## Página 165

### Resuelve

**1.** **El día después de la PRIMERA EXCURSIÓN van andando al bosquecillo $B$, y de allí, en barca, a $M$.**

**Describe este último itinerario con vectores, $\overrightarrow{OB}$ + …, y con coordenadas.**

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} \;\rightarrow\; (-7, -3) + (12, 12) = (5, 9)$

**2.** **En la SEGUNDA EXCURSIÓN, los viajes por el río están descritos así: $\overrightarrow{OX} = (0, 4) + t(1, 1)$.**

**a) Señala a qué lugares se llega para $t = 4$, $t = -1$ y $t = 0$.**

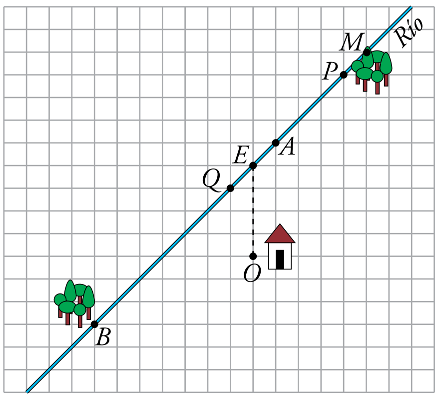
**b) ¿Qué valor hay que dar a $t$ para llegar al bosquecillo $B$?**

Viajes por el río: $\overrightarrow{OX} = (0,4) + t(1, 1)$

a) $t = 4 \;\rightarrow\; (0, 4) + (4,4) = (4,8) \;\rightarrow$ Se llega al punto $P$.

$t = -1 \;\rightarrow\; (0, 4) + (-1, -1) = (-1, 3) \;\rightarrow$ Se llega al punto $Q$.

$t = 0 \;\rightarrow\; (0, 4) + (0, 0) = (0, 4) \;\rightarrow$ Se llega al punto $E$.




b) $\overrightarrow{OB} = (-7, -3)$

$(0, 4) + t(1, 1) = (-7, -3)$

$(0, 4) + (t, t) = (-7, -3)$

$(t, 4 + t) = (-7, -3) \;\rightarrow\; \begin{cases} t = -7 \\ 4 + t = -3 \end{cases} \;\rightarrow\; t = -7$

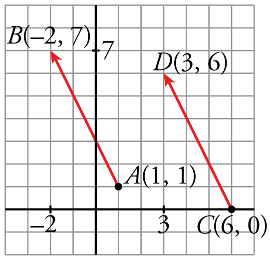
Para llegar al bosquecillo $B$ hay que dar a $t$ el valor $-7$.

# 1 Vectores en el plano

## Página 166

**1.** **Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales.**

**Comprueba que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.**




$\overrightarrow{AB} = (-2, 7) - (1, 1) = (-3, 6)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CD} = (3, 6) - (6, 0) = (-3, 6)$

$|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

**2.** **Tenemos tres puntos de coordenadas:**

$$A(3, -1),\ B(4, 6),\ C(0, 0)$$

**Halla las coordenadas del punto $D$ para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales.**

Llamamos $(a, b)$ a las coordenadas del punto $D$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (3, -1) = (1, 7)$

$\overrightarrow{CD} = (a, b) - (0, 0) = (a, b)$

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (1, 7) = (a, b)$

Las coordenadas del punto $D$ son $(1, 7)$.

# 2 Operaciones con vectores

## Página 167

**1. a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$ y $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.**

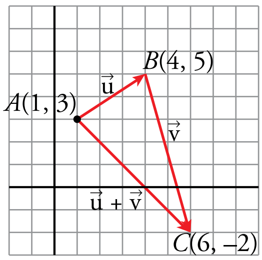
**b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.**

**c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.**

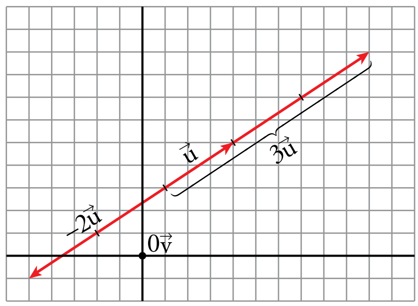
**d) Representa y halla las coordenadas del vector: $3\vec{u} - 4\vec{v}$**

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4, 5) - (1, 3) = (3, 2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (6, -2) - (4, 5) = (2, -7)$




b) $\left.\begin{array}{l}\vec{u}\,(3, 2)\\ \vec{v}\,(2, -7)\end{array}\right\}$ $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (2, -7) = (5, -5)$

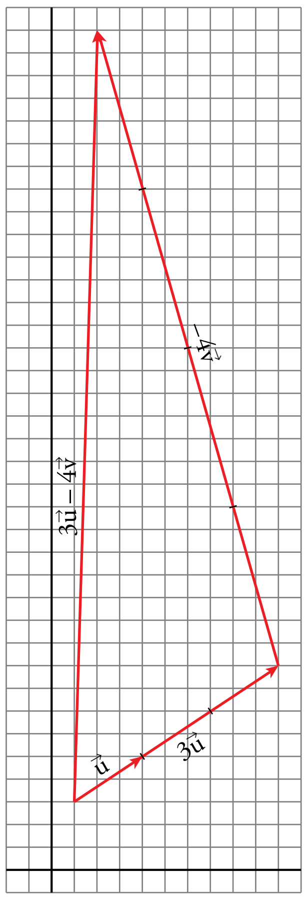



c) $3\vec{u} = 3\,(3, 2) = (9, 6)$

$-2\vec{u} = -2\,(3, 2) = (-6, -4)$

$0\vec{u} = (0, 0)$

d) $3\vec{u} - 4\vec{v} = 3\,(3, 2) - 4\,(2, -7) = (9, 6) - (8, -28) = (1, 34)$



## Página 168

**2. Comprueba si cada uno de los siguientes pares de vectores tienen o no la misma dirección:**

**a)** $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-3, 1)$ **b)** $\vec{u}(2, -4)$, $\vec{v}(1, 2)$

**c)** $\vec{u}(-2, 0)$, $\vec{v}(4, 0)$ **d)** $\vec{u}(5, 2)$, $\vec{v}(2{,}5;\ 1)$

**e)** $\vec{u}(-2, 6)$, $\vec{v}(-3, 1)$ **f)** $\vec{u}(0, -1)$, $\vec{v}(-2, 0)$

a) $\dfrac{3}{-3} = \dfrac{-1}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

b) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-4}{2} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

c) $\vec{v} = -2\vec{u} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

d) $\dfrac{5}{2,5} = \dfrac{2}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

e) $\dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{6}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

f) No existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = k\vec{u} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

**3. Dados los siguientes vectores:**

$$\vec{u}(-5, 8),\ \vec{v}(-41, -10),\ \vec{w}(3, 6)$$

**a) Halla las coordenadas de $3\vec{u} - 2\vec{v} + 10\vec{w}$.**

**b) Averigua el valor de $x$ e $y$ para que se cumpla:**

$$x\vec{u} + y\vec{w} = \vec{v}$$

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 10\vec{w} = 3(-5, 8) - 2(-41, -10) + 10(3, 6) =$

$$= (-15, 24) - (-82, -20) + (30, 60) = (97, 104)$$

b) $x\vec{u} + y\vec{w} = \vec{v}$

$x(-5, 8) + y(3, 6) = (-41, -10) \rightarrow (-5x, 8x) + (3y, 6y) = (-41, -10)$

$$\left.\begin{array}{r} -5x + 3y = -41 \\ 8x + 6y = -10 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 10x - 6y = 82 \\ 8x + 6y = -10 \\ \hline 18x \quad\quad = 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \cdot 4 + 6y = -10 \\ 6y = -42 \\ y = -7 \end{array}$$

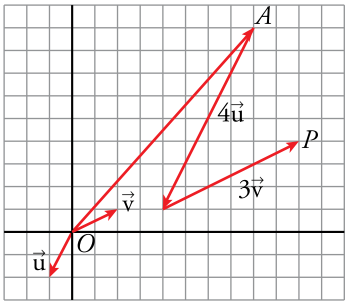
$$x = 4$$

Por tanto, $4\vec{u} - 7\vec{w} = \vec{v}$.

# 3 Vectores que representan puntos

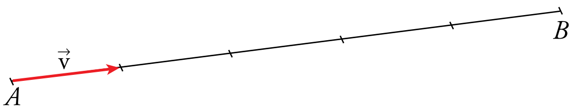
## Página 169

**1. Desde el punto $A(8, 9)$ nos movemos en la dirección de $\vec{u}(-1, -2)$ cuatro veces su longitud. Después, nos movemos el triple de $\vec{v}(2, 1)$. ¿A qué punto llegamos?**




$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 4\vec{u} + 3\vec{v} = (8, 9) + 4(-1, -2) + 3(2, 1) = (10, 4)$

**2. Dividimos el segmento de extremos $A(1, 2)$ y $B(16, 12)$ en cinco partes iguales. Halla las coordenadas de los cuatro puntos de separación.**



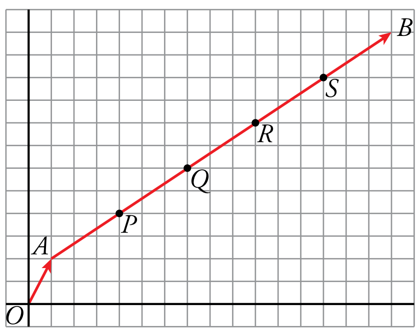

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (16, 12) - (1, 2) = (15, 10)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (1, 2) + (3, 2) = (4, 4)$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (4, 4) + (3, 2) = (7, 6)$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (7, 6) + (3, 2) = (10, 8)$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (10, 8) + (3, 2) = (13, 10)$




Las coordenadas de $P$ son (4, 4); las de $Q$, (7, 6); las de $R$, (10, 8), y las de $S$, (13, 10).

# 4 Punto medio de un segmento

## Página 170

**1. Halla las coordenadas del punto medio de cada segmento:**

**a)** $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$

**b)** $C(7, -3)$, $D(-5, 1)$

**c)** $E(1, 4)$, $F(7, 2)$

**d)** $G(-3, 5)$, $H(4, 0)$

a) $M\left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right) \rightarrow M(1, 3)$

b) $M\left(\dfrac{7+(-5)}{2}, \dfrac{-3+1}{2}\right) \rightarrow M(1, -1)$

c) $M\left(\dfrac{1+7}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right) \rightarrow M(4, 3)$

d) $M\left(\dfrac{-3+4}{2}, \dfrac{5+0}{2}\right) \rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

**2. Halla las coordenadas del punto simétrico de $A$ respecto de $P$ en los siguientes casos:**

**a)** $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$

**b)** $A(2, 4)$, $P(5, -1)$

a) Llamamos $A'(x, y)$ al punto simétrico de $A$ respecto de $P$. El punto $P$ será el punto medio del segmento de extremos $A$ y $A'$.

$$\left.\begin{array}{l} -7 = \dfrac{4+x}{2} \rightarrow -14 = 4 + x \rightarrow x = -18 \\ 2 = \dfrac{-1+y}{2} \rightarrow 4 = -1 + y \rightarrow y = 5 \end{array}\right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (-18, 5).$$

b) $A'(x, y)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = \dfrac{2+x}{2} \rightarrow 10 = 2 + x \rightarrow x = 8 \\ -1 = \dfrac{4+y}{2} \rightarrow -2 = 4 + y \rightarrow y = -6 \end{array}\right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (8, -6).$$

# 5 Puntos alineados

## Página 171

**1. Comprueba si los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS} = (5-2, -1-7) = (3, -8) \\ \overrightarrow{ST} = (15-5, -25+1) = (10, -24)\end{array}\right\} \frac{3}{10} \neq \frac{8}{24} \rightarrow \overrightarrow{RS} \text{ no es paralelo a } \overrightarrow{RT}$$

Los tres puntos, $R$, $S$ y $T$, no están alineados.

**2. Averigua el valor de $a$ para que los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $Q(a, -25)$ estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS} = (3, -8) \\ \overrightarrow{SQ} = (a-5, -24)\end{array}\right\}$$

Para que $R$, $S$ y $Q$ estén alineados, se ha de cumplir que:

$$\frac{3}{a-5} = \frac{-8}{-24} \rightarrow \frac{3}{a-5} = \frac{1}{3} \rightarrow a-5 = 9 \rightarrow \text{Luego, } a = 14.$$

**3. Averigua qué relación deben cumplir $x$ e $y$ para que $A(0, 1)$, $B(2, 5)$ y $P(x, y)$ estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (2-0, 5-1) = (2, 4) \\ \overrightarrow{AP} = (x-0, y-1) = (x, y-1)\end{array}\right\}$$

Para que $P$ esté alineado con $A$ y $B$:

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{y-1} \rightarrow 2(y-1) = 4x \rightarrow y-1 = 2x \rightarrow y = 2x+1$$

La relación buscada entre $x$ e $y$ es $y = 2x + 1$.

**4. Averigua el valor de $t$ para que los puntos $A(1, 2)$, $B(7, -11)$ y $C(t, 2t)$ estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (7-1, -11-2) = (6, -13) \\ \overrightarrow{AC} = (t-1, 2t-2)\end{array}\right\}$$

$A$, $B$ y $C$ estarán alineados si:

$$\frac{6}{t-1} = \frac{-13}{2t-2} \rightarrow 6(2t-2) = -13(t-1) \rightarrow 12t-12 = -13t+13 \rightarrow 25t = 25 \rightarrow t = 1$$

# 6 Ecuaciones de la recta

## Página 173

**1. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de las rectas que pasan por:**

**a)** $M(-2, 1)$, $N(4, 5)$

**b)** $P(0, 0)$, $Q(3, -2)$

**c)** $R(2, 5)$, $S(8, 5)$

**d)** $T(-2, 1)$, $U(-2, -2)$

a) $\left.\begin{matrix} M(-2, 1) \\ N(4, 5) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{MN}(6, 4) \rightarrow \vec{v}(3, 2)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (-2, 1) + t(3, 2)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando $y$ en la ecuación anterior:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

b) $\left.\begin{matrix} P(0, 0) \\ Q(3, -2) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(3, -2) \rightarrow \vec{v}(3, -2)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (0, 0) + t(3, -2)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 0 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{-2}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando $y$ en la ecuación anterior:

$$y = -\frac{2}{3}x$$

c) $\left.\begin{array}{l} R(2,5) \\ S(8,5) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{RS}(6,0) \rightarrow \vec{v}(1,0)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OR} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (2,\ 5) + t(1,\ 0)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = 5 + 0t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{0}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$$y = 5$$

d) $\left.\begin{array}{l} T(-2,1) \\ U(-2,-2) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{TU}(0,-3) \rightarrow \vec{v}(0,1)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OT} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (-2,\ 1) + t(0,\ 1)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = -2 + 0t \\ y = 1 + 1t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$$x = -2$$

# 7 Rectas. Paralelismo y perpendicularidad

## Página 174

**1. Halla la ecuación de la recta que pasa por:**

**a)** $A(1, 3)$, $B(5, 5)$

**b)** $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

a) Un vector dirección es $\overrightarrow{AB}(4, 2)$; otro vector dirección es $\vec{d}(2, 1)$.

La pendiente es: $m = \frac{1}{2}$

La ecuación es:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

b) $\overrightarrow{AB}(7, -8)$ es un vector dirección $\rightarrow m = \frac{-8}{7}$

La ecuación será:

$$y - 6 = \frac{-8}{7}(x - 1) \rightarrow y = \frac{-8}{7}x + \frac{50}{7}$$

**2. Halla la ecuación de la recta que pasa por (7, –5) y tiene por vector dirección (7, –4).**

$\vec{d}(7, -4) \rightarrow$ la pendiente es: $m = -\frac{4}{7}$

La ecuación es:

$$y + 5 = -\frac{4}{7}(x - 7) \rightarrow y = -\frac{4}{7}x - 1$$

**3. Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por (0, –3).**

La pendiente de la recta $5x - 6y + 14 = 0$ es el coeficiente de la $x$ cuando la $y$ está despejada:

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{14}{6} \rightarrow m = \frac{5}{6}$$

Por ser la recta pedida paralela a $5x - 6y + 14 = 0$, la pendiente es la misma: $m = \frac{5}{6}$

Así: $y = -3 + \frac{5}{6}x$

**4. Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por (2, 4).**

La recta $5y - 10 = 0$ es una recta paralela al eje $X$, luego $m = 0$.

La recta que pasa por (2, 4) y tiene pendiente $m = 0$ es $y = 4$.

## Página 175

**5. Da tres vectores perpendiculares a (–6, 1).**

Tres vectores perpendiculares a (–6, 1) son: (1, 6), (2, 12) y (3, 18).

**6. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.**

El vector (–7, 5) es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de la recta buscada:

$$m = -\frac{5}{7} \qquad y = -5 - \frac{5}{7}(x - 2) \;\rightarrow\; y = -\frac{5}{7}x - \frac{25}{7}$$

**7. La recta $r$ pasa por (3, 0), y la recta $s$, por (–5, 3). Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.**

**Halla sus ecuaciones.**

Pendiente de la recta $4x + 2y - 7 = 0$:

$$y = -2x + \frac{7}{2} \;\rightarrow\; m_1 = -2$$

Pendiente de $r$ = pendiente de $s$:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de $r$:

$$y = \frac{1}{2}(x - 3) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Ecuación de $s$:

$$y = 3 + \frac{1}{2}(x + 5) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$$

# 8 Rectas paralelas a los ejes coordenados

## Página 176

**1. Representa $r$ y $s$ y da tres vectores paralelos y tres perpendiculares a cada una de ellas:**

**$r$: $5x - 7 = 0$**

**$s$: $3 + 4y = 0$**

$r$: $5x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

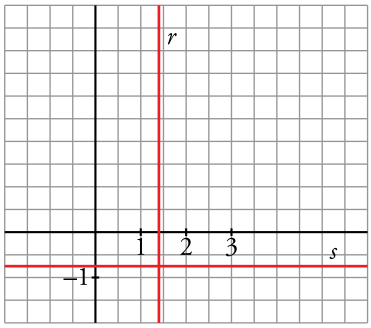
Vectores paralelos: (0, 1), (0, 2), (0, –2)

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0), (–2, 0)

$s$: $3 + 4y = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}$

Vectores paralelos: (1, 0), (–1, 0), (–2, 0)

Vectores perpendiculares: (0, 1), (0, –1), (0, –2)

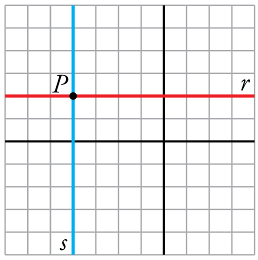



**2. Representa dos rectas que pasen por el punto (–4, 2), una paralela al eje $X$ y otra paralela al eje $Y$.**

$P(-4, 2)$

$r$: $y = 2 \rightarrow$ Recta paralela al eje $X$

$s$: $x = -4 \rightarrow$ Recta paralela al eje $Y$




**3. Las rectas $r$ y $s$ pasan por el punto (5, –3). La recta $r$ es paralela a $5y + 17 = 0$, y $s$ es perpendicular a ella. Representa $r$ y $s$ y da sus ecuaciones.**

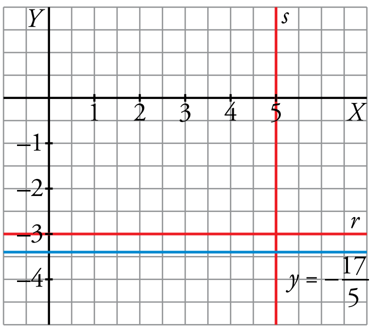
Representamos la recta $5y + 17 = 0 \rightarrow y = -\frac{17}{5}$ y a partir de ella, representamos $r$ y $s$.

- $r$ es una recta paralela a $y = -\frac{17}{5}$ que pasa por (5, –3).

  Su ecuación es $y = -3$.

- $s$ es una recta perpendicular a $y = -\frac{17}{5}$ (paralela al eje $Y$) que pasa por (5, –3).

  Su ecuación es $x = 5$.



**4. Halla la ecuación de la recta paralela al eje $X$ que corte a la recta $2x - 3y = 5$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

- La recta pedida, $r$, es paralela al eje de abscisas, luego su ecuación es de la forma $r: y = k$.
- $r$ corta a la recta $s: 2x - 3y = 5$ en el punto de abscisa $x = 1$ $\rightarrow$ el punto de corte es la solución del sistema.

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y = 5 \\ x = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow 2 - 3y = 5 \rightarrow y = -1 \rightarrow P(1, -1) \in r$$

- Tenemos, pues, que:

$$\left.\begin{aligned} &r: y = k \\ &P(1, -1) \in r \end{aligned}\right\} \rightarrow r: y = -1$$

# 9 Posiciones relativas de dos rectas

## Página 177

**1. Di la posición relativa de estos pares de rectas:**

**a)** $r: 8x + 2y - 14 = 0$
$s: 5x - y - 20 = 0$

**b)** $r: 3x - 2y - 14 = 0$
$s:$ **pasa por (1, –2) y por (10, 1).**

**c)** $r:$ **pasa por (–1, 4) y (7, –2).**
$s: 3x + 4y = 0$

**d)** $r:$ **pasa por (2, –1) y (8, 2).**
$s:$ **su pendiente es 1/2 y pasa por (0, –2).**

a) $\left.\begin{array}{l} r: 8x + 2y - 14 = 0 \\ s: 5x - y - 20 = 0 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{r} 4x + y - 7 = 0 \\ 5x - y - 20 = 0 \\ \hline 9x \quad - 27 = 0 \end{array} \to x = 3$

$4 \cdot 3 + y - 7 = 0 \to y = -5$

Las rectas $r$ y $s$ se cortan en el punto (3, –5).

b) Veamos cuál es la ecuación de $s$:

Un vector dirección de $s$ es (9, 3) // (3, 1). Su pendiente es, por tanto, $m = \frac{1}{3}$.

$s: y = -2 + \frac{1}{3}(x - 1) \to y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3} \to x - 3y - 7 = 0$

Resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} r: 3x - 2y - 14 = 0 \\ s: x - 3y - 7 = 0 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{r} 3x - 2y - 14 = 0 \\ -3x + 9y + 21 = 0 \\ \hline 7y + 7 = 0 \end{array} \to y = -1$

$3x - 2 \cdot (-1) - 14 = 0 \to 3x - 12 = 0 \to x = 4$

Las rectas $r$ y $s$ se cortan en el punto (4, –1).

c) Buscamos la ecuación de $r$:

Un vector dirección es (8, –6) // (4, –3). Su pendiente es, por tanto, $m = -\frac{3}{4}$.

$r: y = 4 - \frac{3}{4}(x + 1) \to y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4} \to 3x + 4y - 13 = 0$

Resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} r: 3x + 4y - 13 = 0 \\ s: 3x + 4y \quad = 0 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{r} 3x + 4y - 13 = 0 \\ -3x - 4y \quad = 0 \\ \hline -13 = 0 \end{array} \to \text{Contradicción.}$

Las rectas $r$ y $s$ no tienen ningún punto en común. Son paralelas, ya que tienen la misma pendiente, –3/4, pero distinta ordenada en el origen, 13/4 y 0.

d) Ecuación de $r$:

Un vector dirección es (6, 3) // (2, 1). Su pendiente es $m = \frac{1}{2}$.

$r: y = -1 + \frac{1}{2}(x - 2) \to y = \frac{1}{2}x - 2 \to x - 2y - 4 = 0$

Ecuación de $s$:

$y = \frac{1}{2}x - 2 \to 2y = x - 4 \to x - 2y - 4 = 0 \to r$ y $s$ son la misma recta.

# 10 Distancia entre dos puntos

## Página 178

**1. Halla la distancia entre $A$ y $B$.**

**a)** $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ **b)** $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

**c)** $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ **d)** $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

a) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6+7)^2 + (4-4)^2} = 13$

b) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-3)^2 + (9-4)^2} = 5$

c) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+5)^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

d) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-4)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{109} \approx 10,4$

**2. Aplica la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de vértices $A(-5, -2)$, $B(7, 3)$, $C(4, 7)$.**

Calculamos primero la medida de cada lado:

$a = dist\ (B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$b = dist\ (A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}$

$c = dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

Semiperímetro del triángulo: $p = \dfrac{5 + 9\sqrt{2} + 13}{2} = 9 + \dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

Área $= \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} =$

$$= \sqrt{\left(9 + \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(4 + \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\sqrt{2} - 4\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(81 - \frac{81}{4} \cdot 2\right) \cdot \left(\frac{81}{4} \cdot 2 - 16\right)} = \sqrt{\left(81 - \frac{81}{2}\right) \cdot \left(\frac{81}{2} - 16\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{81}{2} \cdot \frac{49}{2}} = \frac{9 \cdot 7}{2} = 31,5\ \text{u}^2$$

**3. Calcula el valor de $c$ para que el punto $A(10, c)$ diste 13 unidades del punto $B(-2, 5)$.**

$dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-10)^2 + (5-c)^2} = 13 \rightarrow 144 + 25 + c^2 - 10c = 169$

$c^2 - 10c = 0 \begin{cases} c = 0 \\ c = 10 \end{cases}$ Hay dos soluciones: $A(10, 0)$, $A'(10, 10)$

**4. Calcula el valor de $a$ para que el punto $P(a, 7)$ esté a 10 unidades de distancia de $Q(5, 1)$.**

$dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(5-a)^2 + (-6)^2} = 10 \rightarrow 25 + a^2 - 10a + 36 = 100 \rightarrow a^2 - 10a - 39 = 0$

$a = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{2} = \dfrac{10 \pm 16}{2} = \begin{cases} 13 \\ -3 \end{cases}$ Hay dos soluciones: $P(13, 7)$, $P'(-3, 7)$

# 11 Ecuación de una circunferencia

## Página 179

**1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la circunferencia:**

**a)** $C(7, 1)$, $r = 5$

**b)** $C(-2, 4)$, $r = 12$

a) $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25 \to x^2 + y^2 - 14x - 2y + 25 = 0$

b) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 144 \to x^2 + y^2 + 4x - 8y - 124 = 0$

**2. Di el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

**a)** $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$

**b)** $(x+2)^2 + y^2 = 1$

a) Centro (3, 5). Radio, 5.

b) Centro (–2, 0). Radio, 1.

**3. Una circunferencia de radio $r = \sqrt{45}$ tiene su centro en el punto $C(4, 9)$. ¿Pertenecen los puntos $A(-2, 6)$ y $B(8, 2)$ a esta circunferencia?**

Ecuación de la circunferencia: $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 45$

$A(-2, 6) \to (-6)^2 + (-3)^2 = 36 + 9 = 45$. Sí pertenece.

$B(8, 2) \to 4^2 + (-7)^2 = 16 + 49 = 65 \neq 45$. No pertenece.

**4. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(4, -2)$ que pasa por $P(5, 7)$.**

El radio de la circunferencia es la distancia entre $C$ y $P$.

Radio $= \sqrt{(5-4)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{82}$

Ecuación de la circunferencia:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 82 \to x^2 + y^2 - 8x + 4y - 62 = 0$$

## Página 180

**Hazlo tú. En el triángulo cuyos vértices son $A(0, 4)$, $B(3, 0)$ y $C(-3, -2)$, halla las ecuaciones de la mediatriz del lado $BC$ y de la altura que parte de $A$.**

MEDIATRIZ DEL LADO $BC$:

La mediatriz $r$ es perpendicular a $BC$ en su punto medio.

- Punto medio de $BC$:

$$M\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) \to M(0, -1)$$

- $\overrightarrow{BC}(-6, -2)$:

  La pendiente de $BC$ es $m = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$.

  La pendiente de la mediatriz $r$ es $m' = -3$.

- La mediatriz $r$ del lado $BC$ es, por tanto, la recta que pasa por el punto $M(0, -1)$ y cuya pendiente es $m' = -3$:

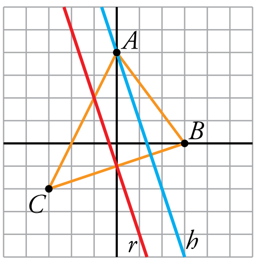
$$r: y = -1 - 3(x - 0) \to r: y = -3x - 1 \to r: 3x + y + 1 = 0$$

ALTURA QUE PARTE DE $A$:

La altura h pasa por $A$ y es perpendicular al lado $BC$.

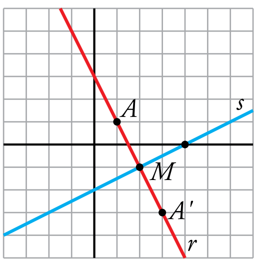
- Como h es perpendicular al lado $BC$, sabemos por el apartado anterior que su pendiente es $m = -3$.

- $$\left.\begin{array}{l} A(0, 4) \in \text{h} \\ \text{Pendiente } m = -3 \end{array}\right\} \to \text{h}: y = 4 - 3(x - 0) \to \text{h}: y = -3x + 4 \to \text{h}: 3x + y - 4 = 0$$




**Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(1, 1)$ respecto de la recta $s: x - 2y - 4 = 0$.**

El punto simétrico de $A$ respecto a $s$, $A'$, es el punto simétrico de $A$ respecto de un punto $M$, que es el punto de corte de $s$ con la recta perpendicular a $s$ que pasa por $A$.



- Determinamos, en primer lugar, la ecuación de la recta $r$, perpendicular a $s$ que pasa por $A$.

$$s: x-2y-4=0 \rightarrow s: y=\frac{1}{2}x-2 \rightarrow m_s=\frac{1}{2} \rightarrow m_r=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1)\in r \\ m_r=-2 \end{array}\right\} \rightarrow r: y=1-2(x-1) \rightarrow r: y=-2x+3 \rightarrow r: 2x+y-3=0$$

- Hallamos el punto de corte de $s$ y $r$:

$$\left.\begin{array}{l} s: x-2y-4=0 \\ r: 2x+y-3=0 \end{array}\right\} \rightarrow M(2,-1)$$

- El punto $M$ es el punto medio entre $A(1, 1)$ y $A'(x, y)$, siendo $A'$ el punto simétrico de $A$ respecto a $s$:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1) \\ A'(x, y) \\ M(2,-1) \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right)=(2,-1) \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

Por tanto, el punto buscado es $A'(3,-3)$.

**Hazlo tú. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el mismo centro que:**

$$\boldsymbol{x^2+y^2+6x-4y-3=0}$$

**y que pasa por el punto (1, –2).**

Tenemos que hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el mismo centro que $c: x^2+y^2+6x-4y-3=0$ y que pasa por el punto $P(1,-2)$.

- Para hallar el centro de $c$ debemos expresarla de la forma:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$c: x^2+y^2+6x-4y-3=0 \rightarrow c: x^2+6x+\mathbf{9}+y^2-4y+\mathbf{4}=3+\mathbf{9}+\mathbf{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow c: (x+3)^2+(y-2)^2=16$$

El centro y el radio de $c$ son:

Centro $\rightarrow C(-3, 2)$; Radio $\rightarrow r=4$

La circunferencia que buscamos, $c'$, tiene centro $C(-3, 2)$.

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Centro de } c' \rightarrow C(-3,2) \\ P(1,-2)\in c' \end{array}\right\}$$

El radio de $c'$ es $r' = dist\,(P, C) \rightarrow r'=|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}$

- La circunferencia que buscamos es:

$$c': (x+3)^2+(y-2)^2=32$$

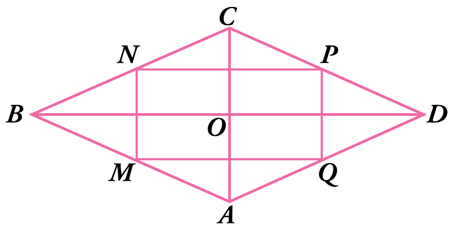
# Ejercicios y problemas

## Página 181

# Practica

## Vectores y puntos

**1.** **El cuadrilátero *ABCD* es un rombo, y *M*, *N*, *P* y *Q*, los puntos medios de sus lados.**




**Indica si los siguientes pares de vectores tienen el mismo módulo y/o la misma dirección y sentido:**

**a)** $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{CD}$ **b)** $\overrightarrow{BN}$ **y** $\overrightarrow{AQ}$

**c)** $\overrightarrow{NC}$ **y** $\overrightarrow{CP}$ **d)** $\overrightarrow{AM}$ **y** $\overrightarrow{DC}$

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo módulo y la misma dirección pero sentido contrario.

b) $\overrightarrow{BN}$ y $\overrightarrow{AQ}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

c) $\overrightarrow{NC}$ y $\overrightarrow{CP}$ tienen el mismo módulo pero distinta dirección y sentido.

d) $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido pero distinto módulo.

**2.** **Observa la figura del ejercicio anterior y sustituye en tu cuaderno los puntos suspensivos por un número para que los vectores sean iguales.**

**a)** $\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{AO}$ **b)** $\overrightarrow{OC} = \dots \overrightarrow{OA}$

**c)** $\overrightarrow{AQ} = \dots \overrightarrow{CB}$ **d)** $\overrightarrow{AD} = \dots \overrightarrow{NB}$

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$

c) $\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{NB}$

**3.** **Completa en tu cuaderno, con las letras que faltan, cada una de las siguientes sumas de vectores de la figura del ejercicio 1:**

**a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A\dots}$ **b)** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\dots}$

**c)** $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{\dots}$ **d)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\dots}$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

c) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$ d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$

**4.** **Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(5, 1)$ y $D(-3, 2)$, halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$. Calcula, también, sus módulos.**

$\overrightarrow{AB} = (4, 0) - (-2, 0) = (6, 0)$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$

$\overrightarrow{BC} = (5, 1) - (4, 0) = (1, 1)$ y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{CD} = (-3, 2) - (5, 1) = (-8, 1)$ y $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-8)^2 + 1^2} = \sqrt{65}$

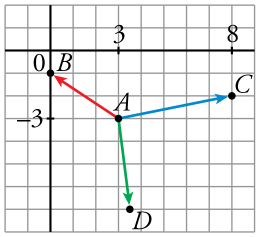
$\overrightarrow{AD} = (-3, 2) - (-2, 0) = (-1, 2)$ y $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

**5.** **Con origen en el punto $A(3, -3)$, dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$, $\overrightarrow{AC}(5, 1)$ y $\overrightarrow{AD}(1/2, -4)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de los puntos $B$, $C$ y $D$?**

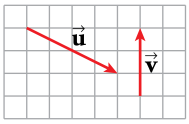
$\overrightarrow{AB} = B - A \rightarrow B = (-3, 2) + (3, -3) = (0, -1)$

$C = (5, 1) + (3, -3) = (8, -2)$

$D = \left(\frac{1}{2}, -4\right) + (3, -3) = \left(\frac{7}{2}, -7\right)$




**6.** **a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

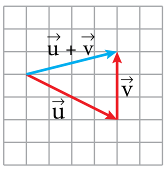


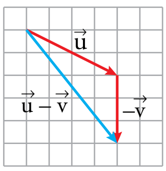

**b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $-\vec{u} + \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.**

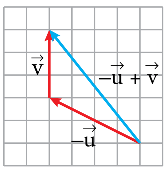
**c) Halla el módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.**

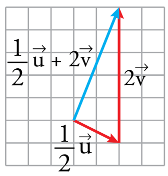
a) $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(0, 3)$

b) $\vec{u} + \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u} - \vec{v}$ $\qquad$ $-\vec{u} + \vec{v}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$




$\vec{u} + \vec{v} = (4, -2) + (0, 3) = (4, 1)$

$\vec{u} - \vec{v} = (4, -2) - (0, 3) = (4, -5)$

$-\vec{u} + \vec{v} = (-4, 2) + (0, 3) = (-4, 5)$

$\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v} = (2, -1) + (0, 6) = (2, 5)$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = 17$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

**7.** **Comprueba, sin representarlos, si los siguientes pares de vectores tienen la misma dirección:**

**a)** $\vec{u}(6, -3)$, $\vec{v}(-2, 1)$

**b)** $\vec{u}(5, 3)$, $\vec{v}(4, 2)$

**c)** $\vec{u}(10, 1)$, $\vec{v}(5, 2)$

**d)** $\vec{u}(-4, 0)$, $\vec{v}(9, 0)$

a) $\frac{6}{-2} = \frac{-3}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

b) $\frac{5}{4} \neq \frac{3}{2} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

c) $\frac{10}{5} \neq \frac{1}{2} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

d) $\vec{u} = -\frac{4}{9}\vec{v} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

**8.** **Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$, $\vec{v}(-2, 5)$ y $\vec{w}(-1, -3)$, efectúa estas operaciones:**

**a)** $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

**b)** $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

**c)** $-2\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$

**d)** $-3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

**e)** $\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w}$

**f)** $-\frac{1}{5}\vec{v} - \vec{w} + \vec{u}$

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (1, 3) + (-2, 5) + (-1, -3) = (1 - 2 - 1, 3 + 5 - 3) = (-2, 5)$

b) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = (1, 3) - (-2, 5) - (-1, -3) = (1 + 2 + 1, 3 - 5 + 3) = (4, 1)$

c) $-2\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = (-2, -6) + (-2, 5) - (-2, -6) = (-2 - 2 + 2, -6 + 5 + 6) = (-2, 5)$

d) $-3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (-3, -9) + \left(-1, \frac{5}{2}\right) = \left(-3 - 1, -9 + \frac{5}{2}\right) = \left(-4, -\frac{13}{2}\right)$

e) $\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w} = \left(\frac{2}{3}, 2\right) + \left(-\frac{1}{3}, -1\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 2 - 1\right) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

f) $-\frac{1}{5}\vec{v} - \vec{w} + \vec{u} = \left(\frac{2}{5}, -1\right) - (-1, -3) + (1, 3) = \left(\frac{2}{5} + 1 + 1, -1 + 3 + 3\right) = \left(\frac{12}{5}, 5\right)$

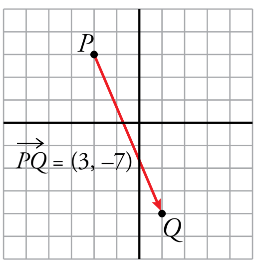
**9.** **Representa en unos ejes coordenados los vectores que verifican las siguientes condiciones:**

**a)** **Su origen es $P(-2, 3)$ y su extremo, $Q(1, -4)$.**

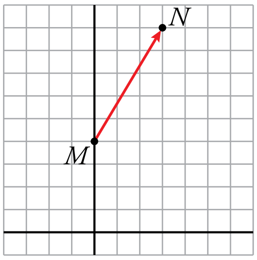
**b)** **Su origen es $M(0, 4)$ y sus coordenadas, $(3, 5)$.**

**c)** **Su extremo es $B(5, 0)$ y sus coordenadas, $(4, 4)$.**

a)



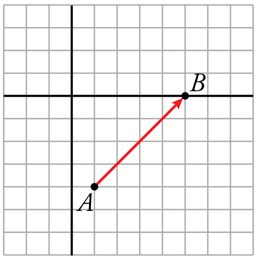
b)




$$\left.\begin{array}{l} M(0, 4) \\ N(x, y) \\ \overrightarrow{MN}(3, 5) \end{array}\right\} \to (x - 0, y - 4) = (3, 5) \to$$

$$\to \begin{cases} x = 3 \\ y - 4 = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \to N(3, 9)$$

c)



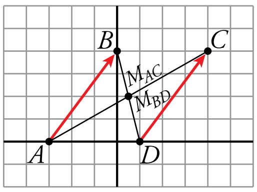

$$\left.\begin{array}{l} A(x, y) \\ B(5, 0) \\ \overrightarrow{AB}(4, 4) \end{array}\right\} \to (5 - x, 0 - y) = (4, 4) \to$$

$$\to \begin{cases} 5 - x = 4 \\ -y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \to A(1, -4)$$

**10.** **a) Representa los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 0)$ y halla los puntos medios de $AC$ y de $BD$.**

**b) Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ y comprueba que son las mismas.**

a)

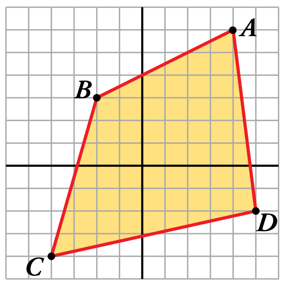



$$M_{AC} = \left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{0 + 4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{0 + 1}{2}, \frac{4 + 0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

b) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0 + 3, 4) = (3, 4) \\ \overrightarrow{DC} = (4 - 1, 4 - 0) = (3, 4) \end{array}\right\}$ Coinciden

**11.** **Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.**




$A(4, 6)$, $B(-2, 3)$, $C(-4, -4)$, $D(5, -2)$

Por tanto:

Punto medio del lado $AB$: $\left(\frac{4 - 2}{2}, \frac{6 + 3}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right)$

Punto medio del lado $BC$: $\left(\frac{-2 - 4}{2}, \frac{3 - 4}{2}\right) = \left(-3, \frac{-1}{2}\right)$

Punto medio del lado $CD$: $\left(\frac{-4 + 5}{2}, \frac{-4 - 2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$

Punto medio del lado $AD$: $\left(\frac{4 + 5}{2}, \frac{6 - 2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$

Punto medio de la diagonal $BD$: $\left(\frac{-2 + 5}{2}, \frac{3 - 2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Punto medio de la diagonal $AC$: $\left(\frac{4 - 4}{2}, \frac{6 - 4}{2}\right) = (0, 1)$

**12.** **Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento $AB$, halla el punto $B$ en cada uno de los siguientes casos:**

**a)** $A(-1, 5)$ **b)** $A(6, -4)$ **c)** $A(-4, -7)$

a) $\left(\dfrac{-1+x}{2}, \dfrac{5+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -5;\ y = 5 \to B(-5, 5)$

b) $\left(\dfrac{6+x}{2}, \dfrac{-4+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -12;\ y = 14 \to B(-12, 14)$

c) $\left(\dfrac{-4+x}{2}, \dfrac{-7+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -2;\ y = 17 \to B(-2, 17)$

**13.** **Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:**

**a)** $P(-2, 0)$ **b)** $Q(2, -3)$ **c)** $O(0, 0)$

$A'(x, y)$ es el punto buscado.

a) $P(-2, 0)$ es el punto medio del segmento de extremos $A$ y $A'$:

$$\left(\frac{x-3}{2}, \frac{y-5}{2}\right) = (-2, 0) \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = -2 \to x - 3 = -4 \to x = -1 \\[2ex] \dfrac{y-5}{2} = 0 \to y = 5 \end{cases}$$

Luego: $A'(-1, 5)$

b) $Q(2, -3)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2} = 2 \to x - 3 = 4 \to x = 7 \\[2ex] \dfrac{y-5}{2} = -3 \to y - 5 = -6 \to y = -1 \end{array}\right\} A'(7, -1)$$

c) $O(0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2} = 0 \to x - 3 = 0 \to x = 3 \\[2ex] \dfrac{y-5}{2} = 0 \to y - 5 = 0 \to y = 5 \end{array}\right\} A'(3, 5)$$

**14.** **Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:**

**a)** $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

**b)** $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

**c)** $M(-4, 3)$, $N(3, 4)$, $P(6, 5)$

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(3, 1) \\ \overrightarrow{BC}(15, 5) \end{array}\right\} \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} \to \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC} \to A, B$ y $C$ están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(4, 3) \\ \overrightarrow{QR}(-28, -21) \end{array}\right\} \dfrac{4}{-28} = \dfrac{3}{-21} \to \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{QR} \to P, Q$ y $R$ están alineados.

c) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MN}(7, 1) \\ \overrightarrow{NP}(3, 1) \end{array}\right\} \dfrac{7}{3} \ne \dfrac{1}{1} \to M, N$ y $P$ no están alineados.

## Página 182

# Rectas

**15.** **Escribe, en cada caso, las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de las rectas que pasan por el punto $P(-4, 3)$ y tienen como vector dirección:**

**a)** $\vec{d}(2, -1)$

**b)** $\vec{d}(-1, -3)$

**c)** $\vec{d}(2, 0)$

a) $P(-4, 3)$ $\vec{d}(2, -1)$

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d}$

$(x, y) = (-4, 3) + t(2, -1)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-3}{-1}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

b) $P(-4, 3)$ $\vec{d}(-1, -3)$

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d}$

$(x, y) = (-4, 3) + t(-1, -3)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+4}{-1} = \dfrac{y-3}{-3}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = 3x + 15$

c) $P(-4, 3)$ $\vec{d}(2, 0)$

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d}$

$(x, y) = (-4, 3) + t(2, 0)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 + 0t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-3}{0}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = 3$

**16.** **Da, en cada caso, un vector dirección y escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de las rectas que pasan por $A$ y $B$:**

**a)** $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

**b)** $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

**c)** $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

**d)** $A(3, -1)$, $B(3, 5)$

a) $\left.\begin{array}{l} A(-1, 0) \\ B(0, 3) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB}(1, 3) \rightarrow \vec{v}(1, 3)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

$(x, y) = (-1, 0) + t(1, 3)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 + 3t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-0}{3}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = 3x + 3$

b) $\left.\begin{array}{l} A(0, -2) \\ B(5, -2) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB}(5, 0) \rightarrow \vec{v}(1, 0)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

$(x, y) = (0, -2) + t(1, 0)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = -2 + 0t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y+2}{0}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = -2$

c) $\left.\begin{array}{l} A(-2, 3) \\ B(4, -1) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB}(6, -4) \rightarrow \vec{v}(3, -2)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

$(x, y) = (-2, 3) + t(3, -2)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-2}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

d) $\left.\begin{matrix} A(3,-1) \\ B(3,5) \end{matrix}\right\}$ $\overrightarrow{AB}(0,6) \to \vec{v}(0,1)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

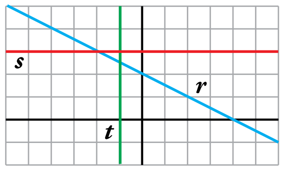
$(x, y) = (3, -1) + t(0, 1)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 + 0t \\ y = -1 + 1t \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+1}{1}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $x = 3$

**17.** **Escribe las ecuaciones paramétricas y explícita de las rectas $r$, $s$ y $t$.**




- Recta $r$:

$\left.\begin{matrix} A(0,2) \in r \\ B(2,1) \in r \end{matrix}\right\} \to \overrightarrow{AB}(2,-1) \,//\, r \to \vec{v}(2,-1)$ vector dirección

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$\left.\begin{matrix} B(2,1) \in r \\ \vec{v}(2,-1) \text{ vector dirección } \to m = -\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \to y = 1 - \dfrac{1}{2}(x-2) \to y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

- Recta $s$: Recta paralela al eje de abscisas $\to \vec{v}(1, 0)$ vector dirección.

$\left.\begin{matrix} P(0,3) \in s \\ \vec{v}(1,0) \text{ vector dirección} \end{matrix}\right\}$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$\begin{cases} x = t \\ y = 3 \end{cases}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$s$ es una recta paralela al eje de abscisas, luego su ecuación explícita es de la forma $y = k$:

$P(0, 3) \in s \to y = 3$

- Recta $t$: Recta paralela al eje de ordenadas $\to \vec{v}(0, 1)$ vector dirección.

$\left.\begin{matrix} Q(-1,0) \in t \\ \vec{v}(0,1) \text{ vector dirección} \end{matrix}\right\}$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$x = -1$

**18.** **Da un vector dirección y un punto de cada recta, y escribe sus ecuaciones continuas:**

**a)** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -3t \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x = \quad t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$

a) $P(-1, 0)$; $\vec{v}(2, -3)$; $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3}$

b) $P(0, 1)$; $\vec{v}(1, -5)$; $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-5}$

**19.** **Escribe la ecuación explícita de cada una de las rectas siguientes y da, en cada caso, un vector dirección y la pendiente:**

**a)** $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3}$

**b)** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) $P(3, -1) \in r$

$\vec{v}(2, 3)$ vector dirección $\rightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (pendiente)

Ecuación explícita: $y = -1 + \dfrac{3}{2}(x-3) \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}$

b) $P(2, 1) \in r$

$\vec{v}(-1, 3)$ vector dirección $\rightarrow m = \dfrac{3}{-1} = -3$ (pendiente)

Ecuación explícita: $y = 1 - 3(x-2) \rightarrow y = -3x + 7$

**20.** **Halla dos puntos de cada una de las siguientes rectas y utilízalos para dar un vector dirección en cada caso:**

**a)** $y = 2x - 3$

**b)** $y = 3$

**c)** $x - 2y + 1 = 0$

a) $r: y = 2x - 3$

$\left.\begin{array}{l} P(0, -3) \in r \\ Q(1, -1) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(1, 2)$ vector dirección de $r$

b) $r: y = 3$

$\left.\begin{array}{l} P(0, 3) \in r \\ Q(1, 3) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(1, 0)$ vector dirección de $r$

c) $r: x - 2y + 1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} P(-1, 0) \in r \\ Q(1, 1) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(2, 1)$ vector dirección de $r$

**21.** **Escribe la ecuación de las siguientes rectas y da, en cada caso, un vector dirección:**

**a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.**

**b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.**

**c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.**

a) $\left.\begin{array}{l} P(-4, 2) \in r \\ m = \frac{1}{2} \text{ pendiente} \end{array}\right\} \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4) \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ Ecuación explícita: $y = \frac{1}{2}x + 4$

Vector dirección: $\vec{v}(2, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} P(1, 3) \in r \\ m = -2 \text{ pendiente} \end{array}\right\} \rightarrow y = 3 - 2(x - 1) \rightarrow y = 3 - 2x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ Ecuación explícita: $y = -2x + 5$

Vector dirección: $\vec{v}(1, -2)$

c) $\left.\begin{array}{l} P(5, -1) \in r \\ m = 0 \text{ pendiente} \end{array}\right\} \rightarrow y = -1 + 0(x - 5) \rightarrow y = -1$

Vector dirección: $\vec{v}(1, 0)$

**22.** **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

**a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).**

**b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).**

**c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).**

a) $m = -2$; $y = 5 - 2(x - 4)$

b) $m = \frac{1}{2}$; $y = 0 + \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 4)$

c) $m = -\frac{3}{2}$; $y = -3 - \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = -3 - \frac{3}{2}x$

**23.** **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:**

**a) $\vec{v}(2, 1)$** **b) $\vec{v}(-5, 4)$** **c) $\vec{v}(-1, 0)$**

a) $\vec{v}\,' = (-1, 2)$; $m = -2$; $y = -2 - 2(x - 3) \rightarrow 2x + y - 4 = 0$

b) $\vec{v}\,' = (4, 5)$; $m = \frac{5}{4}$; $y = -2 + \frac{5}{4}(x - 3) \rightarrow 5x - 4y - 23 = 0$

c) $\vec{v}\,' = (0, -1)$; no tiene pendiente; ecuación: $x = 3$

**24.** **Escribe la ecuación de la recta perpendicular a $r$ y que pasa por el punto $P$ en los siguientes casos:**

**a)** $r$**:** $y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

**b)** $r$**:** $3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

**c)** $r$**:** $x = 3$; $P(0, 4)$

a) $m = \frac{1}{2}$; $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 3)$

b) $m = -\frac{2}{3}$; $y = -1 - \frac{2}{3}(x - 4)$

c) $y = 4$

**25.** **Halla el punto de intersección de las rectas $r$ y $s$ en los casos siguientes:**

**a)** $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: 3x - 2y + 9 = 0 \\ s: x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = -17 \\ 7x + 3y = 63 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} 9x - 15y = -51 \\ 35x + 15y = 315 \\ \hline 44x \qquad = 264 \end{array} \to x = 6$

$7 \cdot 6 + 3y = 63 \to 3y = 21 \to y = 7$

$r$ y $s$ se cortan en el punto $P(6, 7)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + 9 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} 3x - 2y + 9 = 0 \\ -x + 2y - 5 = 0 \\ \hline 2x \qquad + 4 = 0 \end{array} \to x = -2$

$3 \cdot (-2) - 2y + 9 = 0 \to -6 - 2y + 9 = 0 \to 2y = 3 \to y = \frac{3}{2}$

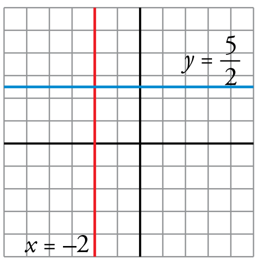
$r$ y $s$ se cortan en el punto $Q\left(-2, \frac{3}{2}\right)$.

**26.** **Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.**

$3x + 6 = 0 \to x = -2$ recta paralela al eje $Y$

$2y - 5 = 0 \to y = \frac{5}{2}$ recta paralela al eje $X$

Punto de intersección: $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$



## Distancias y circunferencias

**27.** **Calcula, en cada caso, la distancia entre $P$ y $Q$:**

**a)** $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$

**b)** $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

**c)** $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$

**d)** $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

a) $dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-3)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(-6+8)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(15+3)^2} = \sqrt{18^2} = 18$

**28.** **a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(6, 4)$.**

**b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.**

a) $M = \left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$

b) $dist\,(A, M) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(2+2)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$dist\,(B, M) = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(2-6)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

**29.** **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?**

Un triángulo es isósceles cuando dos de sus lados miden lo mismo.

Calculamos, pues, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ y $|\overrightarrow{BC}|$:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(7+1)^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{array}\right\} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

El triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ es isósceles.

**30.** **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 6)$ es rectángulo.**

$A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \end{array}\right\} \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 \text{ por Pitágoras:} \\ (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{29})^2 = (\sqrt{58})^2 \\ 29 + 29 = 58 \end{array}$$

El triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ es rectángulo.

**31.** **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C$ y radio $r$:**

**a)** $C(4, -3)$, $r = 3$

**b)** $C(0, 5)$, $r = 6$

**c)** $C(6, 0)$, $r = 2$

**d)** $C(0, 0)$, $r = 5$

a) $C(4, -3)$, $r = 3$

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

b) $C(0, 5)$, $r = 6$

$(x-0)^2 + (y-5)^2 = 36 \rightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 = 36 \rightarrow x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$

c) $C(6, 0)$, $r = 2$

$(x-6)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$

d) $C(0, 0)$, $r = 5$

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$

**32.** **Di cuáles son el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

**a)** $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

**b)** $(x+1)^2 + y^2 = 81$

**c)** $x^2 + y^2 = 10$

a) $C(2, -3)$, $r = 4$

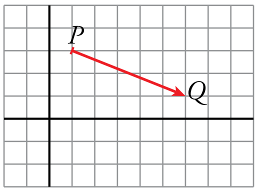
b) $C(-1, 0)$, $r = 9$

c) $C(0, 0)$, $r = \sqrt{10}$

## Página 183

# Aplica lo aprendido

**33.** **A partir del punto $P(1, 3)$, trazamos el vector $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ y llegamos al punto $Q$. Averigua las coordenadas de $Q$ si conocemos $\vec{u}(2, 1)$, $\vec{v}(3, -1)$ y $\vec{w}(2, 3)$.**




$2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = 2(2, 1) + (3, -1) - (2, 3) = (4, 2) + (3, -1) + (-2, -3) = (5, -2)$

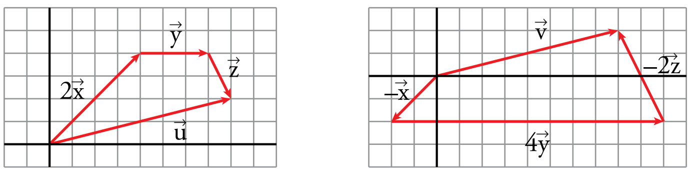
$\overrightarrow{PQ} = (5, -2)$

$Q = (5, -2) + (1, 3) = (6, 1)$

**34.** **a) Representa los vectores $\vec{u} = 2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ y $\vec{v} = -\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z}$ siendo $\vec{x}(2, 2)$, $\vec{y}(3, 0)$ y $\vec{z}(1, -2)$.**

**b) Halla las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Son iguales?**

a)




b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = 2(2, 2) + (3, 0) + (1, -2) = (8, 2) \\ \vec{v} = -\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z} = -(2, 2) + 4(3, 0) - 2(1, -2) = (8, 2) \end{array}\right\} \ \vec{u} = \vec{v}$

**35.** **a) ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?**

$$\vec{t}(-3, 2) \qquad \vec{u}(2, 3) \qquad \vec{v}\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right) \qquad \vec{w}(6, -4)$$

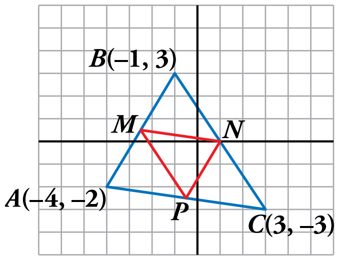
**b) Calcula el valor de $m$ y $n$ para que se verifique $\vec{v} = m\vec{t} + n\vec{u}$.**

a) $\vec{t}$ y $\vec{w}$ porque $\dfrac{-3}{6} = \dfrac{2}{-4}$.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ porque $\dfrac{2}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{\frac{5}{2}}$.

b) $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{2}\right) = m(-3, 2) + n(2, 3) \ \to \ \begin{cases} \dfrac{5}{3} = -3m + 2n \\ \dfrac{5}{2} = 2m + 3n \end{cases} \ \to \ m = 0, \ n = \dfrac{5}{6}$

**36.** **a) Determina las coordenadas de los puntos $M$, $N$ y $P$ que son los puntos medios de los lados del triángulo $ABC$.**




**b) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{PN}$ y comprueba que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.**

a) $M$ es el punto medio del segmento de extremos $A(-4, -2)$ y $B(-1, 3)$:

$$M = \left(\frac{-4-1}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$N$ es el punto medio del segmento de extremos $B(-1, 3)$ y $C(3, -3)$:

$$N = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = (1, 0)$$

$P$ es el punto medio del segmento de extremos $A$ y $C$:

$$P = \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{-2-3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

b) $\overrightarrow{MN} = (1, 0) - \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, -3)$$

$$\overrightarrow{PN} = (1, 0) - \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, -3) - (-4, -2) = (7, -1) = 2\overrightarrow{MN} \rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, -3) - (-1, 3) = (4, -6) = 2\overrightarrow{MP} \rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 3) - (-4, -2) = (3, 5) = 2\overrightarrow{PN} \rightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

**37.** **Dados los vectores $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(x, 5)$ y $\vec{w}(8, y)$, calcula $x$ e $y$ para que se verifique: $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$.**

$2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} \rightarrow 2(3, 2) - (x, 5) = (8, y) \rightarrow (6, 4) - (x, 5) = (8, y)$

$$(6 - x, -1) = (8, y) \begin{cases} 6 - x = 8 \rightarrow x = -2 \\ -1 = y \end{cases}$$

Luego: $x = -2$, $y = -1$

**38.** **Dados los vectores $\vec{u}(5, -3)$, $\vec{v}(1, 3)$ y $\vec{w}(2, 0)$, calcula el valor de $m$ y $n$ para que se verifique: $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$.**

$\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w} \rightarrow (5, -3) = m(1, 3) + n(2, 0)$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= m + 2n \\ -3 &= 3m \end{aligned}\right\} \begin{aligned} m &= -1 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

**39.** **Calcula, en cada caso, el valor de $m$ para que el punto $P(m, -2)$ pertenezca a la recta dada:**

**a) $r$: pasa por $A(3, 1)$ y $B(-1, 0)$.** **b) $s$: pasa por $A(1, 3)$ y $B(1, -4)$.**

a) $P(m, -2)$ pertenece a la recta que pasa por $A(3, 1)$ y $B(-1, 0)$ $\Leftrightarrow$ $A$, $B$ y $P$ están alineados $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BP}$.

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{AB}(-4, -1) \\ &\overrightarrow{BP}(m + 1, -2) \end{aligned}\right\} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BP} \rightarrow \frac{-4}{m+1} = \frac{-1}{-2} \rightarrow 8 = -m - 1 \rightarrow m = -9$$

b) $P(m, -2)$ pertenece a la recta que pasa por $A(1, 3)$ y $B(1, -4)$ $\Leftrightarrow$ $A$, $B$ y $P$ están alineados $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BP}$.

$\overrightarrow{AB}(0, -7) \rightarrow \overrightarrow{BP}(m - 1, 2)$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$ si $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

**40.** **Calcula $m$ para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.**

$R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{RS} &= (-1, 1) - (5, -2) = (-6, 3) \\ \overrightarrow{ST} &= (2, m) - (-1, 1) = (3, m - 1) \end{aligned}\right\} \frac{-6}{3} = \frac{3}{m-1} \rightarrow -2(m - 1) = 3$$

$-2m + 2 = 3 \rightarrow -2m = 1 \rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

**41.** **Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.**

$A$: $18 - 3 \cdot 15 + 27 = 0 \rightarrow A \in r$

$B$: $-43 - 3 \cdot (-5) + 27 \neq 0 \rightarrow B \notin r$

**42.** **Calcula $m$ y $n$ para que las rectas $r$: $3x + my - 8 = 0$ y $s$: $nx - 2y + 3 = 0$ se corten en el punto $P(1, 5)$.**

$r$: $3x + my - 8 = 0 \rightarrow 3 \cdot 1 + m \cdot 5 - 8 = 0 \rightarrow m = 1$

$s$: $nx - 2y + 3 = 0 \rightarrow n \cdot 1 - 10 + 3 = 0 \rightarrow n = 7$

**43.** **a) Calcula el valor de $k$ para que la recta de ecuación $(k + 3)x - y - 2 = 0$ pase por el punto $A(2, 0)$.**

**b) ¿Cuál es la pendiente de esa recta?**

a) $A \in r$: $(k + 3)x - y - 2 = 0 \rightarrow (k + 3) \cdot 2 - 0 - 2 = 0 \rightarrow 2(k + 3) = 2 \rightarrow$

$\rightarrow k + 3 = 1 \rightarrow k = -2$

b) $k = -2 \rightarrow r$: $x - y - 2 = 0 \rightarrow r$: $y = x - 2 \rightarrow m = 1$

**44.** **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y halla el punto de intersección cuando sea posible:**

**a)** $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$ $\qquad s: x - 1 = \dfrac{y}{2}$

**b)** $r: y = 2x - 3$ $\qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

a) $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \to \begin{cases} P_r(3, -2) \text{ punto de } r \\ \vec{v}_r(1, -2) \text{ vector dirección de } r \end{cases}$

$s: x - 1 = \dfrac{y}{2} \to \begin{cases} P_s(1, 0) \text{ punto de } s \\ \vec{v}_s(1, 2) \text{ vector dirección de } s \end{cases}$

$\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-2}{2} \to \vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son paralelos $\to r$ y $s$ se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte, hallamos la ecuación explícita de cada recta y resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} P_r(3, -2) \in r \\ \vec{v}_r(1, -2) \to m_r = -2 \end{array}\right\} \to r: y = -2 - 2(x - 3) \to r: y = -2x + 4$

$s: x - 1 = \dfrac{y}{2} \to s: y = 2x - 2$

$\left.\begin{array}{l} y = -2x + 4 \\ y = 2x - 2 \end{array}\right\}$ El punto de corte es: $M\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

b) $r: y = 2x - 3 \to m_r = 2$

$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \to \vec{v}_s(1, 2) \to m_s = 2$

$m_r = m_s \to r$ y $s$ o son paralelas o coincidentes.

$s$ pasa por el origen de coordenadas pero $r$ no, por tanto $r$ y $s$ son paralelas.

**45.** **Determina el valor de $m$ para que las rectas $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{2}$ y $s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{m}$ sean:**

**a) Paralelas.** **b) Perpendiculares.** **c) Se corten en el punto $P(-1, 0)$.**

$r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{2} \to \begin{cases} (-1, 0) \in r \\ \vec{v}_r(3, 2) \to m_r = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\qquad s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{m} \to \begin{cases} (0, 1) \in s \\ \vec{v}_s(2, m) \to m_s = \dfrac{m}{2} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} r \,//\, s \to m_r = m_s \to \dfrac{2}{3} = \dfrac{m}{2} \to m = \dfrac{4}{3} \\ (0, 1) \notin r \text{ ya que } \dfrac{0+1}{3} \neq \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ $r$ y $s$ son paralelas si $m = \dfrac{4}{3}$

b) $r \perp s \to \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \to m_r \cdot m_s = -1 \to \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{m}{2} = -1 \to m = -3$

c) • $P \in r$ (obvio, por la definición de $r$)

• $P \in s \to \dfrac{-1}{2} = \dfrac{0-1}{m} \to -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{m} \to m = 2$

**46.** **Los puntos $A(2, 1)$ y $B(6, 4)$ son vértices de un triángulo. Sabiendo que $M(0{,}5; -1)$ es el punto medio del lado $AC$, calcula las coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ y el perímetro del triángulo.**

$A(2, 1)$, $B(6, 4)$ y $C(x, y)$ son los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$.

- $M\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ punto medio del lado $AC \to \left(\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) \to$

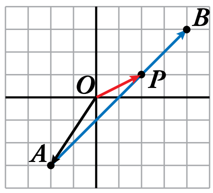
$$\to \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2+x}{2} \to x = -1 \\ -1 = \frac{1+y}{2} \to y = -3 \end{cases} \to C(-1, -3)$$

- $\left.\begin{array}{l} A(2, 1) \\ C(-1, -3) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AC}(-1-2, -3-1) \to \overrightarrow{AC}(-3, -4)$

- $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(4, 3) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ \overrightarrow{AC}(-3, -4) \to |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \\ \overrightarrow{BC}(-7, -7) \to |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \end{array}\right\}$

Perímetro de $\widehat{ABC} = (10 + 7\sqrt{2})$ unidades

**47.** **En el segmento de extremos $A(-2, -3)$ y $B(4, 3)$, halla las coordenadas del punto $P$ tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.**




$A(-2, -3) \quad B(4, 3) \quad P(x, y)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \to (x + 2, y + 3) = \frac{2}{3}(6, 6) \to (x + 2, y + 3) = (4, 4) \to$

$$\to \begin{cases} x + 2 = 4 \\ y + 3 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \to P(2, 1)$$

**48.** **Escribe la ecuación de una recta perpendicular a $r$ y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:**

**a)** $r$**:** $2x + 7 = 0$ **b)** $r$**:** $-y + 4 = 0$

a) $2x + 7 = 0 \to x = -\frac{7}{2}$ es paralela al eje $Y$.

Por tanto, la recta perpendicular a $r$ es paralela al eje $X \to y = k$

Como pasa por $(4, -3)$, su ecuación es $y = -3 \to y + 3 = 0$

b) $-y + 4 = 0 \to y = 4$ es paralela al eje $X$.

Por tanto, la recta perpendicular a $r$ es paralela al eje $Y \to x = k$

Como pasa por $(4, -3)$, su ecuación es $x = 4 \to x - 4 = 0$

**49.** **Estudia si las rectas $r$ y $s$ son paralelas o perpendiculares:**

**$r$: $3x - 5y + 15 = 0$ $s$: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$.**

$\left.\begin{array}{l} r: 3x - 5y + 15 = 0 \to m = \frac{3}{5} \\ s: \vec{v} = (-2-8, -3-3) = (-10, -6) \to m = \frac{3}{5} \end{array}\right\} \to$ Son paralelas

## Página 184

**50.** **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$  b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

a) • $s$: $P(3, 1)$, $Q(-2, 3)$. Un vector dirección es $(-5, 2) \rightarrow m = -\frac{2}{5}$

$y = 1 - \frac{2}{5}(x - 3) \rightarrow 5y = 5 - 2x + 6 \rightarrow 2x + 5y - 11 = 0$

• $r$: $2x - 5y + 3 = 0$

$s$: $2x + 5y - 11 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2 \\ 2 \cdot 2 - 5y + 3 = 0 \rightarrow 5y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{5} \end{array}\right\} r \text{ y } s \text{ se cortan en el punto } \left(2, \frac{7}{5}\right).$$

b) $s$: $A(4, 7)$, $B(0, 2)$. Un vector dirección es $(-4, -5) \rightarrow m = \frac{5}{4}$

$y = 2 + \frac{5}{4}(x - 0) \rightarrow y = 2 + \frac{5}{4}x \rightarrow 4y = 8 + 5x \rightarrow 5x - 4y + 8 = 0$

$r$ y $s$ son la misma recta.

**51.** **Halla la ecuación de la recta perpendicular a $AB$ en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.**

$A(-5, 3)$, $B(2, 7)$. Vector dirección $(7, 4) \rightarrow m = \frac{4}{7}$; $m' = -\frac{7}{4}$

$M_{AB} = \left(\frac{-5+2}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 5\right)$

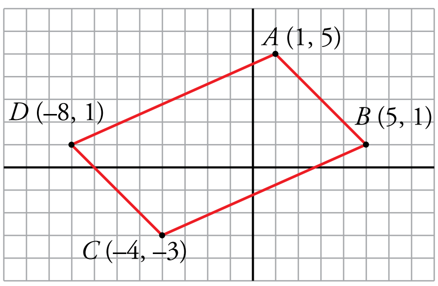
$y = 5 - \frac{7}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = 5 - \frac{7}{4}x - \frac{21}{8} \rightarrow 8y = 40 - 14x - 21 \rightarrow 14x + 8y - 19 = 0$

**52.** **Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.**

• Punto medio de $AC$: $M_{AC} = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

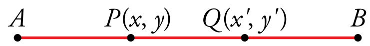
• Punto medio de $BD$: $M_{BD} = \left(\frac{5-8}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

Los puntos medios de las diagonales coinciden.



**53.** **Halla, en cada caso, los puntos que dividen al segmento $AB$ en tres partes iguales:**

**a)** $A(-3, 4)$, $B(6, 1)$ **b)** $A(0, -2)$, $B(9, 1)$




a) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \to (x + 3,\ y - 4) = \frac{1}{3}(9, -3) \to (x + 3,\ y - 4) = (3, -1) \to$

$\to \begin{cases} x + 3 = 3 \\ y - 4 = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \to P(0, 3)$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \to (x' + 3,\ y' - 4) = \frac{2}{3}(9, -3) \to (x' + 3,\ y' - 4) = (6, -2) \to$

$\to \begin{cases} x' + 3 = 6 \\ y' - 4 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 2 \end{cases} \to Q(3, 2)$

b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \to (x,\ y + 2) = \frac{1}{3}(9, 3) \to (x,\ y + 2) = (3, 1) \to$

$\to \begin{cases} x = 3 \\ y + 2 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \to P(3, -1)$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \to (x,\ y + 2) = \frac{2}{3}(9, 3) \to (x,\ y + 2) = (6, 2) \to$

$\to \begin{cases} x = 6 \\ y + 2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \to Q(6, 0)$

**54.** **Halla la ecuación de estas circunferencias:**

**a) Centro $C(0, 0)$ y pasa por $(-3, 4)$.** **b) Centro $C(1, 2)$ y pasa por $(5, 4)$.**

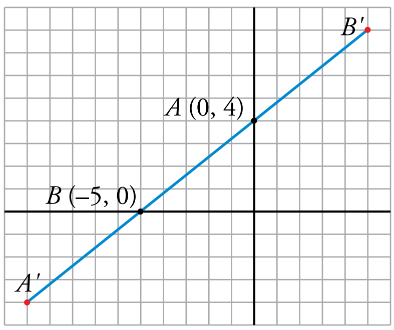
a) radio: $\sqrt{(0 + 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$x^2 + y^2 = 25$

b) $r = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

**55.** **Dados los puntos $A(0, 4)$ y $B(-5, 0)$, halla el punto simétrico de $B$ respecto de $A$ y el simétrico de $A$ respecto de $B$.**




Simétrico de $A$ respecto de $B$:

$$A' = \left(\frac{0 + x}{2}, \frac{4 + y}{2}\right) = (-5, 0) \begin{cases} \frac{x}{2} = -5 \to x = -10 \\ 4 + y = 0 \to y = -4 \end{cases} A'(-10, -4)$$

Simétrico de $B$ respecto de $A$:

$$B' = \left(\frac{-5 + x}{2}, \frac{0 + y}{2}\right) = (0, 4) \begin{cases} -5 + x = 0 \to x = 5 \\ y = 8 \end{cases} B'(5, 8)$$

**56.** **La recta $r$ es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta $s$ es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$.**

**Escribe las ecuaciones de $r$ y $s$.**

$5x - 4y + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{5}{4}$

$r$ es la recta de pendiente $\frac{5}{4}$ que pasa por $(1, 3)$:

$r\text{: } y = 3 + \frac{5}{4}(x - 1) \rightarrow 4y = 12 + 5x - 5 \rightarrow 5x - 4y + 7 = 0$

$s$ es la recta de pendiente $-\frac{4}{5}$ que pasa por $(1, 3)$:

$s\text{: } y = 3 - \frac{4}{5}(x - 1) \rightarrow 5y = 15 - 4x + 4 \rightarrow 4x + 5y - 19 = 0$

## Resuelve problemas

**57.** **Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje $X$.**

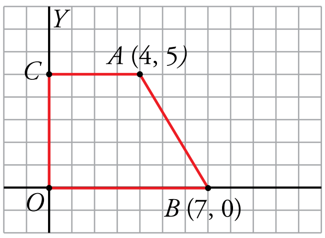
**Dibuja el trapecio y halla:**

**a) Las ecuaciones de sus lados.**

**b) Su perímetro.**

**c) Su área.**

a)




$OC\text{: } x = 0$

$OB\text{: } y = 0$

$AC\text{: } y = 5$

$AB$: Vector dirección $(3, -5) \rightarrow m = -\frac{5}{3} \rightarrow y = -\frac{5}{3}(x - 7) \rightarrow 5x + 3y - 35 = 0$

b) $\overline{AC} = 4; \ \overline{OC} = 5; \ \overline{OB} = 7$

$\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

$p = 4 + 5 + 7 + \sqrt{34} = 16 + \sqrt{34}$ u

c) $A = \frac{7 + 4}{2} \cdot 5 = \frac{11}{2} \cdot 5 = \frac{55}{2}$ u$^2$

**58.** **Estudia analíticamente si las rectas $r$: $3x + y = 14$; $s$: $2x - y = 11$; $t$: $4x + 17y = 3$ se cortan en un mismo punto. En caso afirmativo, calcula sus coordenadas.**

- En primer lugar, hallamos el punto de corte de $r$ y $s$, $P$ (para ello resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas).

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 14 \\ 2x - y = 11 \end{array}\right\} \text{ Sumando las ecuaciones: } 5x = 25 \to x = 5$$

Sustituyendo en la ecuación de $r$ el valor de $x$ obtenido:

$3 \cdot 5 + y = 14 \to y = -1$

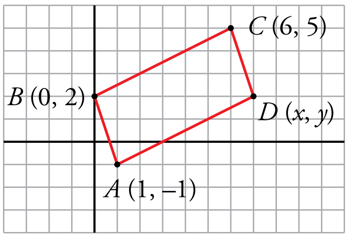
Por tanto, $P(5, -1)$.

- Ahora debemos estudiar si $P \in t$:

$$\left.\begin{array}{l} P(5, -1) \\ t\text{: } 4x + 17y = 3 \end{array}\right\} \ 4 \cdot 5 + 17 \cdot (-1) = 3 \to P \in t$$

Por tanto, las rectas $r$, $s$ y $t$ se cortan en el punto $P(5, -1)$.

**59.** **Halla las coordenadas del punto $D$, de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.**




- Punto medio de $AC$:

$$M_{AC} = \left(\frac{6+1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

- Punto medio de $BD$:

$$M_{BD} = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

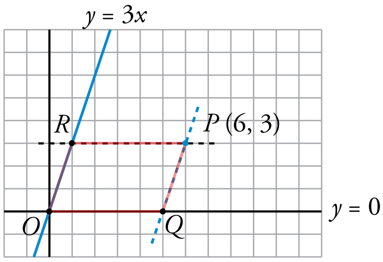
Los puntos medios de las diagonales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{2} \to x = 7 \\ \dfrac{y+2}{2} = 2 \to y = 4 - 2 = 2 \end{array}\right\} \text{ El punto } D \text{ tiene coordenadas } D(7, 2).$$

**60.** **Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.**

**a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.**

**b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.**




a) $OR$: $y = 3x$

$OQ$: $y = 0$

$PR$: $y = 3$

$PQ$: $y = 3 + 3(x - 6) \rightarrow y = 3 + 3x - 18 \rightarrow 3x - y - 15 = 0$

b) $O(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(1, 3)$, $P(6, 3)$

**61.** **Desde una estación marítima se observan en un radar dos barcos navegando. Uno está en el punto $P(4, 3)$ y sigue la dirección del vector $\vec{u}(5, 2)$, y el otro sigue la trayectoria de la recta $4x - 10y = 17$. ¿Es posible que choquen?**

Los barcos siguen las trayectorias de las siguientes rectas:

$s: 4x - 10y = 17 \rightarrow s: 10y = 4x - 17 \rightarrow s: y = \frac{2}{5}x - \frac{17}{10}$

$$r: \begin{cases} P(4, 3) \in r \\ \vec{u}(5, 2) \text{ vector dirección} \rightarrow m = \frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow r: y = 3 + \frac{2}{5}(x - 4) \rightarrow r: y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$$

Las rectas $r$ y $s$ son paralelas ya que tienen la misma pendiente y sus ordenadas en el origen son distintas, por tanto, no es posible que los barcos choquen.

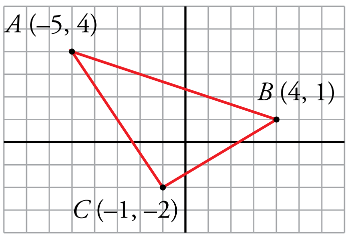
**62.** **Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, -2)$, halla:**

**a) Las ecuaciones de los tres lados.**

**b) El punto medio del lado $AC$.**

**c) La ecuación de la mediana del vértice $B$.**

a)




- Lado $AB$:

Vector dirección $(9, -3)//(3, -1) \rightarrow m = -\frac{1}{3}$

$y = 1 - \frac{1}{3}(x - 4) \rightarrow 3y = 3 - x + 4 \rightarrow x + 3y - 7 = 0$

- Lado $AC$:

Vector dirección $(4, -6)//(2, -3) \rightarrow m = -\frac{3}{2}$

$y = -2 - \frac{3}{2}(x + 1) \rightarrow 2y = -4 - 3x - 3 \rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$

- Lado $BC$:

  Vector dirección $(-5, -3) \to m = \frac{3}{5}$

  $y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) \to 5y = 5 + 3x - 12 \to 3x - 5y - 7 = 0$

b) $M_{AC} = \left(\frac{-5-1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (-3, 1)$

c) La mediana que corresponde a $B$ pasa, también, por el punto medio de $AC$, $M_{AC}$. Su vector dirección es $(7, 0) \to m = 0$

$y = 1 + 0(x+3) \to y = 1$

**63.** **Dada la recta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$, calcula la longitud del segmento $AB$ siendo $A$ y $B$ los puntos donde $r$ corta a los ejes de coordenadas.**

- $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \to \begin{cases} P(2, 1) \in r \\ \vec{v}(1, -1) \text{ vector dirección } \to m = -1 \end{cases} \to$

  $\to r: y = 1 - 1(x-2) \to r: y = -x + 3$

- Hallamos las coordenadas de los puntos en los que $r$ corta los ejes de coordenadas:

  $A = \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \to 0 = -x + 3 \to x = 3 \to A(3, 0)$

  $B = \begin{cases} y = -x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 0 + 3 \to y = 3 \to B(0, 3)$

- $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |(-3, 3)| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

**64.** **Comprueba que el triángulo de vértices $A(1, 3)$, $B(4, 1)$ y $C(3, 11/4)$ es isósceles y calcula la medida de la altura relativa al lado desigual.**

- Para comprobar que el triángulo es isósceles, hallamos las longitudes de sus lados teniendo en cuenta que:

  $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$, $\overrightarrow{AC} = \left(2, -\frac{1}{4}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = \left(-1, \frac{7}{4}\right)$

  Por tanto:

  $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

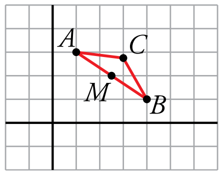
  $\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

  $\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

  Por tanto, el triángulo $\widehat{ABC}$ es isósceles y el lado desigual es $AB$.

- Sea h la altura relativa al lado desigual $AB$. Como el triángulo es isósceles, h corta el lado $AB$ en su punto medio $M$. Por tanto, la medida de la altura relativa al lado desigual es $|\overrightarrow{CM}|$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1, 3) \\ B(4, 1) \end{array}\right\} \to M\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

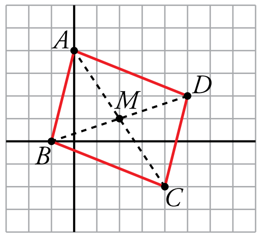



$$\left.\begin{array}{l} C\left(3, \frac{11}{4}\right) \\ M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{CM}\left(\frac{5}{2} - 3, 2 - \frac{11}{4}\right) = \overrightarrow{CM}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

Por tanto, la altura relativa al lado desigual mide $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

**65.** **Los puntos $A(0, 4)$ y $B(-1, 0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo, del que sabemos que las diagonales se cortan en $M(2, 1)$. Halla las coordenadas de los vértices $C$ y $D$.**




Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, por tanto, $M$ es el punto medio de $AC$ y $BD$.

- $M(2, 1)$ es el punto medio de $A(0, 4)$ y $C(x, y)$:

$$(2, 1) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) \to \begin{cases} 2 = \frac{x}{2} \\ 1 = \frac{4+y}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \to C(4, -2)$$

- $M(2, 1)$ es el punto medio de $B(-1, 0)$ y $D(x, y)$:

$$(2, 1) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) \to \begin{cases} 2 = \frac{-1+x}{2} \\ 1 = \frac{y}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \to D(5, 2)$$

**66.** **En el triángulo de vértices $A(1, 5)$, $B(4, 0)$ y $C(-2, -2)$, halla:**

**a) La ecuación de la altura que parte de $A$.**

**b) La ecuación de la altura que parte de $B$.**

**c) El punto de corte de las alturas (ortocentro).**

a) La altura que parte de $A$ es la recta, $r$, perpendicular a $BC$ que pasa por $A$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}(-6, -2) \perp r \to \vec{v}(2, -6) \text{ vector dirección de } r \to m_r = -3 \\ A(1, 5) \in r \end{cases}$$

$$r: y = 5 - 3(x - 1) \to r: y = -3x + 8$$

b) La altura que parte de $B$ es la recta, $s$, perpendicular a $AC$ que pasa por $B$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC}(-3, -7) \perp s \to \vec{v}(7, -3) \text{ vector dirección de } s \to m_s = -\frac{3}{7} \\ B(4, 0) \in s \end{cases}$$

$$s: y = 0 - \frac{3}{7}(x - 4) \to s: y = -\frac{3}{7}x + \frac{12}{7}$$

c) $\left.\begin{array}{l} y = -3x + 8 \\ y = -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{12}{7} \end{array}\right\} \rightarrow -3x + 8 = -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{12}{7} \rightarrow -21x + 56 = -3x + 12 \rightarrow$

$\rightarrow -18x = -44 \rightarrow x = \dfrac{22}{9}$

Sustituimos $x$ en la ecuación de $r$:

$y = -3 \cdot \dfrac{22}{9} + 8 \rightarrow y = \dfrac{2}{3}$

El ortocentro es $\left(\dfrac{22}{9}, \dfrac{2}{3}\right)$.

**67.** **Calcula las coordenadas de un punto $P$ que tiene la abscisa igual a la ordenada y que equidista de los puntos $A(2, 0)$ y $B(0, 4)$.**

- $P$ tiene igual la abscisa y la ordenada $\rightarrow P(a, a)$
- $P$ equidista de $A(2, 0)$ y $B(0, 4) \rightarrow dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \rightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(a-2, a) \\ \overrightarrow{BP}(a, a-4) \end{array}\right\} |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + (a-4)^2} \rightarrow$

$\rightarrow (a-2)^2 + a^2 = a^2 + (a-4)^2 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 - 4a + 4 = a^2 - 8a + 16 \rightarrow$

$\rightarrow 4a = 12 \rightarrow a = 3$

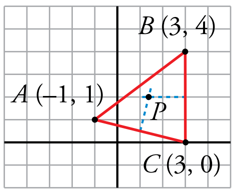
El punto que buscamos es $P(3, 3)$.

**68.** **En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(3, 0)$, halla:**

**a) La ecuación de la mediatriz de $BC$.**

**b) La ecuación de la mediatriz de $AC$.**

**c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).**




a) La mediatriz de $BC$ es la perpendicular a $BC$ por su punto medio, $M_{BC}$.

$M_{BC} = \left(\dfrac{3+3}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right) = (3, 2)$

La recta que contiene a $BC$ es $x = 3$. Su perpendicular por $(3, 2)$ es $y = 2$, mediatriz de $BC$.

b) $M_{AC} = \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{1+0}{2}\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

La recta que contiene a $AC$ tiene vector dirección $(4, -1) \rightarrow m = -\dfrac{1}{4}$

Pendiente de la perpendicular a $AC$, $m' = 4$.

Mediatriz de $AC$: $y = \dfrac{1}{2} + 4(x - 1) \rightarrow 2y = 1 + 8x - 8 \rightarrow 2y - 8x + 7 = 0$

c) Circuncentro, $P$:

$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 2y - 8x + 7 = 0 \end{array}\right\} 4 - 8x + 7 = 0 \rightarrow 8x = 11 \rightarrow x = \dfrac{11}{8}$

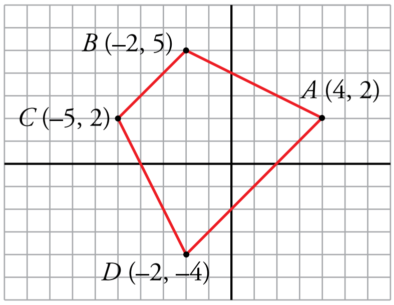
Las coordenadas de $P$ son $\left(\dfrac{11}{8}, 2\right)$.

## Página 185

**69.** **Prueba que el cuadrilátero de vértices**

$$A(4, 2),\ B(-2, 5),\ C(-5, 2) \text{ y } D(-2, -4)$$

**es un trapecio isósceles y calcula su perímetro.**




- Probamos que $BC$ es paralelo a $AD$ hallando las pendientes de las rectas que los contienen:

  $m_{BC}$: vector dirección $(-3, -3) \rightarrow m_{BC} = 1$

  $m_{AD}$: vector dirección $(-6, -6) \rightarrow m_{AD} = 1$

- Probamos que $\overline{AB} = \overline{CD}$:

  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

  $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

  Por tanto, el trapecio $ABCD$ es isósceles.

- Perímetro:

  $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2+5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

  $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(4+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

  $P = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{5} + 9\sqrt{2}$ u

**70.** **Halla, en cada caso, la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada y cuyo radio mida la mitad:**

**a)** $x^2 + (y-5)^2 = 36$ **b)** $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 12$

a) Centro, $(0, 5)$; radio, 6.

La circunferencia con centro en $(0, 5)$ y radio 3 es: $x^2 + (y-5)^2 = 9$

b) Centro $(4, -3)$; radio, $\sqrt{12}$.

La circunferencia de centro $(4, -3)$ y radio $\frac{\sqrt{12}}{2}$ es:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2 \rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 3$$

**71.** **Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro $PQ$, siendo $P(-5, 2)$ y $Q(3, -6)$.**

El centro de la circunferencia es el punto medio de $PQ$, $M = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (-1, -2)$.

El radio es la mitad de $|\overrightarrow{PQ}|$:

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3+5)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$

Radio $= 4\sqrt{2}$

Ecuación: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = (4\sqrt{2})^2$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 32$

**72.** **Determina el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

**a)** $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0$

a) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + \mathbf{9} + y^2 + 2y + \mathbf{1} = -6 + \mathbf{9} + \mathbf{1} \rightarrow$

$\rightarrow (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

Circunferencia de centro $C(-3, -1)$ y radio $r = \sqrt{4} = 2$.

b) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0 \rightarrow x^2 + 8x + \mathbf{16} + y^2 - 2y + \mathbf{1} = -12 + \mathbf{16} + \mathbf{1} \rightarrow$

$\rightarrow (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$

Circunferencia de centro $C(-4, 1)$ y radio $\sqrt{5}$.

**73.** **Halla los puntos de corte de la circunferencia $(x - 3)^2 + y^2 = 29$ con la bisectriz del primer cuadrante.**

Tenemos que hallar los puntos de corte de la circunferencia $(x - 3)^2 + y^2 = 29$ con la bisectriz del primer cuadrante que es la recta de ecuación $y = x$.

$$\left.\begin{aligned}(x-3)^2 + y^2 &= 29\\ y &= x\end{aligned}\right\} \rightarrow (x-3)^2 + x^2 = 29 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 = 29 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 - 6x - 20 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \begin{cases} x = 5 \rightarrow y = 5 \\ x = -2 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Los puntos buscados son $A(5, 5)$ y $B(-2, -2)$.

**74.** **Calcula $k$ para que el punto $(-3, k)$ pertenezca a la circunferencia:**

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

$(-3 - 1)^2 + (k + 2)^2 = 25 \rightarrow 16 + k^2 + 4k + 4 - 25 = 0 \rightarrow k^2 + 4k - 5 = 0$

$$k = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} k = -5 \\ k = 1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones, $k = -5$, $k = 1$.

**75.** **Las rectas $r: x - y + 1 = 0$; $s: x + y + 9 = 0$ y $t: 4x - y - 14 = 0$ forman un triángulo $ABC$. Halla las coordenadas de los vértices.**

Los vértices del triángulo son los puntos donde se intersecan las rectas.

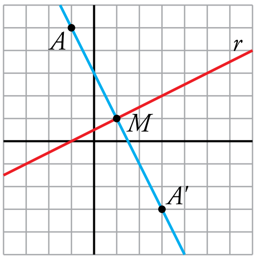
$$r \cap s \left\{\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 9 = 0 \\ \hline 2x + 10 = 0 \rightarrow x = -5,\ y = -4 \end{array}\right\} r \cap s\text{: } A(-5, -4)$$

$$r \cap t \left\{\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} -x + y - 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 3x - 15 = 0 \rightarrow x = 5,\ y = 6 \end{array} \Bigg\} r \cap t\text{: } B(5, 6)$$

$$s \cap t \left\{\begin{array}{l} x + y + 9 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 5x - 5 = 0 \rightarrow x = 1,\ y = -10 \end{array}\right\} s \cap t\text{: } C(1, -10)$$

**76.** **Dados la recta $r: x - 2y + 1 = 0$ y el punto $A(-1, 5)$, halla el punto simétrico de $A$ respecto de $r$.**

El punto simétrico de $A$ respecto a $r$, $A'$, es el punto simétrico de $A$ respecto de un punto $M$, que es el punto de corte de $r$ con la recta perpendicular a $r$ que pasa por $A$.




- Determinamos, en primer lugar, la ecuación de la recta $s$, perpendicular a $r$ que pasa por $A$:

$$r: x - 2y + 1 = 0 \to r: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \to m_r = \frac{1}{2} \to m_s = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} A(-1, 5) \in s \\ m_s = -2 \end{array}\right\} \to s: y = 5 - 2(x + 1) \to s: y = -2x + 3 \to s: 2x + y - 3 = 0$$

- Hallamos el punto de corte de $r$ y $s$:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times 2} \begin{array}{r} x - 2y + 1 = 0 \\ 4x + 2y - 6 = 0 \\ \hline 5x \quad\quad - 5 = 0 \end{array} \to x = 1 \to 1 - 2y + 1 = 0 \to y = 1$$

Luego, $M(1, 1)$.

- El punto $M(1, 1)$ es el punto medio entre $A(-1, 5)$ y $A'(x, y)$ siendo $A'$ el punto simétrico de $A$ respecto a $r$:

$$\left.\begin{array}{l} A(-1, 5) \\ A'(x, y) \\ M(1, 1) \end{array}\right\} \to \left(\frac{-1 + x}{2}, \frac{5 + y}{2}\right) = (1, 1) \to \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-1 + x}{2} = 1 \\ \dfrac{5 + y}{2} = 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array}\right. \to A'(3, -3)$$

Por tanto, el punto simétrico de $A$ respecto a $r$ es $A'(3, -3)$.

**77.** **Demuestra analíticamente que el punto $B(6, 4)$ es el punto simétrico de $A(-2, 2)$ respecto de la recta $4x + y - 11 = 0$.**

Veremos que la recta que pasa por $A$ y $B$, $s$, es perpendicular a $r: 4x + y - 11 = 0$ y que el punto medio del segmento $AB$ pertenece a $r$.

- $$\left.\begin{array}{l} r: 4x + y - 11 = 0 \to r: y = -4x + 11 \to m_r = -4 \\ \left.\begin{array}{l} A(-2, 2) \\ B(6, 4) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AB}(8, 2) \to m_s = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} m_r \cdot m_s = -1 \to r \perp s$$

- $$\left.\begin{array}{l} A(-2, 2) \\ B(6, 4) \end{array}\right\} M\left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) \to M(2, 3)$$

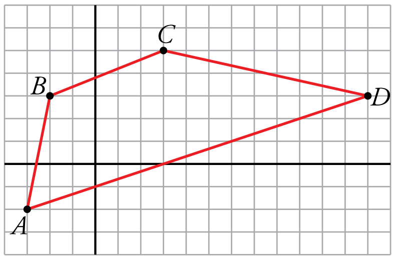
$$\left.\begin{array}{l} M(2, 3) \\ r: 4x + y - 11 = 0 \end{array}\right\} 4 \cdot 2 + 3 - 11 = 0 \to M \in r$$

Por tanto, $B$ es el simétrico de $A$ respecto a $r$.

# Problemas "+"

**78.** **Dibuja el cuadrilátero de vértices $A(-3, -2)$, $B(-2, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(12, 3)$. Comprueba si es un trapecio.**

**Si no lo es, rectifica las coordenadas del punto $D$ para que lo sea.**




El cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio si tiene un par de lados paralelos. Gráficamente se ve que $AB$ no es paralelo a $DC$. Estudiemos qué ocurre con $AD$ y $BC$:

$$\left.\begin{array}{l} A(-3, -2) \\ D(12, 3) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AD}(15, 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} B(-2, 3) \\ C(3, 5) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{BC}(5, 2)$$

$$\frac{15}{5} \neq \frac{5}{2} \to \overrightarrow{AD} \text{ no es paralelo a } \overrightarrow{BC} \to \text{no es un trapecio}$$

Si tomamos $D(12, 4)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} A(-3, -2) \\ D(12, 4) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AD}(15, 6) = 3 \cdot \overrightarrow{BC} \to AD \,//\, BC \to ABCD \text{ es un trapecio.}$$

**79.** **Determina el punto de la recta $r$: $4x - 8y + 7 = 0$ que equidiste de los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$.**

- $r: 4x - 8y + 7 = 0 \to r: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{8} \to$ Las coordenadas de un punto $P \in r$ son de la forma $P\left(x, \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}\right)$.

- $P$ equidista de $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$:

  $dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \to |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = \left(x - 2, \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\right) \\ \overrightarrow{BP} = \left(x - 1, \frac{1}{2}x + \frac{31}{8}\right) \end{array}\right\} |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \to$$

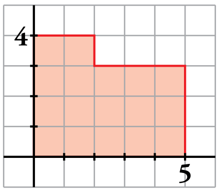
$$\to \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{31}{8}\right)^2} \to$$

$$\to x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{64} = x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{31}{8}x + \frac{961}{64} \to$$

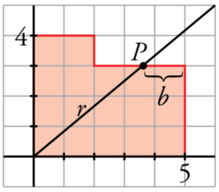
$$\to -6x = 12 \to x = -2 \to P\left(-2, \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{7}{8}\right) = P\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$$

  El punto buscado es $P\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$.

**80.** **Tenemos una parcela irregular representada en unos ejes de coordenadas como indica la siguiente figura:**




**Queremos dividirla en dos partes de igual área mediante una recta que pase por el origen de coordenadas. ¿Cuál será la ecuación de esa recta?**




Área parcela = 17 u$^2$

Área trapecio $= \dfrac{5+b}{2} \cdot 3 = \dfrac{17}{2} \;\rightarrow\; b = \dfrac{2}{3}$

Coordenadas del punto $P$: $\left(5 - \dfrac{2}{3}, 3\right) = \left(\dfrac{13}{3}, 3\right)$

Ecuación de $r$: $m = \dfrac{3}{\frac{13}{3}} = \dfrac{9}{13}$; $y = mx \;\rightarrow\; y = \dfrac{9}{13}x$

# Reflexiona sobre la teoría

**81.** **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

**a) Dos vectores con la misma dirección no se pueden sumar.**

**b) Dos vectores opuestos tienen igual dirección.**

**c) Si $\vec{u} = k\vec{v}$, y $k < 0$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección.**

**d) Si $\vec{u} = -\vec{v}$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen igual módulo.**

**e) La ecuación $x^2 + y^2 + 25 = 0$ representa una circunferencia.**

**f) La recta $3x + y = 0$ es perpendicular a $y = \frac{1}{3}x + 1$.**

**g) Las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son:**

$$M\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$$

a) Falso: se pueden sumar vectores de la misma o de distinta dirección.

b) Verdadero: $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u}$

c) Falso: tienen la misma dirección y sentidos contrarios.

d) Verdadero.

e) Falso. La ecuación de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio $r$ es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

y $x^2 + y^2 + 25 = 0$ no se puede expresar de esa forma.

f) Verdadero:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 0 \;\rightarrow\; y = -3x \;\rightarrow\; m = -3 \\ y = \dfrac{1}{3}x + 1 \;\rightarrow\; m' = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \; m \cdot m' = -1 \;\rightarrow\; \text{son perpendiculares.}$$

g) Falso, es $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

**82.** **Sabes que la expresión $ax + by + c = 0$ es la ecuación de una recta. Di cómo es la recta en los siguientes casos:**

**a)** $a = 0$

**b)** $b = 0$

**c)** $c = 0$

**d)** $a = 0,\ c = 0$

a) $by + c = 0$ es paralela al eje $X$.

b) $ax + c = 0$ es paralela al eje $Y$.

c) $ax + by = 0$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas, (0, 0).

d) $by = 0 \rightarrow y = 0$. Es el eje $X$.

**83.** **Si dos rectas $r_1$ y $r_2$ son perpendiculares, ¿cuál de estas condiciones cumplirán sus pendientes?**

**a)** $m_1 = \frac{1}{m_2}$

**b)** $m_1 = -m_2$

**c)** $m_1 \cdot m_2 = -1$

**d)** $m_1 + m_2 = -1$

La condición c): $m_1 \cdot m_2 = -1$.

**84.** **¿Cuál de estas expresiones nos da la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$?**

**a)** $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

**b)** $\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$

**c)** $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

**d)** $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

La c), $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

## Página 186

# Infórmate

## Espacios de muchas dimensiones

- **Calcula la distancia entre los puntos del espacio $A(6, -3, 7)$ y $B(5, -5, 5)$.**

$\overrightarrow{AB} = (5 - 6, -5 + 3, 5 - 7) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -2, -2)$

$dist\,(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

- **Calcula, también, el punto medio del segmento $AB$.**

Punto medio de $AB$:

$$M\left(\frac{6+5}{2}, \frac{-3+(-5)}{2}, \frac{7+5}{2}\right) \rightarrow M\left(\frac{11}{2}, -4, 6\right)$$

# Observa, reflexiona y decide

## Zonas de pasto

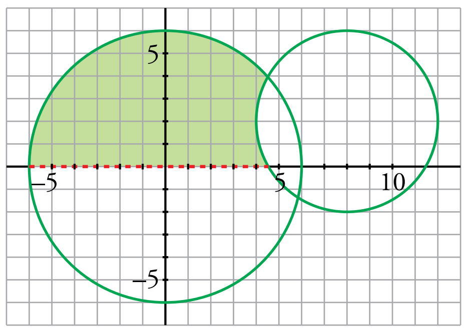
- **Tomando como centro de coordenadas la argolla y como eje de abscisas la valla, ¿qué zona del prado delimita cada sistema de inecuaciones?**

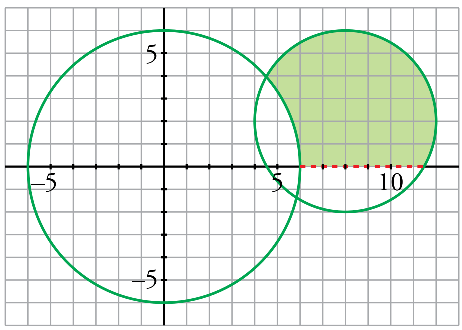
**a)** $x^2 + y^2 \le 6^2$, $y > 0$, $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 \ge 4^2$

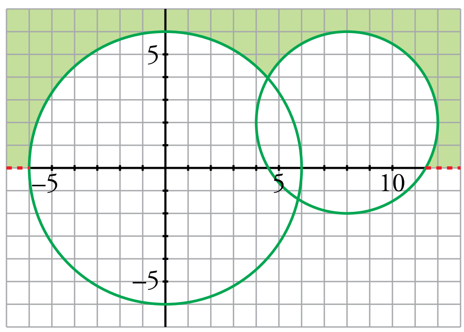
**b)** $x^2 + y^2 \ge 6^2$, $y > 0$, $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 \le 4^2$

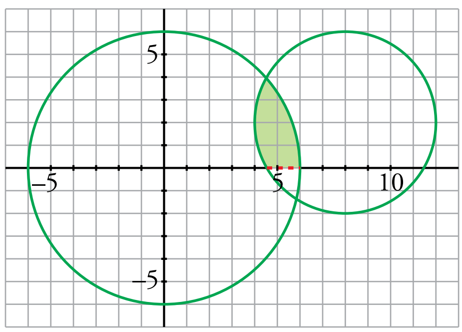
**c)** $x^2 + y^2 \ge 6^2$, $y > 0$, $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 \ge 4^2$

**d)** $x^2 + y^2 \le 6^2$, $y > 0$, $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 \le 4^2$

a)



b)


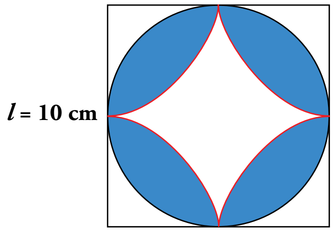

c)



d)


## Página 187

# Entrénate resolviendo problemas

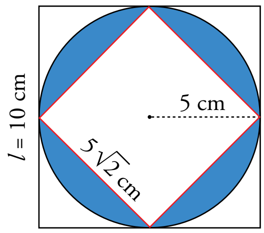
- **Halla el área de la parte coloreada.**




El área que buscamos es el doble de la que está coloreada en esta figura:

Calculamos primero el lado del cuadrado interior:

Lado = $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm

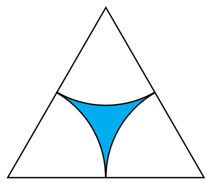


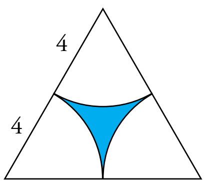

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \\ A_{\text{CUADRADO INTERIOR}} = (5\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 \end{array}\right\} \text{La diferencia es } 25(\pi - 2).$$

El área pedida es $A = 2 \cdot 25(\pi - 2) = 57{,}08 \text{ cm}^2$

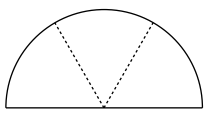
- **Tomando como centro cada uno de los vértices de un triángulo equilátero, se han trazado tres arcos de radio 4 cm, como indica la figura.**

  **Halla el área de la zona coloreada.**



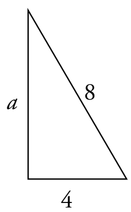



La parte no coloreada es medio círculo de radio 4 cm.



Calcularemos el área del triángulo, el área del semicírculo y, finalmente, el área de la zona coloreada.

La altura del triángulo es $a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} = 6{,}93$ cm

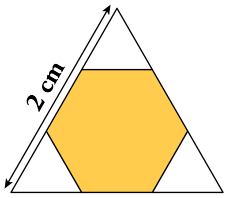



$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{8a}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} = 27{,}71 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEMICÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 8\pi = 25{,}13 \text{ cm}^2$$

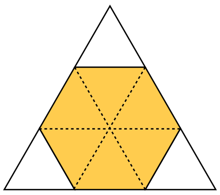
$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 16\sqrt{3} - 8\pi = 2{,}58 \text{ cm}^2$$

- **Halla la superficie del hexágono.**




Altura del triángulo $= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm$^2$

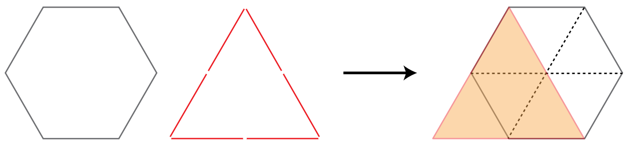


El área del hexágono es $\dfrac{2}{3}$ de la del triángulo.

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 1{,}15$ cm$^2$

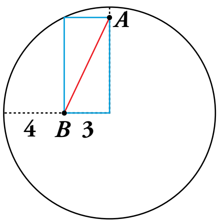
- **Calcula el área de un hexágono regular sabiendo que tiene el mismo perímetro que un triángulo equilátero cuya superficie mide 12 cm$^2$.**

Para que el perímetro de un triángulo equilátero sea igual que el de un hexágono regular, el lado del primero debe ser el doble que el del segundo.



El área del triángulo es $\dfrac{4}{6}$ de la del hexágono. Por tanto: $A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{6}{4} \cdot 12 = 18$ cm$^2$

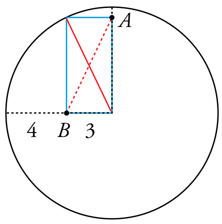
- **Calcula la longitud del segmento $AB$.**



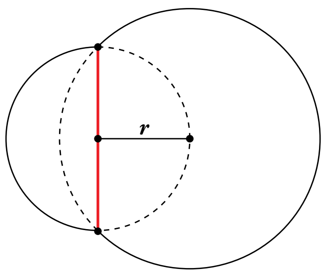

Las dos diagonales del rectángulo son iguales.

Por tanto:

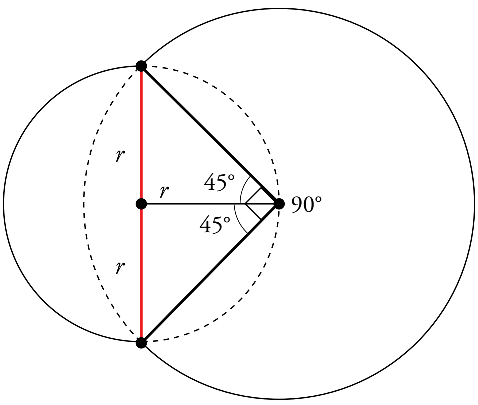
$\overline{AB}$ = radio de la circunferencia = 3 + 4 = 7 unidades.




- **Halla el perímetro externo de toda la figura, sabiendo que el radio de la circunferencia menor es $r = 1$ cm.**




El radio de la circunferencia grande es: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm




El perímetro está formado por media circunferencia pequeña y tres cuartos de circunferencia grande. Por tanto, su longitud es:

$$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 1) + \frac{3}{4} \cdot (2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}) = \pi \cdot \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 9{,}81 \text{ cm}$$

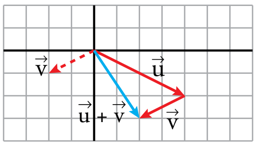
# Autoevaluación

**1. Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:**

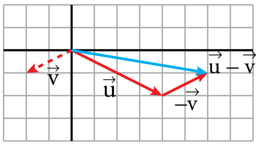
**a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.**

**b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.**

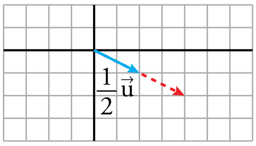
a)



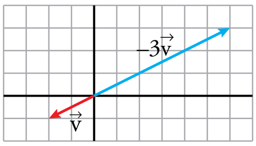

$\vec{u} + \vec{v} = (4, -2) + (-2, -1) = (2, -3)$




$\vec{u} - \vec{v} = (4, -2) - (-2, -1) = (6, -1)$



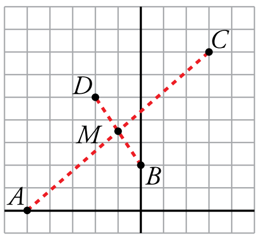

$\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(4, -2) = (2, -1)$




$-3\vec{v} = -3(-2, -1) = (6, 3)$

b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \rightarrow \vec{w} = 2(4, -2) + 3(-2, -1) \rightarrow \vec{w} = (8, -4) + (-6, -3) \rightarrow \vec{w} = (2, -7)$

**2. Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de $AC$ coincide con el punto medio de $BD$.**




Punto medio de $AC$: $M\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

Punto medio de $BD$: $M\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{2+5}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

**3. Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.**

Sea $Q(a, b)$ el simétrico de $P$ respecto de $M$. $M$ es el punto medio de $PQ$.

$$M_{PQ} = \left(\frac{-7+a}{2}, \frac{-15+b}{2}\right) = (2, 0) \begin{cases} -7 + a = 4 \rightarrow a = 11 \\ -15 + b = 0 \rightarrow b = 15 \end{cases}$$

**4. Halla el valor de $k$ para que los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Para que $A$, $B$ y $C$ estén alineados, debe ser $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$ y, por tanto, sus coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5) \\ \overrightarrow{BC} = (6, k) - (3, 0) = (3, k)\end{array}\right\} \frac{2}{3} = \frac{5}{k} \to k = \frac{15}{2}$$

**5. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de la recta que pasa por el punto $P(3, -2)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(-1, 5)$.**

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{d}$

$(x, y) = (3, -2) + t \cdot (-1, 5)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x - 3}{-1} = \dfrac{y + 2}{5}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando $y$ en la ecuación anterior:

$$5x - 15 = -y - 2 \to y = -5x + 13$$

**6. Obtén las ecuaciones de las rectas $r$ y $s$ y su punto de intersección:**

**$r$ pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.**

**$s$ pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$**

- La pendiente de $8x - 3y + 6 = 0$ es $m = \dfrac{8}{3}$.

  La pendiente de $r$ es $m' = -\dfrac{3}{8}$.

  $r: y = 2 - \dfrac{3}{8}(x + 3) \to 8y = 16 - 3x - 9 \to 3x + 8y - 7 = 0$

- La pendiente de $s$ es $m = -2$.

  $s: y = -\dfrac{5}{2} - 2(x - 9) \to 2y = -5 - 4x + 36 \to 4x + 2y - 31 = 0$

- Punto de corte:

  $\begin{cases} 3x + 8y - 7 = 0 \\ 4x + 2y - 31 = 0 \end{cases} \to x = 9,\ y = -\dfrac{5}{2}$

  Las rectas se cortan en el punto $\left(9, -\dfrac{5}{2}\right)$.

**7. En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de $B$.**

La mediana que parte de $B$ pasa por $B$ y el punto medio del segmento $AC$.

$$M_{AC} = \left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = (2, 3)$$

Ecuación de la mediana: $\dfrac{x - 0}{2 - 0} = \dfrac{y - 7}{3 - 7} \to -4x = 2y - 14 \to 2x + y - 7 = 0$

**8.** **Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.**

$\overrightarrow{AB} = (10, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2, -4)$; $\overrightarrow{BC} = (-8, -6)$, por tanto:

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

**9.** **Estudia la posición relativa de estas rectas:**

$$\boldsymbol{r: 2x + y - 2 = 0 \qquad s: x + \frac{1}{2}y = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} r: 2x + y - 2 = 0 \xrightarrow{(*)} x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2}y = 1 \\ s: x + \frac{1}{2}y = 1 \end{array}\right\} \text{Son la misma recta.}$$

(*) Dividimos por 2.

**10.** **Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -3)$ y pasa por el punto $A(3, 0)$.**

- Radio de la circunferencia = *dist* $(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Centro} \rightarrow C(0, -3) \\ \text{Radio} \rightarrow r = \sqrt{18} \end{array}\right\} \rightarrow c: (x-0)^2 + (y+3)^2 = 18 \rightarrow c: x^2 + y^2 + 6y - 9 = 0$$

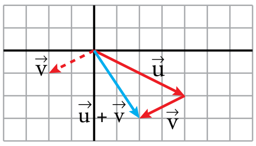
# Autoevaluación

**1.** **Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:**

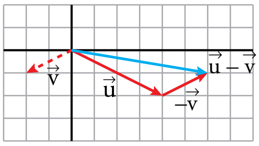
**a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.**

**b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.**

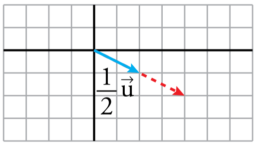
a)



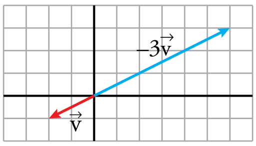

$\vec{u} + \vec{v} = (4, -2) + (-2, -1) = (2, -3)$




$\vec{u} - \vec{v} = (4, -2) - (-2, -1) = (6, -1)$



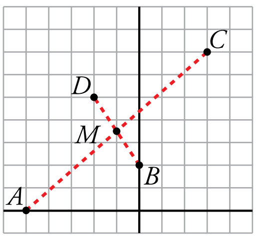

$\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(4, -2) = (2, -1)$




$-3\vec{v} = -3(-2, -1) = (6, 3)$

b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \rightarrow \vec{w} = 2(4, -2) + 3(-2, -1) \rightarrow \vec{w} = (8, -4) + (-6, -3) \rightarrow \vec{w} = (2, -7)$

**2.** **Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de $AC$ coincide con el punto medio de $BD$.**




Punto medio de $AC$: $M\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

Punto medio de $BD$: $M\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{2+5}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

**3.** **Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.**

Sea $Q(a, b)$ el simétrico de $P$ respecto de $M$. $M$ es el punto medio de $PQ$.

$$M_{PQ} = \left(\frac{-7+a}{2}, \frac{-15+b}{2}\right) = (2, 0) \quad \begin{cases} -7 + a = 4 \rightarrow a = 11 \\ -15 + b = 0 \rightarrow b = 15 \end{cases}$$

**4. Halla el valor de $k$ para que los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Para que $A$, $B$ y $C$ estén alineados, debe ser $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$ y, por tanto, sus coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5)\\ \overrightarrow{BC} = (6, k) - (3, 0) = (3, k)\end{array}\right\} \ \frac{2}{3} = \frac{5}{k} \ \to \ k = \frac{15}{2}$$

**5. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de la recta que pasa por el punto $P(3, -2)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(-1, 5)$.**

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{d}$

$(x, y) = (3, -2) + t \cdot (-1, 5)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x - 3}{-1} = \dfrac{y + 2}{5}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando $y$ en la ecuación anterior:

$$5x - 15 = -y - 2 \ \to \ y = -5x + 13$$

**6. Obtén las ecuaciones de las rectas $r$ y $s$ y su punto de intersección:**

**$r$ pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.**

**$s$ pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$**

- La pendiente de $8x - 3y + 6 = 0$ es $m = \dfrac{8}{3}$.

  La pendiente de $r$ es $m' = -\dfrac{3}{8}$.

  $r: y = 2 - \dfrac{3}{8}(x + 3) \ \to \ 8y = 16 - 3x - 9 \ \to \ 3x + 8y - 7 = 0$

- La pendiente de $s$ es $m = -2$.

  $s: y = -\dfrac{5}{2} - 2(x - 9) \ \to \ 2y = -5 - 4x + 36 \ \to \ 4x + 2y - 31 = 0$

- Punto de corte:

  $\begin{cases} 3x + 8y - 7 = 0 \\ 4x + 2y - 31 = 0 \end{cases} \ \to \ x = 9, \ y = -\dfrac{5}{2}$

  Las rectas se cortan en el punto $\left(9, -\dfrac{5}{2}\right)$.

**7. En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de $B$.**

La mediana que parte de $B$ pasa por $B$ y el punto medio del segmento $AC$.

$$M_{AC} = \left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = (2, 3)$$

Ecuación de la mediana: $\dfrac{x - 0}{2 - 0} = \dfrac{y - 7}{3 - 7} \ \to \ -4x = 2y - 14 \ \to \ 2x + y - 7 = 0$

**8. Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.**

$\overrightarrow{AB} = (10, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2, -4)$; $\overrightarrow{BC} = (-8, -6)$, por tanto:

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

**9. Estudia la posición relativa de estas rectas:**

$$\boldsymbol{r: 2x + y - 2 = 0 \qquad s: x + \frac{1}{2}y = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} r: 2x + y - 2 = 0 \xrightarrow{(*)} x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2}y = 1 \\ s: x + \frac{1}{2}y = 1 \end{array}\right\} \text{Son la misma recta.}$$

(*) Dividimos por 2.

**10. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -3)$ y pasa por el punto $A(3, 0)$.**

- Radio de la circunferencia $= dist\,(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Centro} \rightarrow C(0, -3) \\ \text{Radio} \rightarrow r = \sqrt{18} \end{array}\right\} \rightarrow c: (x-0)^2 + (y+3)^2 = 18 \rightarrow c: x^2 + y^2 + 6y - 9 = 0$$