18 cm, se inscribe un cono cuya altura es 6 cm. ¿Cuánto medirá el radio de la base del cono?



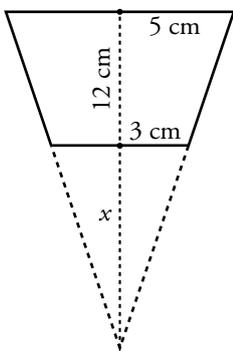
El triángulo \widehat{ABC} es rectángulo en \widehat{B} .

El radio del cono, r , es la altura sobre la hipotenusa de \widehat{ABC} .

Utilizando el teorema de la altura:

$$r^2 = 6 \cdot 12 \rightarrow r = \sqrt{72} \approx 8,49 \text{ cm}$$

6. Tenemos un vaso con forma de tronco de cono en el que los diámetros de las bases miden 10 cm y 6 cm y su altura es de 12 cm. Si lo llenamos, ¿cabe más de medio litro de agua, o menos?



$$\frac{12+x}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow 5x = 36 + 3x \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

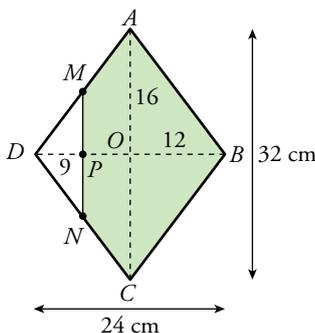
$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (12 + 18) = 250\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 54\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{VASO}} = 250\pi - 54\pi = 196\pi \approx 615,75 \text{ cm}^3$$

En el vaso cabe más de medio litro de agua.

7. Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC} = 32 \text{ cm}$ y $\overline{BD} = 24 \text{ cm}$. Por un punto P de la diagonal menor, tal que $\overline{PD} = 9 \text{ cm}$, se traza una paralela a la diagonal AC , que corta en M y N a los lados AD y CD . Calcula el área y el perímetro del pentágono $MABCN$.



Los triángulos AOD y MPD son semejantes. Por ello:

$$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \rightarrow \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \rightarrow \overline{MA} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro } MABCN = 2(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}) = 2(5 + 20 + 12) = 74 \text{ cm}$$

$$\text{Área pentágono} = \text{Área rombo} - \text{Área triángulo } MND =$$

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$

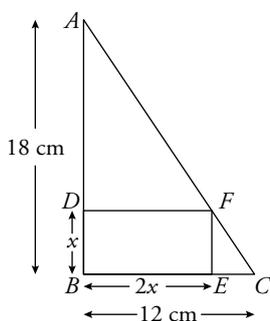
Autoevaluación

1. Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m². ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

$$\text{Perímetro} = \frac{850}{400} = 2,125 \text{ m} = 212,5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{37\,500}{400^2} = 0,234375 \text{ m}^2 = 2\,343,75 \text{ cm}^2$$

2. En un triángulo rectángulo, se inscribe un rectángulo de lados paralelos a los catetos en el que la base mide el doble que la altura. Si los catetos miden 12 cm y 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?



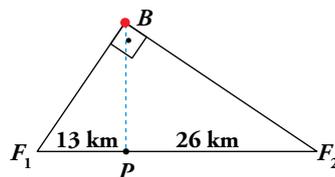
Los triángulos \widehat{ABC} y \widehat{FEC} son semejantes, por lo que podemos afirmar:

$$\begin{aligned} \frac{18}{x} &= \frac{12}{12 - 2x} \rightarrow 18(12 - 2x) = 12x \rightarrow \\ &\rightarrow 216 - 36x = 12x \rightarrow 216 = 48x \rightarrow x = 4,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

La altura es de 4,5 cm y la base, 9 cm.

3. Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F_1 y F_2 . Desde ese punto, la línea que lo une al puerto P es perpendicular a la costa.

Sabemos que $\overline{PF_1} = 13 \text{ km}$ y que $\overline{PF_2} = 26 \text{ km}$.



Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.

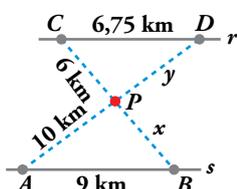
- Para calcular \overline{BP} , aplicamos el teorema de la altura:

$$\overline{BP}^2 = 13 \cdot 26 \rightarrow \overline{BP} = 18,38 \text{ km}$$

- $\overline{BF_1}^2 = 13 \cdot 26 + 13^2 \rightarrow \overline{BF_1} = 22,52 \text{ km}$

- $\overline{BF_2}^2 = 13 \cdot 26 + 26^2 \rightarrow \overline{BF_2} = 31,84 \text{ km}$

4. Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s . Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D . Con los datos de la figura, calcula x e y .

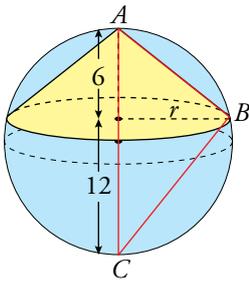


Los triángulos CDP y APB son semejantes.

$$\frac{6}{x} = \frac{6,75}{9} \rightarrow x = 8 \text{ km}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{6,75}{9} \rightarrow y = 7,5 \text{ km}$$

5. En una esfera de diámetro 18 cm, se inscribe un cono cuya altura es 6 cm. ¿Cuánto medirá el radio de la base del cono?



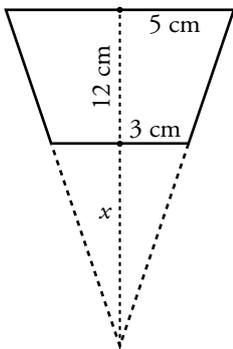
El triángulo \widehat{ABC} es rectángulo en \widehat{B} .

El radio del cono, r , es la altura sobre la hipotenusa de \widehat{ABC} .

Utilizando el teorema de la altura:

$$r^2 = 6 \cdot 12 \rightarrow r = \sqrt{72} \approx 8,49 \text{ cm}$$

6. Tenemos un vaso con forma de tronco de cono en el que los diámetros de las bases miden 10 cm y 6 cm y su altura es de 12 cm. Si lo llenamos, ¿cabe más de medio litro de agua, o menos?



$$\frac{12+x}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow 5x = 36 + 3x \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

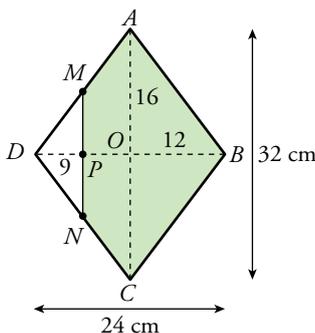
$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (12 + 18) = 250\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 54\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{VASO}} = 250\pi - 54\pi = 196\pi \approx 615,75 \text{ cm}^3$$

En el vaso cabe más de medio litro de agua.

7. Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC} = 32 \text{ cm}$ y $\overline{BD} = 24 \text{ cm}$. Por un punto P de la diagonal menor, tal que $\overline{PD} = 9 \text{ cm}$, se traza una paralela a la diagonal AC , que corta en M y N a los lados AD y CD . Calcula el área y el perímetro del pentágono $MABCN$.



Los triángulos AOD y MPD son semejantes. Por ello:

$$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \rightarrow \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \rightarrow \overline{MA} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro } MABCN = 2(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}) = 2(5 + 20 + 12) = 74 \text{ cm}$$

$$\text{Área pentágono} = \text{Área rombo} - \text{Área triángulo } MND =$$

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$