1 Función de proporcionalidad $y = mx$

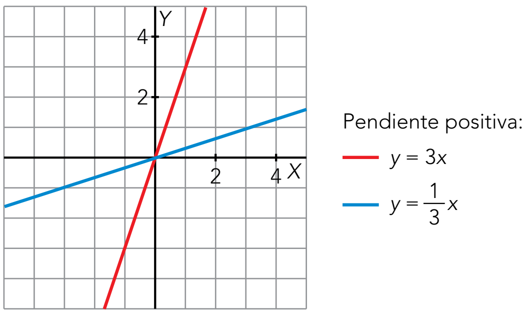
Página 123

1. Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.

Para que las rectas pasen por el origen, deben ser de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

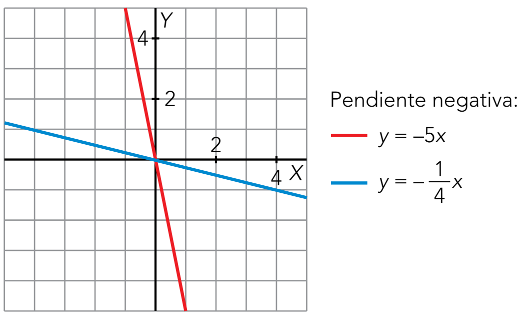
Ejemplos de rectas con pendiente positiva:

- $y = 3x$, con pendiente 3 e $y = \frac{1}{3}x$, con pendiente $\frac{1}{3}$.



Ejemplos de rectas con pendiente negativa:

- $y = -5x$, con pendiente -5 e $y = \frac{-1}{4}x$, con pendiente $\frac{-1}{4}$.



2 Gráfica y ecuación de la función de proporcionalidad

Página 124

1. Representa las funciones siguientes:

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$

d) $y = -2x$ **e)** $y = \frac{1}{3}x$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ **h)** $y = \frac{-3}{2}x$ **i)** $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

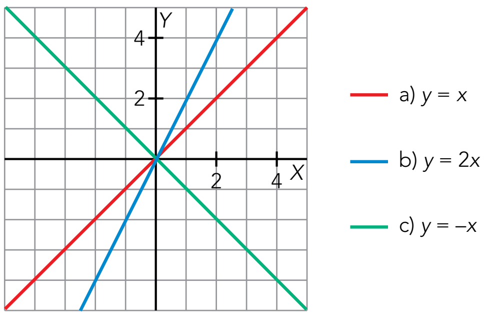
x	y = x
–3	–3
0	0
3	3

b)

x	y = 2x
–2	–4
0	0
2	4

c)

x	y = –x
–2	2
0	0
2	–2



d)

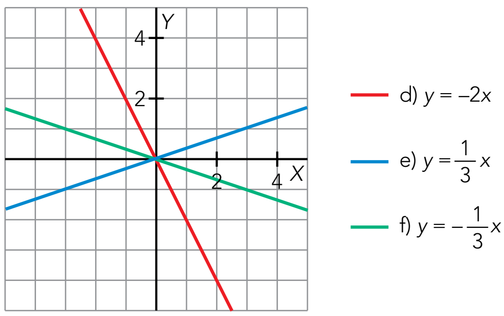
x	y = –2x
–1	2
0	0
1	–2

e)

x	y = 1/3x
–3	–1
0	0
3	1

f)

x	y = –1/3 x
–3	1
0	0
3	–1



g)

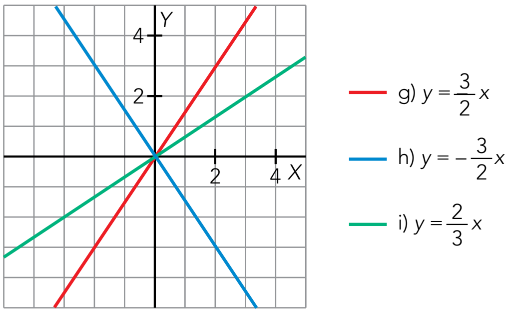
x	$y = 3/2x$
–2	–3
0	0
2	3

h)

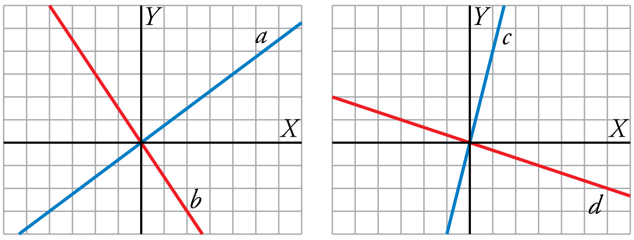
x	$y = -3/2x$
–2	3
0	0
2	–3

i)

x	$y = 2/3x$
–3	–2
0	0
3	2



2. Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:



Buscamos puntos de coordenadas enteras para calcular la pendiente.

- La recta a pasa por los puntos (0, 0) y (4, 3). Su pendiente es $\frac{3}{4}$. Su ecuación es $y = \frac{3}{4}x$.
- La recta b pasa por los puntos (0, 0) y (2, –3). Su pendiente es $-\frac{3}{2}$. Su ecuación es $y = -\frac{3}{2}x$.
- La recta c pasa por los puntos (0, 0) y (1, 4). Su pendiente es 4. Su ecuación es $y = 4x$.
- La recta d pasa por los puntos (0, 0) y (6, –2). Su pendiente es $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. Su ecuación es $y = -\frac{1}{3}x$.

3 La función $y = mx + n$

Página 125

1. Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = 3 - 2x$ **c)** $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ **e)** $y = -2$ **f)** $y = \frac{5x-3}{2}$

Representamos las funciones:

a)

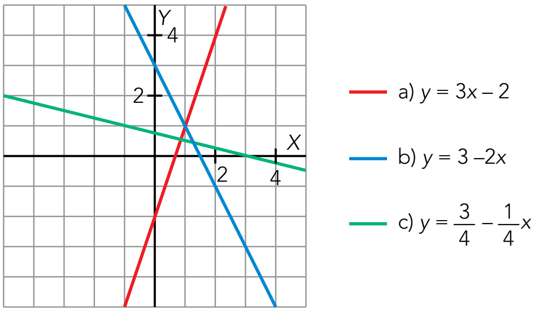
x	$y = 3x - 2$
–1	–5
0	–2
1	1

b)

x	$y = 3 - 2x$
–1	5
0	3
1	1

c)

x	$y = 3/4 - 1/4x$
–1	1
0	3/4
3	0



d)

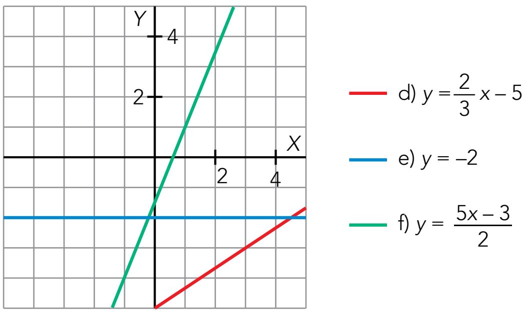
x	$y = 2/3x - 5$
0	–5
3	–3
6	–1

e)

x	$y = -2$
–2	–2
0	–2
2	–2

f)

x	$y = (5x - 3)/2$
–1	–4
0	–3/2
1	1



2. Medimos el grosor de los libros de una misma colección. Cada una de las cubiertas tiene un grosor de 5 mm. Sabiendo que el grosor de 200 páginas es de 1 cm, escribe la ecuación de la función *número de páginas* → *grosor del libro* y represéntala en unos ejes.

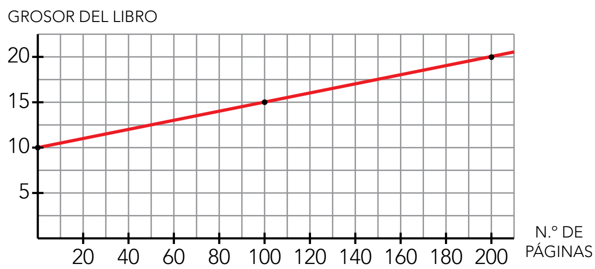
El grosor de las cubiertas es $2 \cdot 5 = 10$ mm.

1 cm = 10 mm

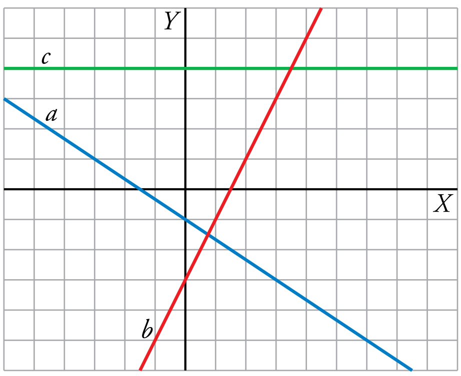
Una página tiene un grosor de $\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ mm.

La función es: $f(x) = \frac{1}{20}x + 10$

x	$y = 1/20x + 10$
0	10
100	15
200	20



3. Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje Y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por $(0, -1)$ y $(3, -3)$:

$$\left.\begin{array}{l} m = -\frac{2}{3} \\ n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por $(0, -3)$ y $(2, 1)$:

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por $(0, 4)$ y $(4, 4)$:

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{0}{4} \\ n = 4 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0x + 4 \rightarrow y = 4$$

4 Recta de la que se conocen un punto y la pendiente

Página 126

1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ **b)** $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$ **c)** $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$

d) $P(0, 0)$, $m = -1$ **e)** $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$ **f)** $P(0, -2)$, $m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x - 4) \to y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x - 0) \to y = 2 - \frac{1}{2}x$

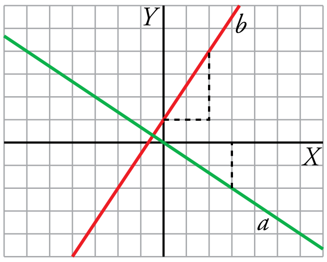
c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3) \to y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x + 0) \to y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x + 1) \to y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x + 0) \to y = -2$

2. Escribe la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.



Tomamos dos puntos con coordenadas enteras:

- Recta a:

$P(0, 0)$ y $m = \frac{-2}{3} \to y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) \to y = -\frac{2}{3}x$

En lugar de $P(0, 0)$, tomamos $Q(3, -2)$:

$Q(3, -2)$ y $m = \frac{-2}{3} \to y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) \to y = -2 - \frac{2}{3}x + 2 \to y = -\frac{2}{3}x$

Obtenemos la misma ecuación.

- Recta b:

$R(0, 1)$ y $m = \frac{3}{2} \to y = 1 + \frac{3}{2}(x - 0) \to y = \frac{3}{2}x + 1$

En lugar de $R(0, 1)$, tomamos $S(2, 4)$:

$S(2, 4)$ y $m = \frac{3}{2} \to y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \to y = 4 + \frac{3}{2}x - 3 \to y = \frac{3}{2}x + 1$

Obtenemos la misma ecuación.

5 Recta que pasa por dos puntos

Página 127

1. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$ c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$

d) $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$ e) $P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$ f) $P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \dfrac{6-5}{-3-2} = -\dfrac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\dfrac{1}{5} \to y = 5 - \dfrac{1}{5}(x-2) \to y = \dfrac{27}{5} - \dfrac{1}{5}x$

b) $m = \dfrac{-1-(-4)}{-2-3} = -\dfrac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\dfrac{3}{5} \to y = -4 - \dfrac{3}{5}(x-3) \to y = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{5}x$

c) $m = \dfrac{5-0}{5-(-1)} = \dfrac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\dfrac{5}{6} \to y = 0 + \dfrac{5}{6}(x+1) \to y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{6}$

d) $m = \dfrac{4-1}{3-(-7)} = \dfrac{3}{10}$

Recta que pasa por $P(-7, 1)$ y tiene pendiente $\dfrac{3}{10} \to y = 1 + \dfrac{3}{10}(x+7) \to y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{31}{10}$

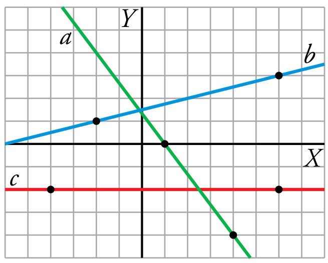
e) $m = \dfrac{1-1}{-2-3} = 0$

Recta que pasa por $P(3, 1)$ y tiene pendiente $0 \to y = 1 - 0(x-3) \to y = 1$

f) $m = \dfrac{5-(-2)}{2-2} = \dfrac{7}{0} \to$ Es una recta vertical (pendiente infinita).

La ordenada de cualquier abscisa es $2 \to x = 2$

2. Halla las ecuaciones de las rectas a, b y c. Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.



- En la recta a:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{-4}{3} \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \to y = 0 + \left(\dfrac{-4}{3}\right)(x-1) \to y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3}x$$

- En la recta b:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \\ P(-2, 1) \end{array}\right\} \to y = 1 + \dfrac{1}{4}(x+2) \to y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$$

- En la recta c:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ P(-4, -2) \end{array}\right\} \to y = -2 + 0(x+4) \to y = -2$$

6 Aplicaciones de la función lineal. Problemas de movimientos

Página 128

1. Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). ¿Qué distancia recorre en *t* min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

2. Un robot marcha a 7 m/min. Lo pusimos en marcha hace 2 min. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de *t* min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

En 2 minutos recorre $d = 7 \cdot 2 = 14$ m.

Dentro de t min estará a una distancia $d = 14 + 7t$.

3. Un robot está a 40 m de nosotros y se nos acerca a 5 m/min. ¿A qué distancia estará dentro de *t* min?

Si llamamos d a la distancia que estará de nosotros, $d = 40 - 5t$.

4. A las 10:00 alquilamos una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. ¿Cuánto nos han de devolver si la llevamos de vuelta a las *t* horas de ese día?

Si llamamos D al dinero que han de devolvernos, $D = 100 - 5(t - 10)$.

7 Estudio conjunto de dos funciones

Página 129

1. Un tren AVE ha salido a las 10 de la mañana de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías ha salido a la misma hora de nuestra ciudad y va a 50 km/h por un vía paralela a la del AVE.

a) Expresa mediante dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren al cabo de t horas.

b) Representa las dos rectas correspondientes a las funciones en unos ejes de coordenadas.

c) Indica en qué punto se cortan las dos rectas y di qué significa cada una de sus coordenadas.

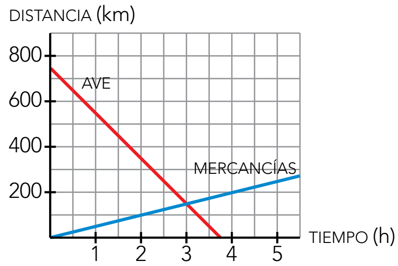
d) Calcula mediante un sistema de ecuaciones la hora a la que se cruzan los trenes y a qué distancia de nuestra ciudad se encuentran.

a) Si llamamos d a la distancia que hay desde nuestra ciudad a cada tren al cabo de t horas:

$d_{\text{AVE}} = 750 - 200t$

$d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t$

b)



c) Se cortan en el punto (3, 150), lo que significa que se cruzarán a las 3 horas, a 150 km de distancia de nuestra ciudad.

d) $\left.\begin{array}{l} d_{\text{AVE}} = 750 - 200t \\ d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t \end{array}\right\} \rightarrow 750 - 200t = 50t \rightarrow 750 = 250t \rightarrow t = 3 \text{ horas}$

Para $t = 3$ horas, $d_{\text{AVE}} = d_{\text{MERCANCÍAS}} = 150$ km

Se encuentran a las 3 horas, a 150 km de nuestra ciudad.

8 Parábolas y funciones cuadráticas

Página 130

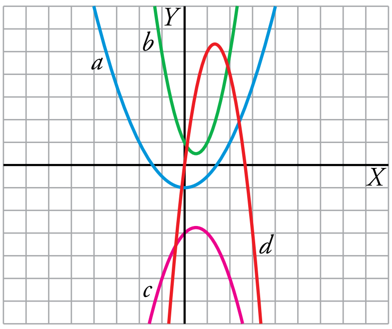
1. **Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:**

I) $y = 2x^2 - 2x + 1$

II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

IV) $y = -3x^2 + 8x$



I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

Página 131

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

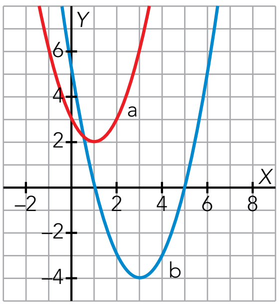
La parábola no corta al eje X.

x	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



3. Dibuja estas funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

Calculamos, en ambos casos, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$

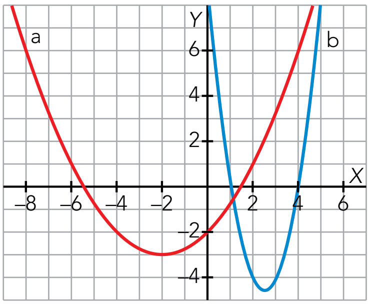
$$\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0 \to x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2\sqrt{3} \to \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \to (-2 + 2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \to (-2 - 2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

x	-6	$-2-2\sqrt{3}$	-4	-2	0	$-2+2\sqrt{3}$	2
y	1	0	-2	-3	-2	0	1

b) $p = \dfrac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{2}$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \to x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} \to \begin{cases} x = 4 \to (4, 0) \\ x = 1 \to (1, 0) \end{cases}$$

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	8	0	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	0	8



Página 132

4. Un águila está a 1 120 m de altura. Se lanza en picado hacia abajo a 20 m/s en el mismo momento que desde el suelo sale hacia arriba una bala a 160 m/s. La ecuación del movimiento de la bala es: *altura* = $160t - 5t^2$. ¿En qué momento las alturas del águila y la bala coinciden?

Altura del águila: $A(t) = 1\,120 - 20t$

Altura de la bala: $B(t) = 160t - 5t^2$

Queremos ver dónde coinciden las dos:

$160t - 5t^2 = 1\,120 - 20t \;\rightarrow\; 5t^2 - 180t + 1\,120 = 0$

$$t = \frac{180 \pm \sqrt{32\,400 - 22\,400}}{2 \cdot 5} \;\rightarrow\; \begin{cases} t = 8 \\ t = 28 \end{cases}$$

Coincidirán en los instantes $t = 8$ s y $t = 28$ s.

Ejercicios y problemas

Página 133

Practica

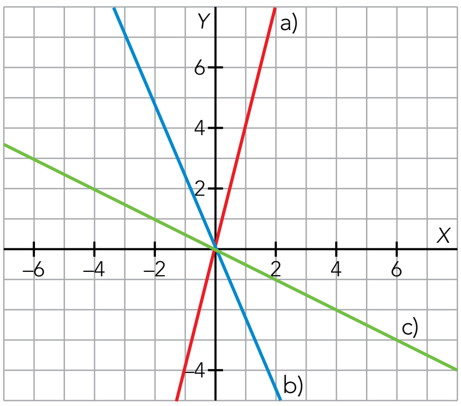
Funciones lineales. Rectas

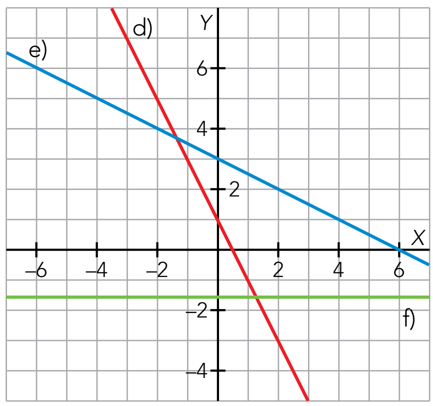
1. **Representa las rectas siguientes:**

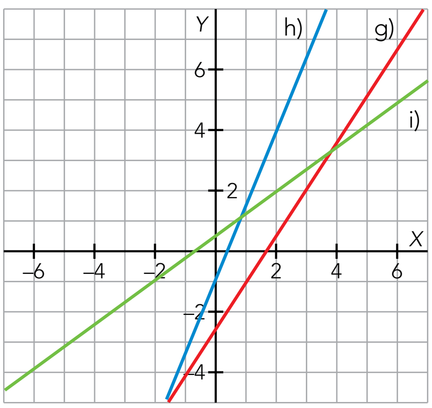
a) $y = 4x$ b) $y = -2{,}4x$ c) $y = -\dfrac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$ e) $y = -\dfrac{x}{2} + 3$ f) $y = -\dfrac{8}{5}$

g) $y = \dfrac{3x - 5}{2}$ h) $y = 2{,}5x - 1$ i) $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$







2. **Asocia cada recta con su ecuación:**

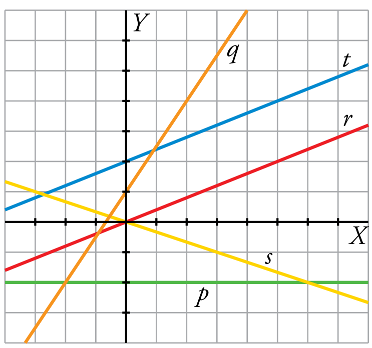
a) $y = -\dfrac{1}{3}x$

b) $y = \dfrac{3}{2}x + 1$

c) $y = \dfrac{2}{5}x$

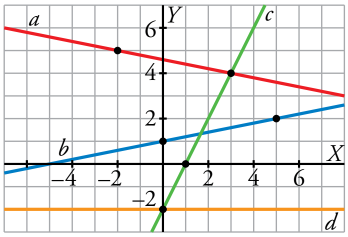
d) $y = \dfrac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$



a) s b) q c) r d) t e) p

3. **a) Escribe la ecuación de cada recta:**



b) ¿Cuáles son funciones crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.

a) Utilizamos los puntos marcados para hallar la pendiente de cada recta.

- La recta a tiene pendiente $m = \frac{-1}{5}$ y pasa por el punto (3, 4).
  Su ecuación es $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3)$.
- La recta b tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$ y pasa por el punto (0, 1).
  Su ecuación es $y = \frac{1}{5}x + 1$.
- La recta c tiene pendiente $m = \frac{4}{2} = 2$ y pasa por (0, –2).
  Su ecuación es $y = 2x - 2$.
- La ecuación de la recta d es $y = -2$.

b) Las funciones b y c son crecientes, y tienen pendiente positiva.
La función a es decreciente, y tiene pendiente negativa.
La función d es constante, y su pendiente es 0.

4. **Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:**

a) $P(-2, 5)$, $m = 3$

b) $P(0, -5)$, $m = -2$

c) $P(0, 0)$, $m = \frac{3}{2}$

d) $P(-2, -4)$, $m = -\frac{2}{3}$

a) $y = 5 + 3(x + 2)$

b) $y = -5 - 2(x - 0) \rightarrow y = -2x - 5$

c) $y = 0 + \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

d) $y = -4 - \frac{2}{3}(x + 2)$

5. **Obtén la ecuación de la recta que pasa por A y B.**

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$

b) $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$

d) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) $m = \frac{4 - (-1)}{3 - 2} = 5$

$y = -1 + 5(x - 2)$

b) $m = \frac{1 - 2}{-3 - (-5)} = \frac{-1}{2}$

$y = 2 - \frac{1}{2}(x + 5)$

c) $m = \dfrac{\frac{2}{3} - 2}{1 - \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \frac{8}{3}$

$y = 2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

d) $m = \dfrac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{10}$

$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

6. **Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?**

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x - 3$ **c)** $2x - y + 1 = 0$ **d)** $4x - 2y + 5 = 0$

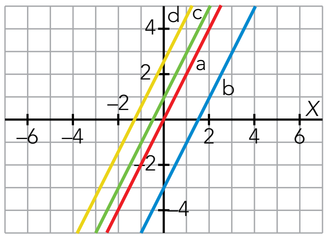
Las pendientes de las rectas son:

a) $m = 2$

b) $m = 2$

c) $2x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow m = 2$

d) $4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

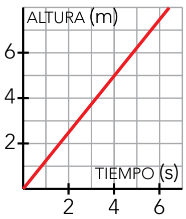
7. **La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función** $a = (5/4)t$ **(*a* en metros, *t* en segundos).**

a) Represéntala. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a) $a(t) = \frac{5}{4}t$. Es una función lineal de pendiente $\frac{5}{4}$. Pasa por los puntos (0, 0) y (4, 5).



Si la altura es 5 m, el dominio de la función es el tramo 0 - 4.

b) Sí, se trata de una función de proporcionalidad.

c) La pendiente es $\frac{5}{4}$. Significa que por cada cuatro segundos que pasen, la altura del depósito aumenta 5 metros.

8. **Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:**

t (min)	0	1	2	3	5
V (*l*)	20	18	16	14	10

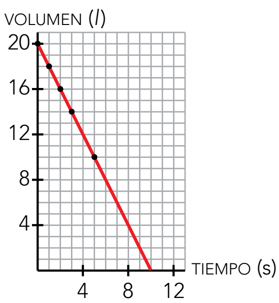
a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

d) ¿Es una función de proporcionalidad?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{-2}{1} = -2$ y su ordenada en el origen es $n = 20$.

La ecuación de la función es $y = -2x + 20$. Su dominio de definición es el tramo 0 - 10.

c) La pendiente es $m = -2$ y significa que por cada minuto que está el desagüe abierto, el volumen de agua que hay en el depósito disminuye 2 litros.

d) No, no es una función de proporcionalidad. Es una función afín.

9. Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

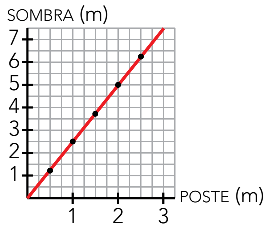
a) Representa la función *longitud del poste* → *longitud de la sombra*.

b) Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.

c) ¿Qué longitud tendrá la sombra de un poste de 3,5 m?

d) ¿Qué longitud tiene un poste que arroja una sombra de 3 m?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{5}{2}$ y pasa por el origen de coordenadas. La ecuación de la función es $y = \frac{5}{2}x$.

c) $y = \frac{5}{2} \cdot 3,5 = 8,75 \rightarrow 8,75 \text{ m}$

d) $3 = \frac{5}{2}x \rightarrow x = \frac{6}{5} \rightarrow x = 1,2 \rightarrow 1,2 \text{ m}$

10. Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.

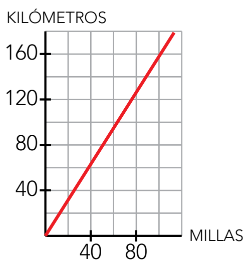
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5	10	20	50	100
KILÓMETROS	1,6	3,2	4,8	6,4	8	16	32	80	160

b) La ecuación es $y = 1,6x$



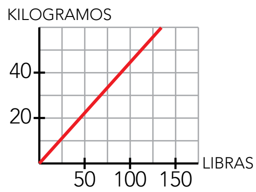
11. **Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:**

a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, *y*, que equivalen a *x* libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

a) x: libras; y: kilos $\rightarrow$ $y = \dfrac{45}{100}x$

b) La gráfica pasa por (0, 0) y por (100, 45)

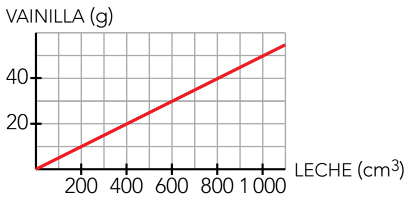


12. **Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.**

Son 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche.

La función que da la relación entre la cantidad de leche, x, y de vainilla, y, es:

$y = \dfrac{10}{200}x \rightarrow y = 0{,}05x$



Página 134

Funciones cuadráticas. Parábolas

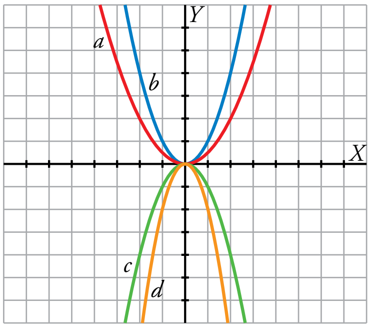
13. **Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:**

I) $y = x^2$

II) $y = -x^2$

III) $y = -2x^2$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



I) b   II) c   III) d   IV) a

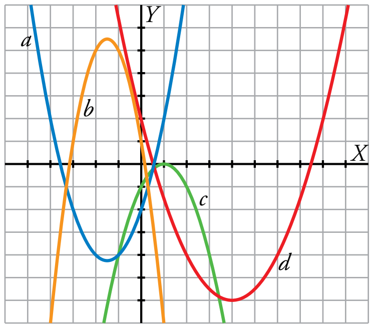
14. **Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:**

I) $y = x^2 + 3x - 2$

II) $y = -x^2 + 2x - 1$

III) $y = -2x^2 - 6x + 1$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



I) a   II) c   III) b   IV) d

15. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4$

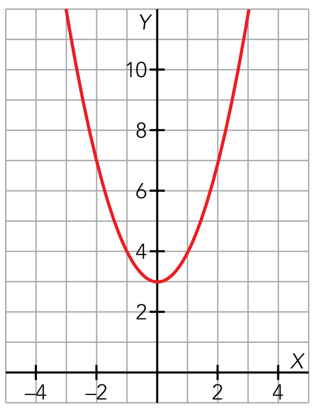
c) $y = 2x^2$ **d)** $y = 0,5x^2$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

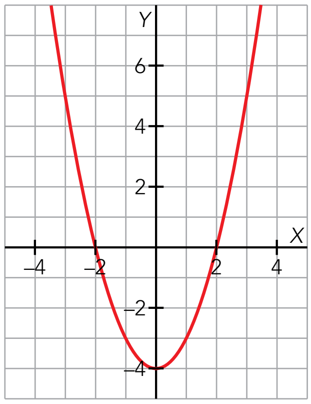
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 3).



b) $y = x^2 - 4$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12

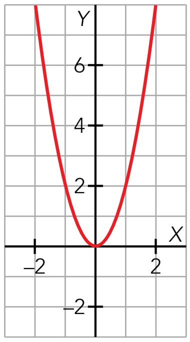
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es $(0, -4)$.



c) $y = 2x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

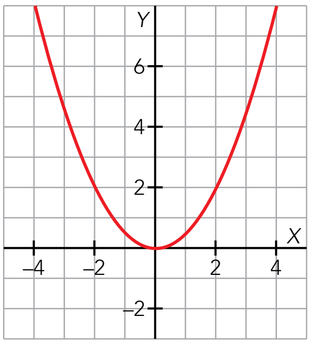
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow$ El vértice es $(0, 0)$



d) $y = 0{,}5x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow$ El vértice es $(0, 0)$



16. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 4)^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$

d) $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x + 4)^2 \rightarrow y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-8}{2} = -4$

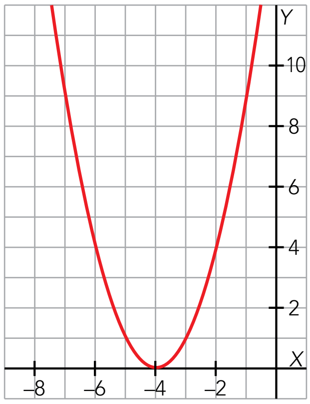
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 0 + 16 \rightarrow (0, 16)$

$y = 0 \rightarrow (x + 4)^2 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (-4, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -3$

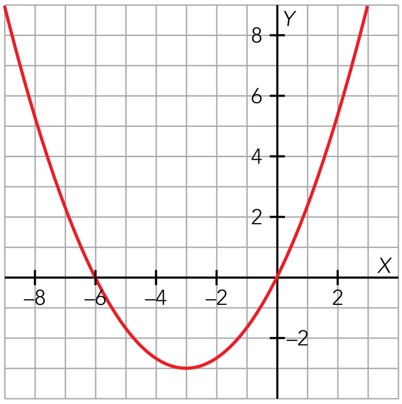
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \rightarrow \dfrac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \rightarrow x\left(\dfrac{1}{3}x + 2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -6 \rightarrow (-6, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–9	–6	–4	–3	–2	0	3
y	9	0	–2,667	–3	–2,667	0	9



c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

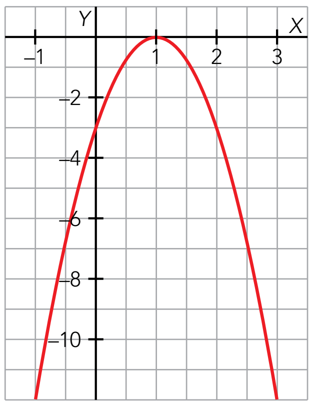
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$y = 0 \rightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow -3(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–1	0	1	2	3
y	–12	–3	0	–3	–12



d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

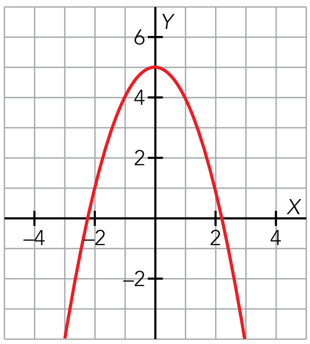
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \rightarrow (-\sqrt{5}, 0) \\ x = \sqrt{5} \rightarrow (\sqrt{5}, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–3	$-\sqrt{5}$	–2	–1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
y	–4	0	1	4	5	4	1	0	–4



Piensa y resuelve

17. **El precio de un billete de tren depende de la distancia recorrida. Por un trayecto de 140 km, pagamos 17 €, y por 360 km, 39 €. Escribe y representa la ecuación de la recta que relaciona los kilómetros recorridos, x, con el precio del billete, y.**

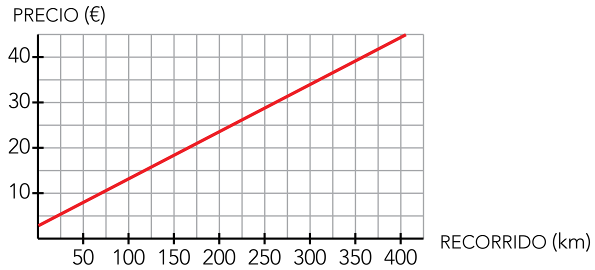
RECORRIDO (km)	140	360
PRECIO (€)	17	39

La pendiente de la función es $m = \frac{39-17}{360-140} = \frac{22}{220} = 0,1$

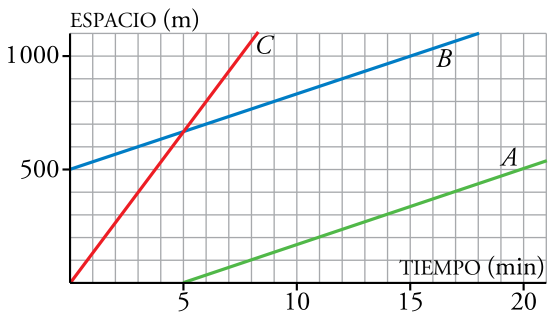
Tomamos el punto $P(140, 17)$.

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 17 + 0,1(x - 140) \rightarrow y = 0,1x + 3$



18. **Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:**



a) ¿Qué velocidad lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

a) La velocidad se corresponde con la pendiente de cada función.

A lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

B lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

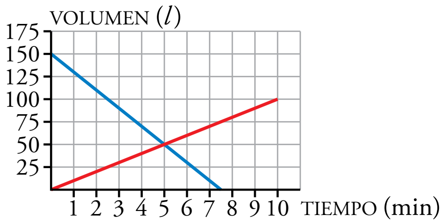
C lleva una velocidad de $\frac{400}{3} \approx 133,3$ m/min

b) $A \rightarrow y = 500 + \frac{100}{3}(x - 20)$

$B \rightarrow y = \frac{100}{3}x + 500$

$C \rightarrow y = \frac{400}{3}x$

19. **Dos depósitos de agua, A y B, funcionan de la forma siguiente: a medida que A se vacía, B se va llenando. Estas son las gráficas:**



a) Indica cuál es la gráfica de A, cuál la de B y escribe sus ecuaciones.

b) ¿A qué velocidades entra y sale el agua?

c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

a) Como A se vacía, su gráfica debe ser decreciente y como B se llena, su gráfica debe ser creciente. Por lo tanto, la gráfica azul corresponde al depósito A y la roja, al B.

Ecuación de A: $y = -20x + 150$

Ecuación de B: $y = 10x$

b) El agua sale a una velocidad de 20 l/min y entra a 10 l/min.

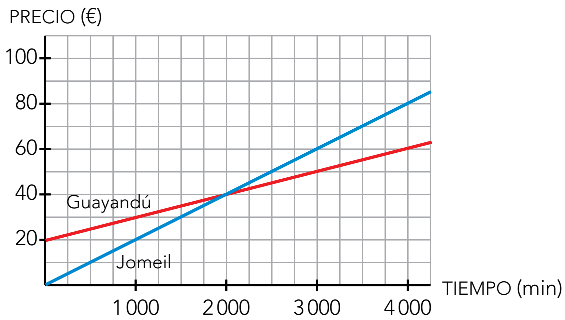
c) En el minuto 5.

20. **El servidor de Internet GUAYANDÚ tiene la tarifa GUAY, con cuota fija mensual de 20 € y 0,01 € cada minuto. El servidor JOMEIL tiene la tarifa CHUPY, sin cuota fija y 0,02 € por minuto.**

a) Haz una gráfica de cada tarifa en función del tiempo y escribe sus expresiones analíticas.

b) ¿A partir de cuántos minutos mensuales es más rentable GUAY que CHUPY?

a)



Guayandú $\rightarrow$ $y = 20 + 0{,}01x$

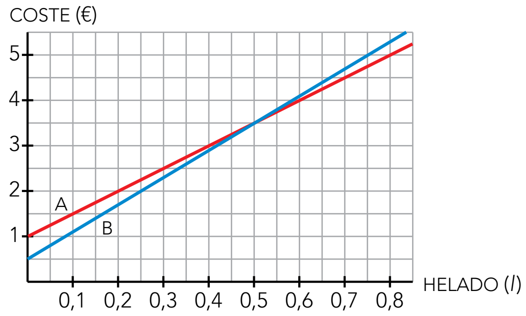
Jomeil $\rightarrow$ $y = 0{,}02x$

b) La tarifa GUAY es más rentable que la tarifa CHUPY a partir de 2 000 minutos.

21. **En una heladería A venden el helado a 5 € el litro, y cobran 1 € por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0,50 € por un envase y 6 € por cada litro de helado.**

a) Representa la función *litros de helado - coste* para cada heladería y escribe sus ecuaciones.

b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compremos.

a) 

Si y es el coste del helado, en euros, y x es la cantidad de helado, en litros:

Heladería A $\rightarrow$ $y = 1 + 5x$

Heladería B $\rightarrow$ $y = 0{,}5 + 6x$

b) Si compramos menos de medio litro de helado, es más barato comprar en la heladería B. Si compramos más de medio litro, la heladería A es la mejor opción.

Página 135

22. **En el recibo de la luz aparece esta información:**

CONSUMO: 1 400 kWh PRECIO DEL kWh: 0,20 €

a) ¿Cuánto cobrarán por la energía consumida?

b) Haz una gráfica y escribe la ecuación de la relación *consumo - coste*. Utiliza estas escalas:

Eje horizontal → 1 cuadradito = 100 kWh

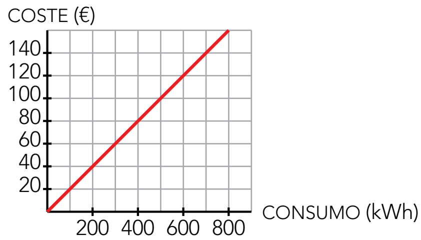
Eje vertical → 1 cuadradito = 20 €

c) Si, además, nos cobran al mes 20 € por el alquiler del equipo, ¿cómo queda la relación *consumo - coste*? Represéntala junto a la anterior y escribe su ecuación.

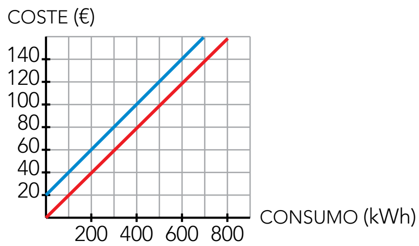
a) 1 400 · 0,20 = 280 €

b) y → Coste (€), x → Consumo (kWh)

$y = 0{,}20x$



c) $y = 20 + 0{,}20x$

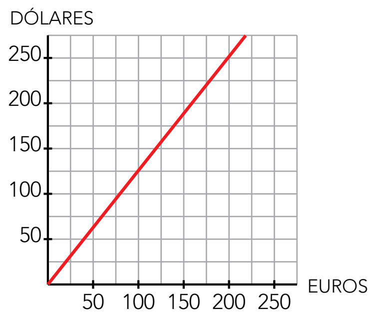


23. **Israel y Susana, para su próximo viaje a Estados Unidos, han ido a cambiar euros por dólares. A Susana le han cambiado 189 dólares por 150 euros y a Israel le han cambiado 151,20 dólares por 120 euros.**

a) Halla la ecuación de la función que nos permite obtener cuántos dólares recibimos según los euros que entreguemos.

b) ¿Cuántos dólares nos darían por 200 €? ¿Y por 350 €? ¿Cuántos euros tendríamos si nos hubieran dado 220,5 dólares?

EUROS (€)	150	120
DÓLARES ($)	189	151,20



a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{151{,}20 - 189}{120 - 150} = \dfrac{-37{,}8}{-30} = \dfrac{63}{50}$

Tomamos $P(150,\ 189)$.

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y = 189 + \frac{63}{50}(x - 150) \rightarrow y = \frac{63}{50}x$$

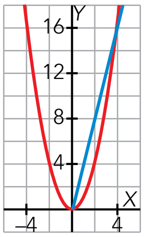
b) $y = \dfrac{63}{50} \cdot 200 \rightarrow y = 252\ \$$ $\quad y = \dfrac{63}{50} \cdot 350 \rightarrow y = 441\ \$$ $\quad 220{,}5 = \dfrac{63}{50} \cdot x \rightarrow x = 175$ €

24. **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área?**

Dibuja ambas funciones.

El perímetro, y, en función del lado, x, viene dado por $y = 4x$.

El área en función del lado viene dada por $y = x^2$



25. **La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 °C, y en la Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es 100 °C, que equivale a 212 °F.**

a) Encuentra y representa la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas.

b) Expresa en grados Fahrenheit las temperaturas siguientes: 25 °C; 36,5 °C; 10 °C.

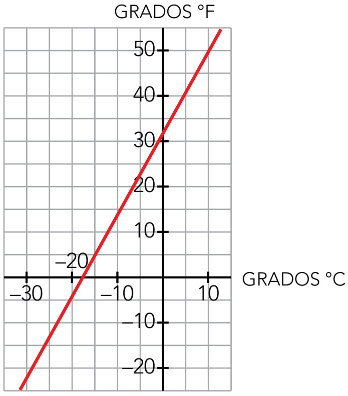
c) Pasa a grados centígrados 86 °F y 63,5 °F.

GRADOS °C	0	100
GRADOS °F	32	212

a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{212-32}{100-0} = 1,8$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 32 + 1,8(x - 0) \rightarrow y = 1,8x + 32$



b) $y = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77$ °F; 25 °C $\Leftrightarrow$ 77 °F

$y = 1,8 \cdot 36,5 + 32 = 97,7$ °F; 36,5 °C $\Leftrightarrow$ 97,7 °F

$y = 1,8 \cdot 10 + 32 = 50$ °F; 10 °C $\Leftrightarrow$ 50 °F

c) $86 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{86-32}{1,8} = 30$ °C; 86 °F $\Leftrightarrow$ 30 °C

$63,5 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{63,5-32}{1,8} = 17,5$ °C; 63,5 °F $\Leftrightarrow$ 17,5 °C

26. **Representa las siguientes funciones lineal y cuadrática, respectivamente, y halla gráficamente los puntos de corte. Calcula luego, mediante un sistema de ecuaciones, dichos puntos y comprueba que coinciden:**

$\boldsymbol{y = x^2 - 3x - 5} \qquad \boldsymbol{y = -2x + 1}$

- $y = x^2 - 3x - 5$

Calculamos la abscisa del vértice, $p = \dfrac{-(-3)}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = -5 \to (0, -5)$

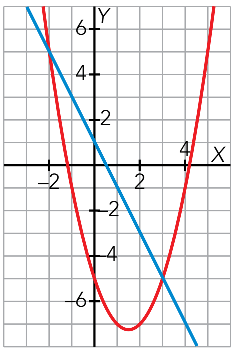
$$y = 0 \to x^2 - 3x - 5 = 0 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2} \approx -1,19 \to \left(\dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}, 0\right) \\ x = \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2} \approx 4,19 \to \left(\dfrac{3 + \sqrt{29}}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–2	$\frac{3-\sqrt{29}}{2}$	–1	0	1	1,5	3	4	$\frac{3+\sqrt{29}}{2}$	5
y	5	0	–1	–5	–7	–7,25	–5	–1	0	5

- $y = -2x + 1$ es una función afín con pendiente $m = -2$ y ordenada en el origen $n = 1$.

Representamos las funciones:



Vemos que se cortan en los puntos (–2, 5) y (3, –5).

Comprobémoslo de forma analítica:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x - 5 \\ y = -2x + 1 \end{array}\right\} \to x^2 - 3x - 5 = -2x + 1 \to x^2 - x - 6 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \to \begin{cases} x = -2 \to y = 5 \\ x = 3 \to y = -5 \end{cases}$$

Vemos que obtenemos los mismos puntos de intersección.

27. **Los gastos anuales, en euros, que una empresa tiene por la fabricación de x ordenadores vienen dados por esta expresión:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

Y los ingresos, también en euros, que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que los ingresos superen a los gastos; es decir, para que haya beneficios?

$G(x) = 20\,000 + 250x$

$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$

Veamos los puntos de corte de ambas funciones:

$20\,000 + 250x = 600x - 0{,}1x^2 \;\rightarrow\; 0{,}1x^2 - 350x + 20\,000 = 0$

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{122\,500 - 8\,000}}{0{,}2} = \frac{350 \pm 338{,}38}{0{,}2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 58{,}1 \\ x = 3\,441{,}9 \end{cases}$$

Ahora comprobemos en qué tramos los ingresos están por encima de los gastos:

- Si $x < 58{,}1 \;\rightarrow\; G(x) > I(x)$
- Si $58{,}1 < x < 3\,441{,}9 \;\rightarrow\; G(x) < I(x)$
- Si $x > 3\,441{,}9 \;\rightarrow\; G(x) > I(x)$

Para que los ingresos superen a los gastos, es decir, para que haya beneficios, deben fabricarse entre 59 y 3 441 ordenadores.

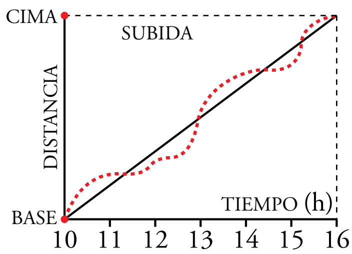
Curiosidades matemáticas

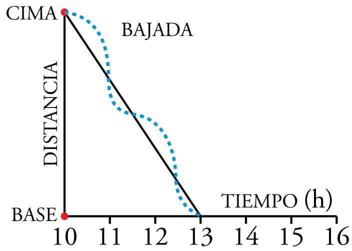
Subir y bajar

Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en un refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.

¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?

Observa las gráficas de la derecha y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.





Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.