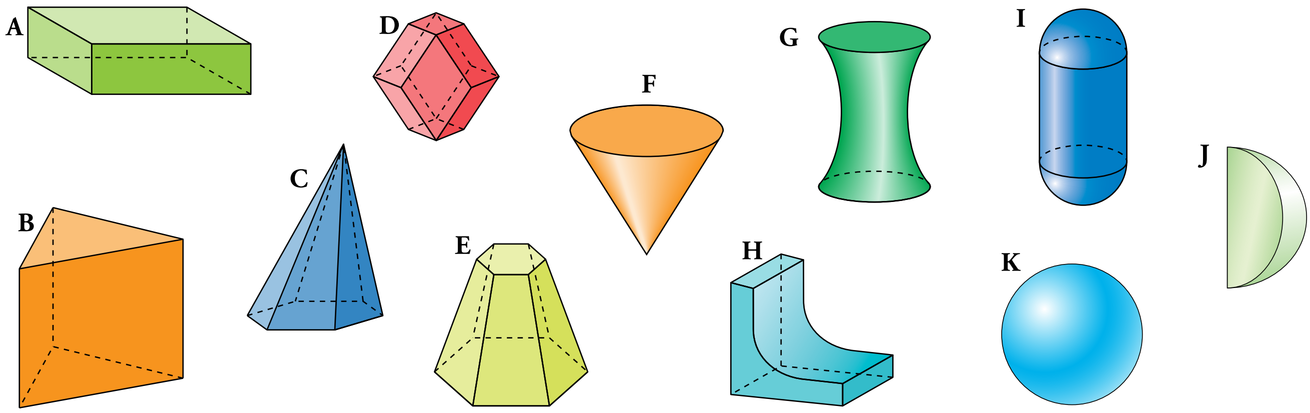
## 1 Poliedros y cuerpos de revolución

### Página 155

**1. Describe cada uno de los cinco poliedros de abajo diciendo cómo son sus caras (por ejemplo, el C tiene siete caras, seis de ellas triángulos y una hexágono), cuántas aristas y cuántos vértices tiene.**




— A tiene 6 caras rectangulares, 12 aristas y 8 vértices.

— B tiene 5 caras. Dos de ellas, las bases, son triángulos y las tres caras laterales son rectángulos. Tiene 9 aristas y 6 vértices.

— C tiene siete caras, seis de ellas son triángulos y una, un hexágono. Tiene 12 aristas y 7 vértices.

— D tiene 12 caras. Dos de ellas son cuadrados, dos, rombos y las cuatro restantes son rectángulos. Tiene 24 aristas y 14 vértices.

— E tiene 8 caras. Dos de ellas, las bases, son hexágonos regulares, y las otras seis son trapecios isósceles. Tiene 18 aristas y 12 vértices.

— F tiene 2 caras. Una de ellas es un círculo que actúa como base, la otra, una cara curva. Tiene un único vértice y una arista. Es un cuerpo de revolución.

— G tiene 3 caras. Dos de ellas son círculos y actúa como bases, la tercera es una cara curva. No tiene vértices y tiene 2 aristas. Es un cuerpo de revolución.

— H tiene 7 caras. Cuatro de ellas son rectángulos. Tiene  15 aristas y 10 vértices.

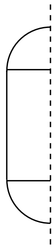
— I tiene 3 caras curvas, 2 aristas y ningún vértice.

— J tiene 3 caras. Dos de ellas planas y una curva. Tiene 3 aristas y 2 vértices.

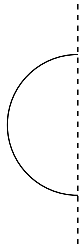
— K tiene una única cara circular. No tiene ni vértices ni aristas.

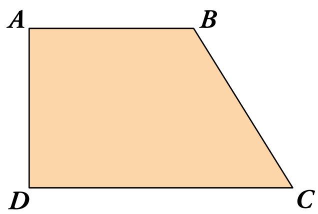
**2.** **Dibuja cómo se obtienen los cuerpos I y K haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.**

I



K

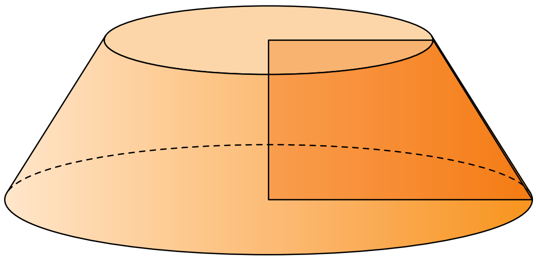


**3.** 

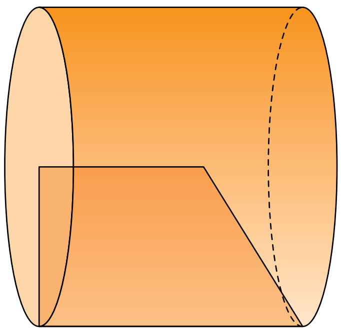

**Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar este trapecio alrededor de:**

**a)** ***AD*** **b)** ***AB*** **c)** ***CD***

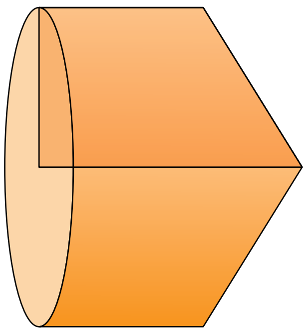
a) *AD*



b) *AB*



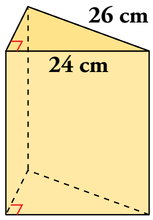
c) *CD*

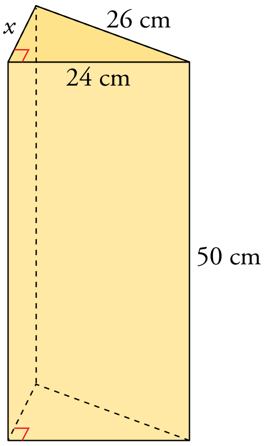


# 2 Prismas

## Página 157

**1. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 26 cm, y uno de sus catetos, 24 cm. La altura del prisma es 50 cm. Halla el área total y el volumen del prisma.**




Calculamos la altura de la base:

$x^2 + 24^2 = 26^2 \rightarrow x^2 + 576 = 676 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$ cm

PERÍMETRO DE LA BASE: $P = 10 + 24 + 26 = 60$ cm

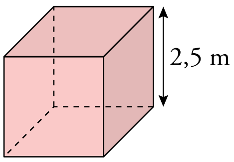
ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = P \cdot h = 60 \cdot 50 = 3\,000 \text{ cm}^2$

ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = \dfrac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 3\,000 + 2 \cdot 120 = 3\,240 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = A_{BASE} \cdot h = 120 \cdot 50 = 6\,000 \text{ cm}^3$

**2. Halla el área total y el volumen de un cubo de 2,5 m de arista.**




ÁREA DE UNA CARA: $l^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25 \text{ m}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 6{,}25 \cdot 6 = 37{,}5 \text{ m}^2$

VOLUMEN: $V = l^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625 \text{ m}^3$

**3. Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 5 cm y 8 cm.**

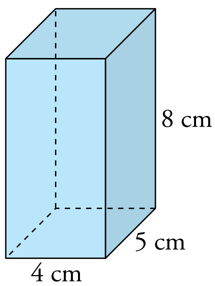
**a) Dibújalo en tu cuaderno.**

**b) Dibuja su desarrollo. Escribe, al lado de cada arista, su longitud.**

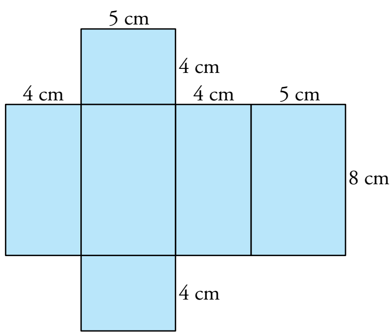
**c) Halla su área.**

**d) Halla su volumen.**

a)




b)




c) $A_{LAT} = P \cdot h = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 5) \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 144 + 2 \cdot (5 \cdot 4) = 184 \text{ cm}^2$

d) $V = A_{BASE} \cdot h = (5 \cdot 4) \cdot 8 = 160 \text{ cm}^3$

# 3 Pirámides

## Página 159

**1. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 dm de lado. Su altura, 12 dm. Halla su área y su volumen.**

Calculamos la apotema de la pirámide:

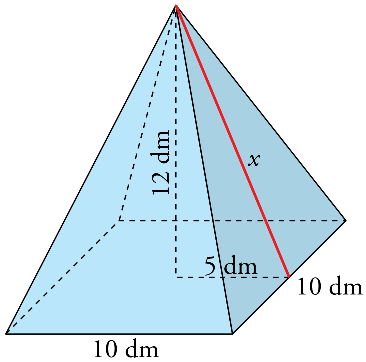
$x^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 25 + 144 \rightarrow x^2 = 169 \rightarrow x = \sqrt{169} \rightarrow x = 13$ dm

ÁREA DE UNA CARA: $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 65 \text{ dm}^2$

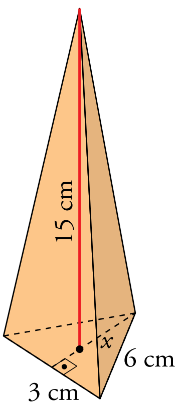
ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = l^2 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 100 + 4 \cdot 65 = 360 \text{ dm}^2$

VOLUMEN: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = \dfrac{1}{3} \cdot 1\,200 = 400 \text{ dm}^3$




**2. Un triángulo equilátero de 6 cm de lado es la base de una pirámide regular cuya altura es 15 cm. Halla su área y su volumen.**




Calculamos la altura del triángulo equilátero:

$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow 36 = x^2 + 9 \rightarrow x^2 = 36 - 9 \rightarrow x^2 = 27 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{27} \rightarrow x = 5{,}2$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{\text{base} \cdot h}{2} = \dfrac{5{,}2 \cdot 6}{2} \approx 15{,}6 \text{ cm}^2$

Calculamos la apotema de la pirámide:

El pie de la altura cae a $\dfrac{1}{3}$ de la altura de la base $\rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot 50{,}2 = 1{,}73$ cm

$a^2 = 15^2 + (1{,}73)^2 \rightarrow a^2 \approx 225 + 3 \rightarrow a^2 \approx 228 \rightarrow a = \sqrt{228} \rightarrow$

$\rightarrow a \approx 15{,}1$ cm

ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = \dfrac{\text{Perímetro de la base} \cdot a}{2} = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 15{,}1}{2} = 135{,}9 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{BASE} + A_{LAT} = 15{,}6 + 135{,}9 = 151{,}5 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 15{,}6 \cdot 15 = 78 \text{ cm}^3$

# 4 Poliedros regulares

## Página 160

**1.** **Haz una tabla en tu cuaderno en la que aparezcan el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.**

| | TETR. | CUBO | OCT. | DODEC. | ICOS. |
|---|---|---|---|---|---|
| C | | | | | |
| V | | | | | |
| A | | | | | |

**a) A partir de la tabla anterior, comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.**

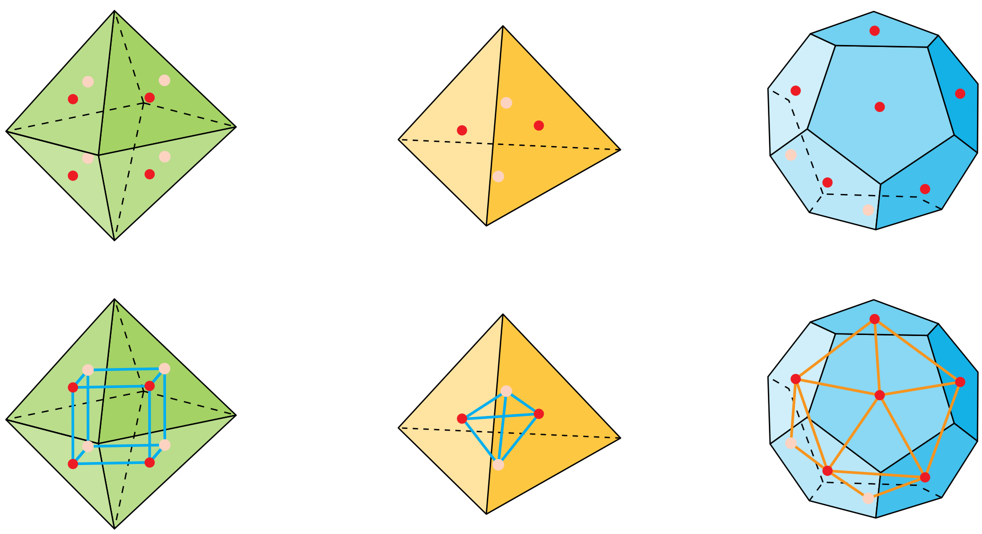
**b) Comprueba, también, que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.**

| | TETR. | CUBO | OCT. | DODEC. | ICOS. |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 4 | 4 | 8 | 12 | 20 |
| V | 4 | 8 | 6 | 20 | 12 |
| A | 6 | 12 | 12 | 30 | 30 |

a) Efectivamente, tienen el mismo número de aristas y, el número de caras de cada uno de ellos, coincide con el de vértices del otro.

b) Obviamente tiene el mismo número de aristas. El número de vértices y caras son iguales.

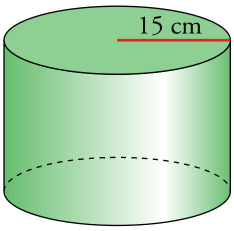
**2.** **Hemos señalado en rojo los centros de las caras "frontales" de estos poliedros, y en rosa, los centros de algunas caras "ocultas". Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.**



# 5 Cilindros

## Página 161

**1. Halla el área total y el volumen de un cilindro recto del que conocemos sus dimensiones: $r$ = 15 cm y h = 2 dm.**



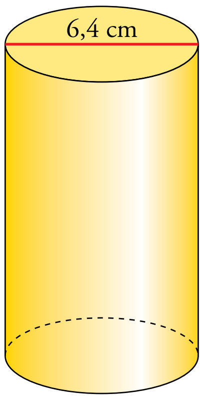

$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 15 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi = 706{,}86 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 1\,884{,}96 + 2 \cdot 706{,}86 = 3\,298{,}68 \text{ cm}^2$

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 4\,500\pi = 14\,137{,}17 \text{ cm}^2$

**2. Un bote cilíndrico de 1/3 de litro tiene un diámetro de 6,4 cm. Halla su altura en milímetros, y la superficie de la lata con la que está construido.**




Volumen = $\frac{1}{3}\, l = \frac{1}{3} \text{ dm}^3$

Radio = 3,2 cm = 0,32 dm

$V = \pi r^2 \cdot h \to \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}32^2 \cdot x \to \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}1024 \cdot x \to$

$\to x = \frac{1}{3 \cdot \pi \cdot 0{,}1024} \to x = 1{,}03 \text{ dm} = 103 \text{ mm}$

$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 3{,}2 \cdot 10{,}3 = 207{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3{,}2^2 = 32{,}17 \text{ cm}^2$

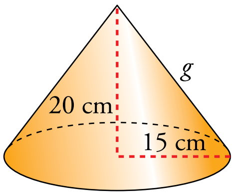
$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 207{,}1 + 2 \cdot 32{,}17 = 271{,}4 \text{ cm}^2$

La altura del bote mide 103 mm y la superficie necesaria para construirlo es 271,4 cm$^2$.

# 6 Conos

## Página 162

**1.** **Halla el área total y el volumen de un cono recto del que conocemos sus dimensiones: *r* = 15 cm y h = 2 dm.**

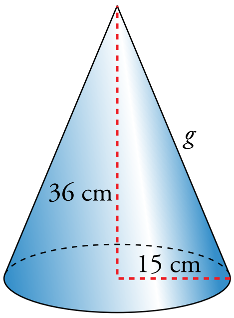



$$g = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi rg + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 25 + \pi \cdot 15^2 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1\,500\pi = 4\,712{,}39 \text{ cm}^3$$

**2.** **Halla el área total y el volumen de un cucurucho cónico de 36 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base.**




$$g = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{1\,521} = 39 \text{ cm}$$

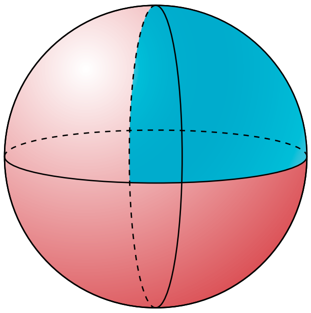
$$A_{\text{TOTAL}} = \pi rg + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 39 + \pi \cdot 15^2 = 810\pi = 2\,544{,}69 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 36 = 2\,700\pi = 8\,482{,}3 \text{ cm}^3$$

# 7 Esferas

## Página 163

**1. Halla el área total y el volumen de un trozo de esfera que es una cuarta parte de esfera de 1 m de diámetro.**



$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi \approx 3{,}14 \text{ m}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}5^2 = 0{,}25\pi \approx 0{,}79 \text{ m}^2$

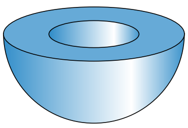
$V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 = 0{,}52 \text{ m}^3$

Calculamos el área y el volumen de la cuarta parte de la esfera:

$$A = \frac{A_{\text{ESFERA}}}{4} + 2\cdot\frac{A_{\text{CÍRCULO}}}{2} = \frac{3{,}14}{4} + 0{,}79 \approx 1{,}58 \text{ m}^2 = 158 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{V_{\text{ESFERA}}}{4} = 0{,}13 \text{ m}^3$$

**2.**



**Radio exterior = 10 cm**
**Radio interior = 5 cm**

**Halla el área total y el volumen.**

$A_{\text{ESFERA GRANDE}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2 \approx 1\,256{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ESFERA PEQUEÑA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ cm}^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CORONA CIRCULAR}} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100\pi - 25\pi = 75\pi \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{TOTAL}} = \frac{1\,256{,}64}{2} + \frac{314{,}16}{2} + 235{,}62 = 1\,021{,}02 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4}{3}\pi\cdot 10^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot 5^3\right] = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 875 \approx 1\,835{,}6 \text{ cm}^3$$

# 8 Coordenadas geográficas

## Página 165

**1. Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?**

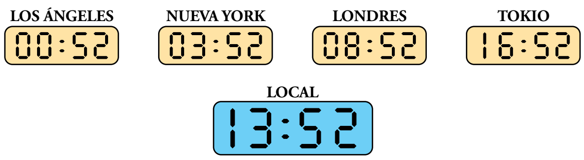
En el tercer huso al E serán 3 h más. Es decir, serán las 11 a.m.

En el quinto huso al O serán 7 h menos: las 3 a.m.

**2. Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p.m. y el vuelo dura 8 h, ¿cuál será la hora local de llegada a Nueva York?**

En Nueva York serán las 13 p.m.

**3. En la recepción de una empresa puedes ver los relojes siguientes:**




**¿Se trata de la oficina de Atenas, Montevideo, Nueva Delhi o Sídney? Razona tu respuesta.**

Se trata de Nueva Delhi. Se puede comprobar mirando los husos horarios.

**4. En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hirosima (132° E)?**

En Hiroshima son las 4 de la tarde.

**5. Si en La Habana (82° O) son las 8 p.m., asigna su hora a cada ciudad en tu cuaderno:**

| | |
|---|---|
| **Maputo (Mozambique)** | **2 p.m.** |
| **Natal (Brasil)** | **3 a.m.** |
| **Astaná (Kazajistán)** | **8 p.m.** |
| **Temuco (Chile)** | **0 a.m.** |
| **Honolulú (Hawái)** | **11 a.m.** |
| **Dakar (Senegal)** | **11 p.m.** |
| **Katmandú (Nepal)** | **6 a.m.** |
| **Melbourne (Australia)** | **7 a.m.** |

Maputo (Mozambique) → 3 a.m.

Natal (Brasil) → 11 p.m.

Astaná (Kazajistán) → 6 a.m.

Temuco (Chile) → 8 p.m.

Honolulú (Hawái) → 2 p.m.

Dakar (Senegal) → 0 a.m.

Katmandú (Nepal) → 7 a.m.

Melbourne (Australia) → 11 a.m.

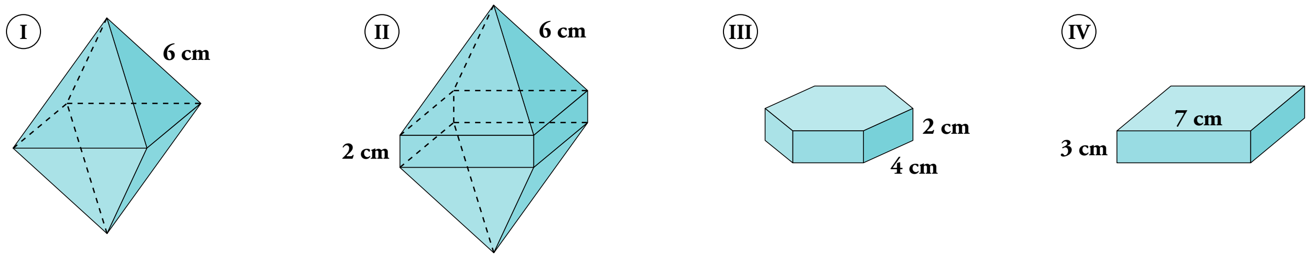
# Ejercicios y problemas

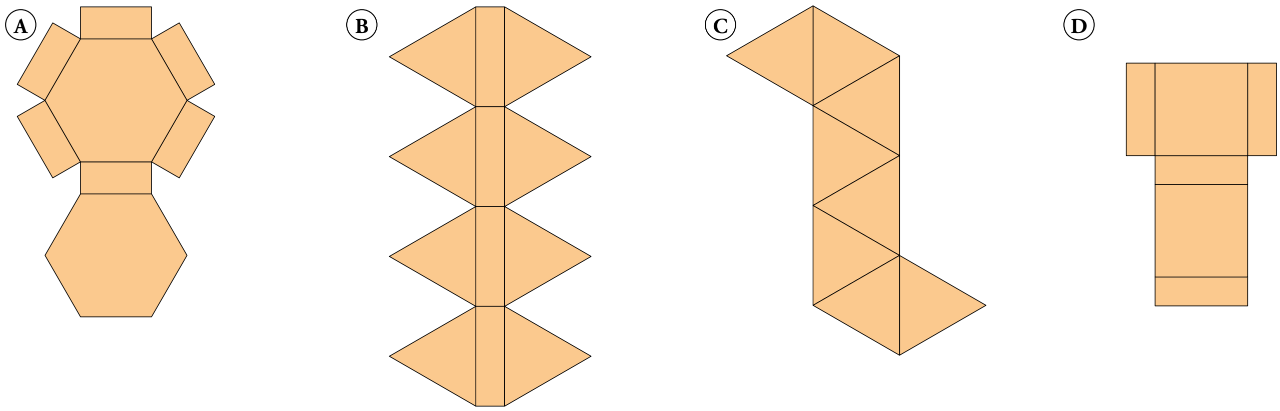
## Página 166

## Practica

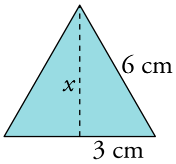
### Desarrollos y áreas

**1.** **Haz corresponder cada figura con su desarrollo y calcula el área total:**




I → C




$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow 36 - 9 = x^2 \rightarrow 27 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{27} \rightarrow x = 3\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ cm}$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 7,8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot 7,8 = 62,4 \text{ cm}^2$

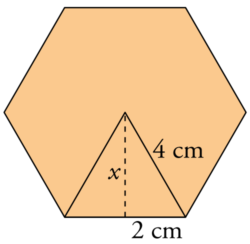
II → B

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 7,8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 12 + 8 \cdot 7,8 = 110,4 \text{ cm}^2$

Ⓘⅈⅈ → Ⓐ




$4^2 = x^2 + 2^2 \rightarrow 16 - 4 = x^2 \rightarrow 12 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{12} \rightarrow x = 2\sqrt{3} \approx 3,5$ cm

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{\text{Perímetro de la base} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{24 \cdot 3,5}{2} = 42 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 42 + 6 \cdot 8 = 132 \text{ cm}^2$

Ⓘⅴ → Ⓓ

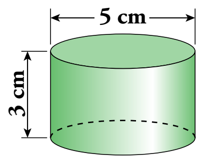
$A_{\text{CUADRADO}} = l^2 = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = base \cdot altura = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm}^2$

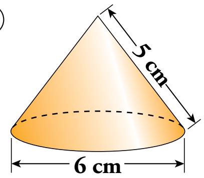
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 49 + 4 \cdot 21 = 182 \text{ cm}^2$

**2.** **Calcula la superficie total de cada cuerpo:**

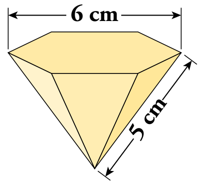
**A**



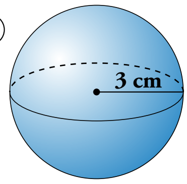

**B**




**C**




**D**




Ⓐ

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 2,5^2 = 19,63 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2,5 \cdot 3 = 15\pi = 47,12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 19,63 + 47,12 = 86,38 \text{ cm}^2$

Ⓑ

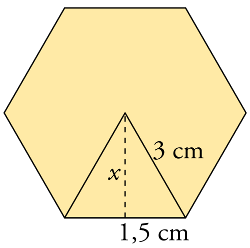
$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28,27 \text{ cm}^2$

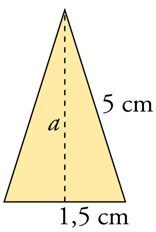
$A_{\text{LATERAL}} = \pi rg = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi = 47,12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 28,27 + 47,12 = 75,39 \text{ cm}^2$

Ⓒ

Calculamos la apotema de la base:




$3^2 = x^2 + 1,5^2 \rightarrow 9 - 2,25 = x^2 \rightarrow 6,75 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{6,75} \rightarrow x = 2,6$ cm

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{18 \cdot 2,6}{2} = 23,4 \text{ cm}^2$

Calculamos la apotema de la pirámide:

$5^2 = a^2 + 1,5^2 \rightarrow 25 - 2,25 = a^2 \rightarrow 22,75 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{22,75} \rightarrow a = 4,77$ cm

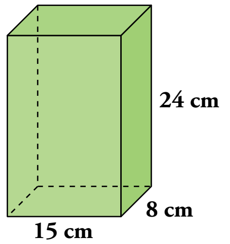
$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{3 \cdot 4,77}{2} = 7,16 \text{ cm}^2$

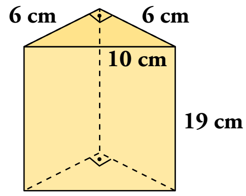
$A_{\text{TOTAL}} = 23,4 + 6 \cdot 7,16 = 66,36 \text{ cm}^2$

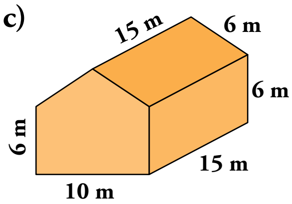
Ⓓ

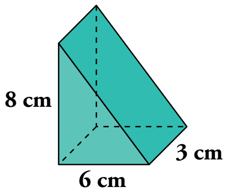
$A_{\text{TOTAL}} = 4\pi r = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi = 113,1 \text{ cm}^2$

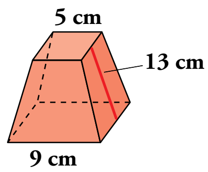
**3.** **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos:**

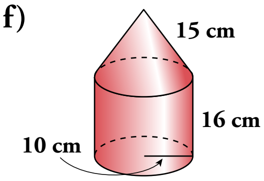
**a)**


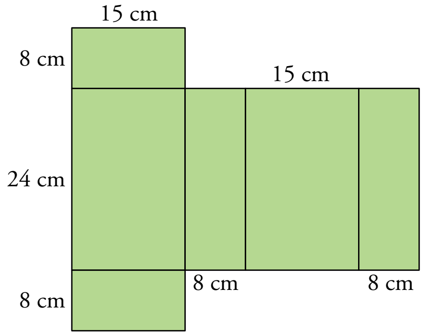

**b)**



**c)**



**d)**



**e)**


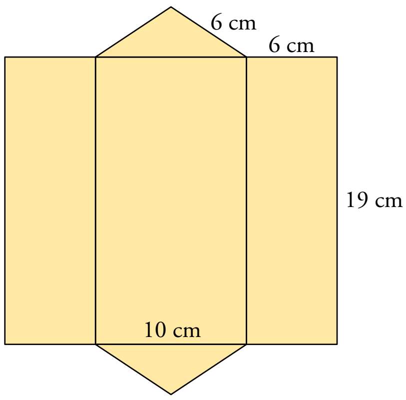

**f)**



a)



$A_{\text{BASE}}$ = base · altura = 15 · 8 = 120 cm$^2$

$A_{\text{LATERAL}}$ = perímetro · altura = (2 · 15 + 2 · 8) · 24 = 1 104 cm$^2$

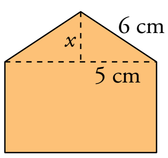
$A_{\text{TOTAL}}$ = 1 104 + 2 · 120 = 1 344 cm$^2$

b)



$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}}$ = perímetro de la base · altura = (6 + 6 + 10) · 19 = 418 cm$^2$

$A_{\text{TOTAL}}$ = 418 + 2 · 18 = 454 cm$^2$

c)



Tomamos como base uno de los pentágonos.

$6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{11} = 3{,}3$ cm

$A_{\text{BASE}} = A_{\text{TRIÁNGULO}} + A_{\text{RECTÁNGULO}} =$

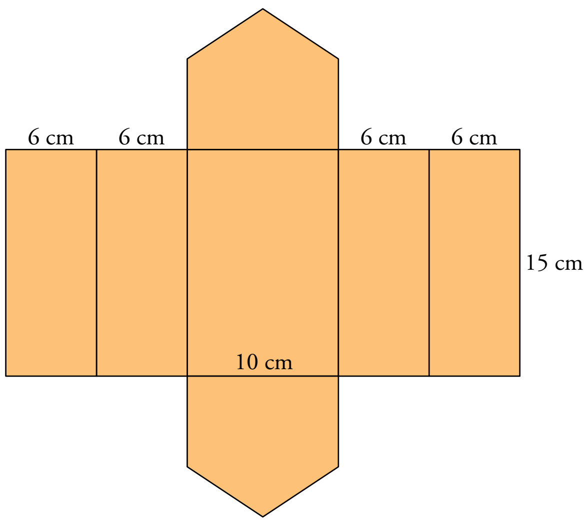
$= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \text{base} \cdot \text{altura}$

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{10 \cdot 3{,}3}{2} + 6 \cdot 10 = 76{,}5 \text{ cm}^2$

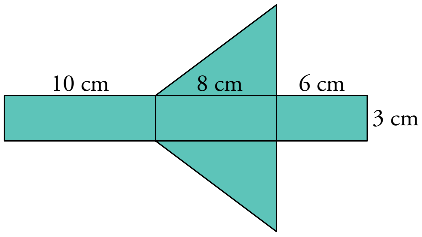
$A_{\text{LATERAL}}$ = perímetro de la base · altura =

= (6 · 4 + 10) · 15 = 510 cm$^2$

$A_{\text{TOTAL}}$ = 510 + 2 · 76,5 = 663 cm$^2$



d) Calculamos lo que mide la hipotenusa del triángulo:




$x^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \rightarrow x = 10$ cm

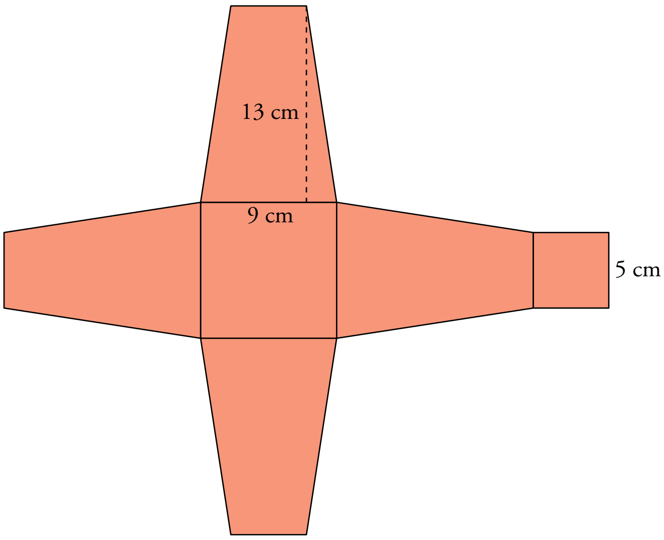
Tomamos como base uno de los triángulos:

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (10 + 8 + 6) \cdot 3 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 72 + 2 \cdot 24 = 120 \text{ cm}^2$

e) **NOTA:** En el libro del alumno hay una errata. La medida de la base menor son 5 cm, no 5 m.




$A_{\text{TRAPECIO}} = \dfrac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura} = \dfrac{9+5}{2} \cdot 13 = 91 \text{ cm}^2$

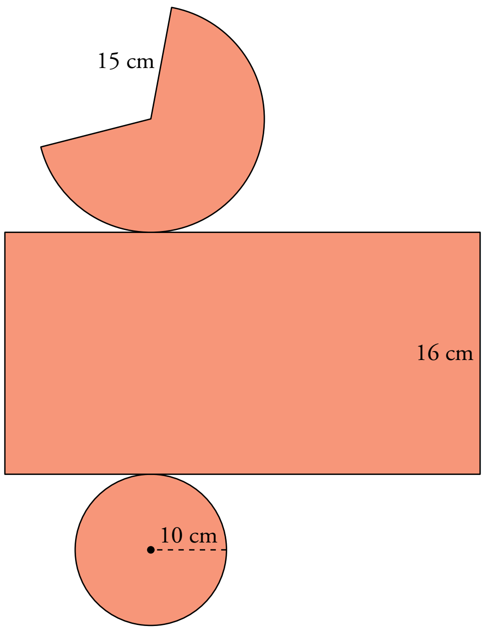
$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 4 \cdot 91 = 364 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MAYOR}} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MENOR}} = l^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 25 + 81 + 364 = 470 \text{ cm}^2$

f)




$A_{\text{CONO}} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 15 = 150\pi = 471{,}24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi = 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 16 = 320\pi = 1\,005{,}31 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 471{,}24 + 314{,}16 + 1\,005{,}31 = 1\,790{,}71 \text{ cm}^2$

**4. Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:**

**a) Prisma de altura 24 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.**

**b) Octaedro regular de arista 18 cm.**

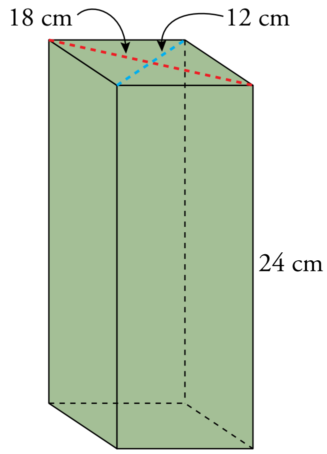
**c) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 28 cm y arista básica 16 cm.**

**d) Pirámide de altura 25 cm y base cuadrada de lado 9 cm.**

**e) Cilindro de altura 17 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.**

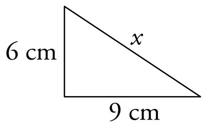
**f) Esfera inscrita en un cilindro de altura 1 m.**

a)




$$A_{\text{BASE}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$

Calculamos la arista de la base:

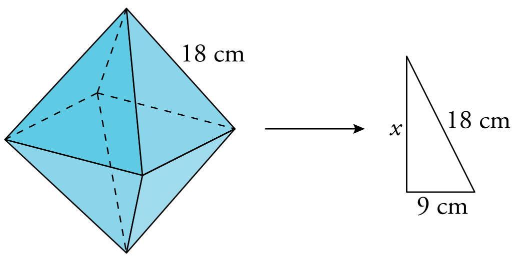



$$x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117 \rightarrow x = \sqrt{117} = 10{,}8 \text{ cm}$$

$A_{\text{LATERAL}}$ = perímetro de la base · altura = $(4 \cdot 10{,}8) \cdot 24 = 1\,036{,}8 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 108 + 1\,036{,}8 = 1\,144{,}8 \text{ cm}^2$$

b) Calculamos la altura de uno de los triángulos:



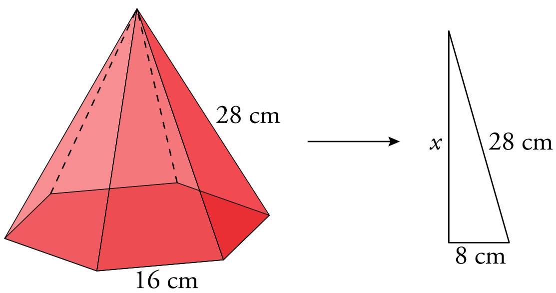

$$18^2 = x^2 + 9^2 \rightarrow x^2 = 324 - 81 \rightarrow x^2 = 243 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{243} \rightarrow x = 18{,}6 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{18 \cdot 18{,}6}{2} = 167{,}4 \text{ cm}^2$$

El octaedro está formado por ocho triángulos iguales:

$$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot 167{,}4 = 1\,339{,}2 \text{ cm}^2$$

c) Calculamos la altura de una cara:

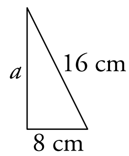



$$28^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = 784 - 64 \rightarrow x^2 = 720 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{720} \rightarrow x = 26{,}8 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{16 \cdot 26{,}8}{2} = 214{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot 214{,}4 = 1\,286{,}4 \text{ cm}^2$$

Calculamos la apotema de la base:

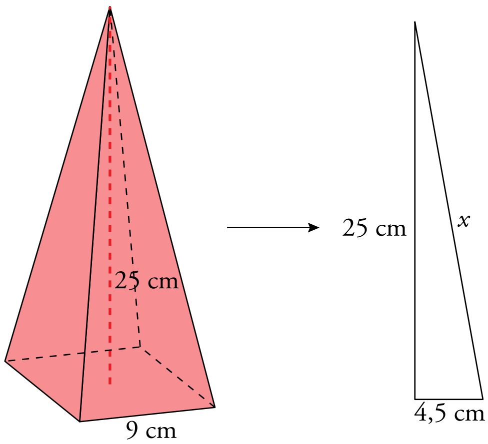



$$16^2 = 8^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 256 - 64 = 192 \rightarrow a = \sqrt{192} = 13{,}9 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{(6 \cdot 16) \cdot 13{,}9}{2} = 667{,}2 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 667{,}2 + 1\,286{,}4 = 1\,953{,}6 \text{ cm}^2$$

d)




Calculamos la altura de una cara:

$x^2 = 25^2 + 4{,}5^2 \rightarrow x^2 = 625 + 20{,}25 \rightarrow x^2 = 645{,}25 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{645{,}25} = 25{,}4$ cm

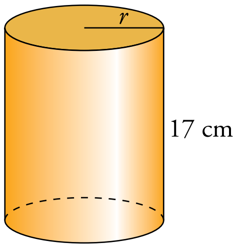
$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{9 \cdot 25{,}4}{2} = 114{,}3 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot 114{,}3 = 457{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 81 + 457{,}2 = 538{,}2 \text{ cm}^2$

e)



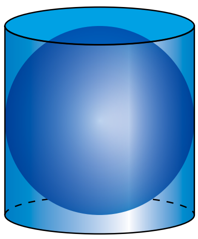

$44 = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{44}{2\pi} = 7$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 7 \cdot 17 = 238\pi = 747{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 49\pi = 153{,}9 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + 2A_{\text{BASE}} = 747{,}7 + 2 \cdot 153{,}9 = 1\,055{,}5 \text{ cm}^2$

f)



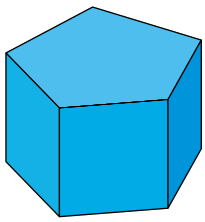
$r = 0{,}5$ m

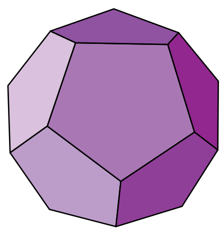
$A_{\text{TOTAL}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi = 3{,}14 \text{ cm}^2$

**5. Calcula la superficie de:**

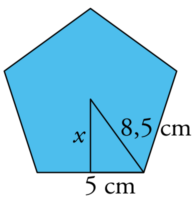
**a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.**

**b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.**





***El radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono de lado l es r = 0,85 · l.***




El radio del pentágono mide $r = 0{,}85 \cdot 10 = 8{,}5$ cm.

Calculamos la apotema del pentágono:

$8{,}5^2 = 5^2 + x^2 \rightarrow 72{,}25 = 25 + x^2 \rightarrow x^2 = 72{,}25 - 25 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 47{,}25 \rightarrow x = \sqrt{47{,}25} \rightarrow x = 6{,}87$ cm

a) $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{50 \cdot 6{,}87}{2} = 171{,}75 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = 50 \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 171{,}75 + 500 = 843{,}5 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{PENTÁGONO}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{50 \cdot 6{,}87}{2} = 171{,}75 \text{ cm}^2$

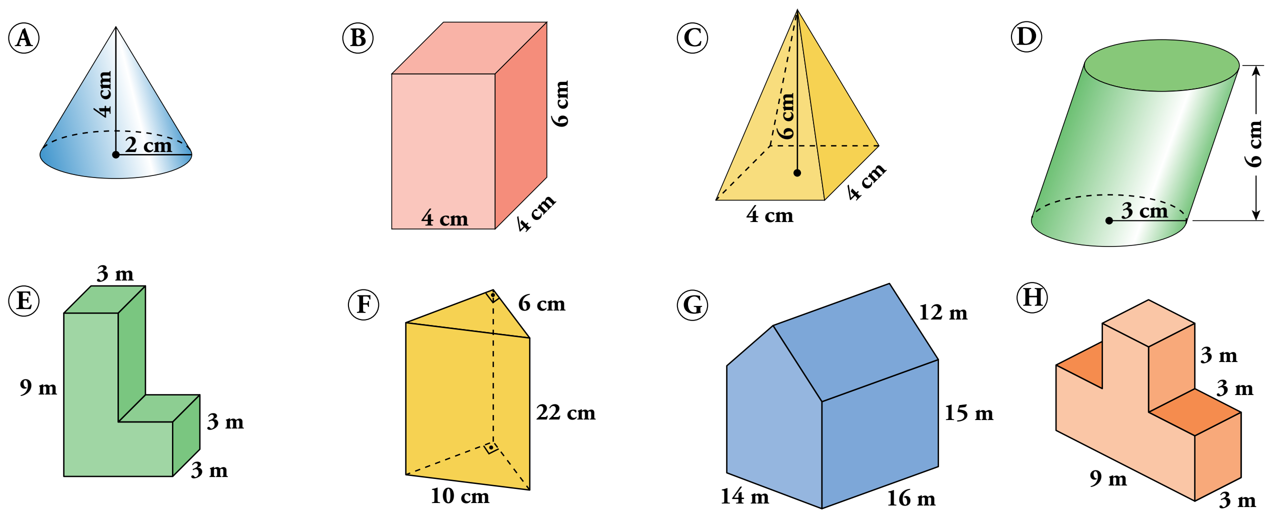
El dodecaedro tiene 12 caras que son pentágonos regulares.

$A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot 171{,}75 = 2\,061 \text{ cm}^2$

## Página 167

### Volúmenes

**6.** **Calcula el volumen de estos cuerpos:**




a) $V = \dfrac{A_{BASE} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} = \dfrac{16\pi}{3} = 16{,}76 \text{ cm}^3$

b) $V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = l^2 \cdot h = 4^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^3$

c) $V = \dfrac{A_{BASE} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{l^2 \cdot h}{3} = \dfrac{4^2 \cdot 6}{3} = 32 \text{ cm}^3$

d) $V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi = 169{,}65 \text{ cm}^3$

e) $V_1 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 9 \cdot 6 = 162 \text{ cm}^3$

$V_2 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ cm}^3$

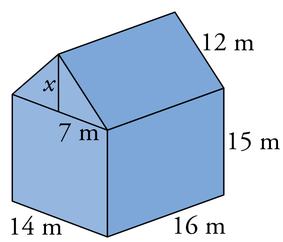
$V = V_1 + V_2 = 162 + 27 = 189 \text{ cm}^3$

f) Calculamos la altura del triángulo:

$10^2 = 6^2 + a^2 \rightarrow 100 = 36 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{100 - 36} \rightarrow a = \sqrt{64} \rightarrow a = 8 \text{ cm}$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = \dfrac{a \cdot b}{2} \cdot h = \dfrac{8 \cdot 6}{2} \cdot 22 = 528 \text{ cm}^3$

g)




$12^2 = x^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 144 - 49 \rightarrow x = \sqrt{95} \rightarrow x = 9{,}75 \text{ cm}$

$V = \dfrac{14 \cdot 9{,}75}{2} \cdot 16 + 14 \cdot 16 \cdot 15 = 1\,092 + 3\,360 = 4\,452 \text{ cm}^3$

h) $V_1 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 9 = 81 \text{ cm}^3$

$V_2 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ cm}^3$

$V = V_1 + V_2 = 81 + 27 = 108 \text{ cm}^3$

**7.** **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:**

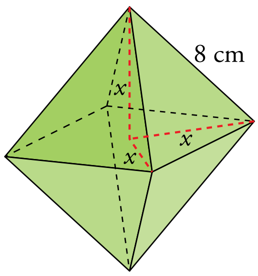
**a) Octaedro regular de arista 8 cm.**

**b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 17 cm y la arista de la base 10 cm.**

**c) Semiesfera de radio 15 cm.**

**d) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 10 cm y altura 18 cm.**

a) Calculamos el volumen dividiendo el octaedro en dos pirámides de base cuadrada.

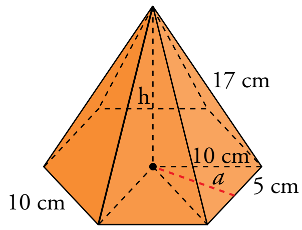



$$x^2 + x^2 = 8^2 \rightarrow 2x^2 = 64 \rightarrow x^2 = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} = 5,7 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 5,7 = 121,6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot 121,6 = 243,2 \text{ cm}^3$$

b)



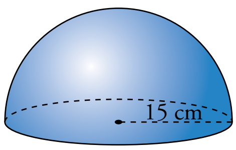

$$h^2 + 10^2 = 17^2 \rightarrow h^2 = 289 - 100 = 189 \rightarrow h = \sqrt{189} = 13,7 \text{ cm}$$

$$a^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow a^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8,7 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \cdot h =$$

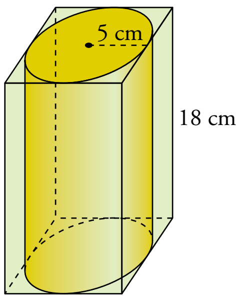
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(10 \cdot 6) \cdot 8,7}{2} \cdot 13,7 = 1\,191,9 \text{ cm}^3$$

c)



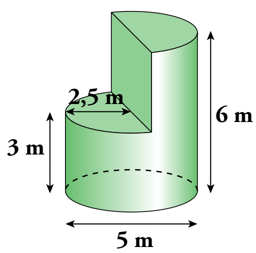

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 2\,250\pi = 7\,068,58 \text{ cm}^3$$

d)




$$V = A_{\text{BASE}} \cdot altura = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 450\pi = 1\,413,7 \text{ cm}^3$$

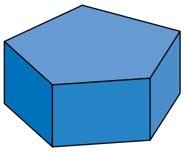
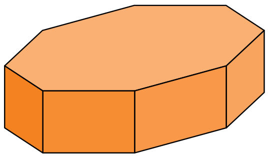
**8.** **Calcula el volumen de este cuerpo:**

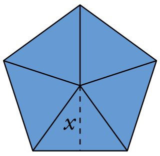



***La parte de arriba es medio cilindro.***

$$V = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 6 - \frac{\pi \cdot 2,5^2 \cdot 3}{2} = 88,35 \text{ cm}^3$$

**9.** **Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares. En ambos, la arista básica mide 10 cm, y la altura, 8 cm.**



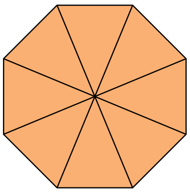

$x^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \;\rightarrow\; x = 8{,}66$ cm

$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 8{,}66}{2} = 216{,}5 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 5 \cdot 10 \cdot 8 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 216{,}5 + 400 = 833 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 216{,}5 \cdot 8 = 1\,732 \text{ cm}^3$




En este caso el apotema de este prisma es el mismo que el anterior.

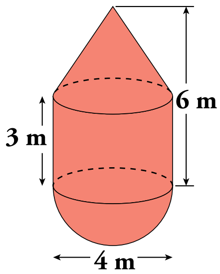
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$$

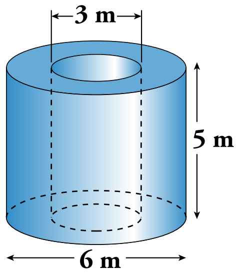
$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 8 \cdot 10 \cdot 8 = 640 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 346{,}4 + 640 = 1\,332{,}8 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 346{,}4 \cdot 8 = 2\,771{,}2 \text{ cm}^3$

**10.** **Calcula el volumen de estos cuerpos:**




$$V = V_{\text{CONO}} + V_{\text{CILINDRO}} + \frac{V_{\text{ESFERA}}}{2}$$

$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 3 \approx 12{,}57 \text{ m}^3$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 \approx 37{,}7 \text{ m}^3$

$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \approx 33{,}51 \text{ m}^3$

$$V = 12{,}57 + 37{,}7 + \frac{33{,}51}{2} \approx 67{,}025 \text{ m}^3$$

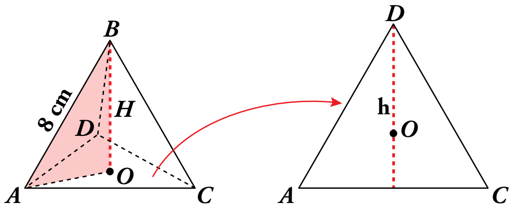
$V = V_{\text{CILINDRO GRANDE}} - V_{\text{CILINDRO PEQUEÑO}}$

$V_{\text{CILINDRO GRANDE}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 141{,}37 \text{ m}^3$

$V_{\text{CILINDRO PEQUEÑO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 35{,}34 \text{ m}^3$

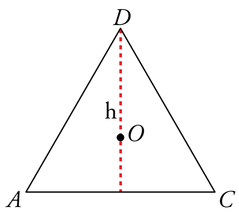
$V = 141{,}37 + 35{,}34 = 176{,}71 \text{ m}^3$

**11.** **Halla el área y el volumen de este tetraedro regular:**




**Para hallar la altura $H$, recuerda que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$, donde $h$ es la altura de una cara.**

Calculamos lo que mide la altura $h$:




$$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h = 6{,}93 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot A_{\text{BASE}} = 110{,}88 \text{ cm}^2$$

Calculamos lo que mide la altura $H$ del tetraedro:

$$H^2 = 8^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 = 42{,}66 \rightarrow H = 6{,}53 \text{ cm}$$

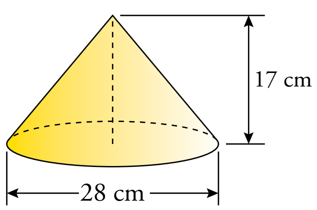
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$$

**12.** **Hacemos girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 14 cm y 17 cm alrededor de cada uno de ellos, obteniendo así dos conos distintos.**

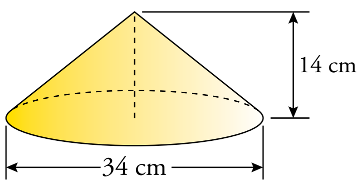

**a) ¿Cuál de ellos tiene más volumen?**

**b) ¿Qué porcentaje de volumen tiene más uno que otro?**

a)




$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 14^2 \cdot 17 = 3\,489{,}26 \text{ cm}^3$$

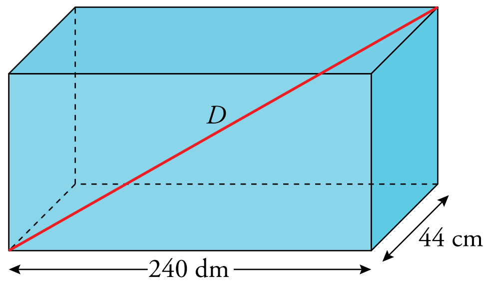



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = 4\,236{,}96 \text{ cm}^3$$

El cono que tiene radio 17 cm es el que tiene más volumen.

b) El cono que tiene más volumen tiene aproximadamente un 21 % más de volumen que el otro.

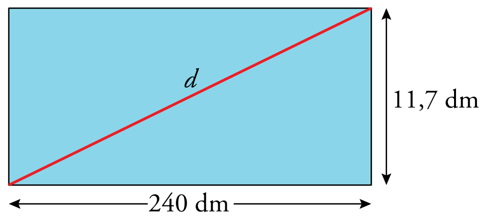
**13.** **La base de un ortoedro tiene dimensiones 240 cm × 44 cm. Su volumen es 1 235,52 dm³. Calcula las diagonales de sus caras y la diagonal principal.**



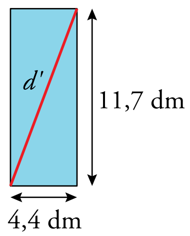

240 cm = 24 dm

44 cm = 4,4 dm

$V = A_{BASE} \cdot h \rightarrow 1\,235{,}52 = 24 \cdot 4{,}4 \cdot h \rightarrow h = 11{,}7$ dm




$d^2 = 11{,}7^2 + 24^2 \rightarrow d = 26{,}7$ dm




$d'^2 = 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow d' = 12{,}5$ dm

$D = 24^2 + 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow D = 27{,}06$ dm

## Página 168

## Coordenadas geográficas

**14.** **El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros. Halla:**

**a) El radio de la Tierra en kilómetros.**

**b) Su superficie en kilómetros cuadrados.**

**c) Su volumen en kilómetros cúbicos.**

40 000 000 m = 40 000 km

a) $2\pi r = 40\,000 \rightarrow r = \dfrac{40\,000}{2\pi} \approx 6\,366{,}2$ km

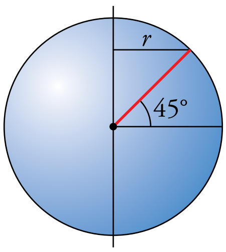
b) $S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6\,366{,}2^2 = 509\,296\,182$ km$^2$

c) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,366{,}2^3 = 1{,}081 \cdot 10^{12}$ km$^3$

**15.** **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumno.

**16.** **Calcula, en kilómetros, la medida del paralelo terrestre de latitud 45° N.**




$\cos 45° = \dfrac{r}{R_T} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{r}{R_T}$

$r = R_T \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\,371 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\,504{,}98$ km

$L = 2 \cdot \pi \cdot 4\,504{,}98 = 28\,305{,}61$ km

**17.** **Un barco va de un punto *A*, situado en las costas de África de 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro *B*, en las costas de América de 30° latitud norte y 80° longitud oeste, siguiendo el paralelo común.**

**a) ¿Qué distancia ha recorrido?**

**b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?**

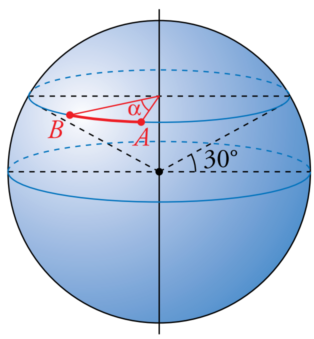
**c) ¿Qué distancia recorrería en este último caso si pudiera navegar de un punto a otro siguiendo un arco de círculo máximo?**

a) Calculamos el radio del paralelo que tienen en común:

$\cos 30° = \dfrac{r}{R_T} \rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\,366{,}2 = 5\,513{,}3$ km

El ángulo entre A y B es 80° – 10° = 70°

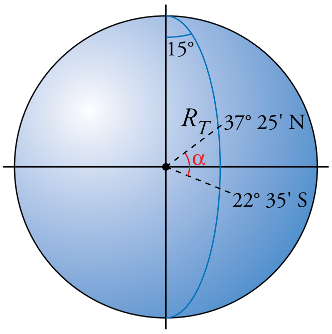
$Dist = \dfrac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 5\,513{,}3 \cdot 70°}{360°} = 6732{,}77$ km



b) $Dist = \dfrac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 5\,513{,}3 \cdot 180°}{360°} = 17\,317{,}4$ km

c) $Dist = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 5\,513{,}3 = 34\,641{,}1$ km

**18.** **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**




Calculemos los grados que separan los paralelos donde se encuentran las dos ciudades:

$\alpha = 37°25' + 22°35' = 59°60' = 60°$

$Dist = \dfrac{2\pi \cdot R_T \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 6\,366{,}2 \cdot 60°}{360°} = 6\,666{,}67$ km

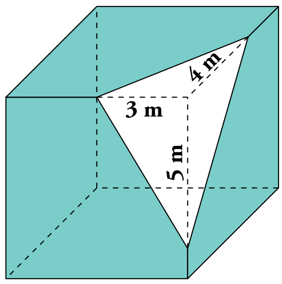
**19.** **La "milla marina" es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1'. Calcula la longitud de una "milla marina".**

$\alpha = 1' = \dfrac{1}{60} = 0{,}017°$

$L = \dfrac{2\pi \cdot R_T \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 6\,366{,}2 \cdot 0{,}017°}{360°} = 1{,}852$ km

# Piensa y resuelve

**20.** **Observa que al seccionar un cubo como indica la figura, se obtiene de la esquina cortada una pirámide triangular.**

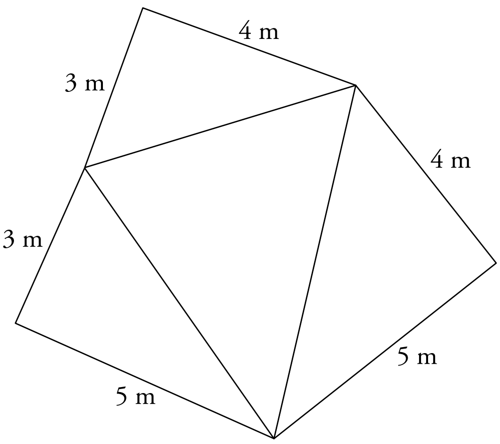



**a) Dibuja el desarrollo de dicha pirámide.**

**b) Calcula su superficie lateral considerando la sección como base.**

**c) Calcula su volumen (apóyala sobre uno de los triángulos rectángulos).**

a)




b) $A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{3 \cdot 5}{2} + \dfrac{3 \cdot 4}{2} + \dfrac{4 \cdot 5}{2} = \dfrac{47}{2} = 23{,}5 \text{ cm}^2$

c) $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20 \text{ cm}^3$

**21.** **Un dependiente envuelve una caja de zapatos de 30 cm de larga, 18 cm de ancha y 10 cm de alta con un trozo de papel, de forma que un 15 % del envoltorio queda solapado sobre sí mismo. ¿Qué cantidad de papel ha utilizado?**

Calculamos el área total de la caja de zapatos:

$A_{BASE} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (2 \cdot 30 + 2 \cdot 18) \cdot 10 = 960 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 2 \cdot A_{BASE} + A_{LATERAL} = 2 \cdot 540 + 960 = 2\,040 \text{ cm}^2$

Habrá utilizado un 15 % más de la superficie de la caja $\to$ $2\,040 \cdot 1{,}15 = 2\,346 \text{ cm}^2$

Ha utilizado $2\,346 \text{ cm}^2$ de papel para envolverlo.

**22.** **Una empresa de carburantes tiene cuatro tanques esféricos de 20 m de diámetro y seis tanques cilíndricos de 20 m de altura y 10 m de radio en la base.**

**Para evitar la corrosión, se contrata a un equipo de operarios que cobra, por pintar los depósitos, 12 €/m². Calcula el coste total de la operación.**

$A_{ESFERA} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi = 1\,256{,}6 \text{ m}^2$

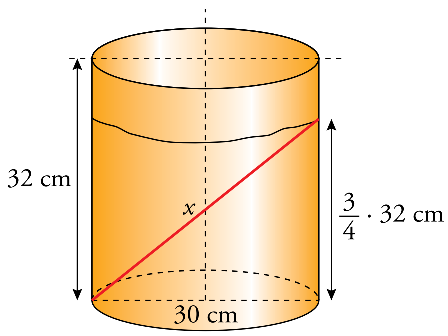
$A_{CILINDRO} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 + 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ m}^2$

$A_{TOTAL} = 4 \cdot 1\,256{,}6 + 6 \cdot 1\,884{,}96 = 16\,336{,}16 \text{ m}^2$

Coste = $12 \cdot 16\,336{,}16 = 196\,033{,}92$ €

El coste total de la operación es de 196 033,92 €.

**23.** **Un bidón de pintura de forma cilíndrica, de 32 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base, está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que se habrá sumergido totalmente en la pintura?**




La altura de la pintura es $\frac{3}{4} \cdot 32 = 24$ cm

$x^2 = 24^2 + 30^2 = 576 + 900 = 1\,476 \to$

$\to x = \sqrt{1\,476} = 38{,}4$ cm

40 cm > 38,4 cm

*Solución*: No, no se sumergirá del todo. Un pico de 0,6 cm se quedará asomando.

**24.** **Al introducir una piedra en un recipiente cilíndrico, de 20 cm de diámetro, la altura del agua que contiene sube 5 cm.**

**¿Cuál es el volumen de la piedra?**

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi = 1\,570{,}8 \text{ cm}^3$

El volumen de la piedra es de $1\,570{,}8 \text{ cm}^3$.

## Página 169

**25.** **Se introduce una bola de piedra de 12 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 12 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

**a) La cantidad de agua que se ha derramado.**

**b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.**

a) $V_{\text{BOLA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi = 904,78 \text{ cm}^3$

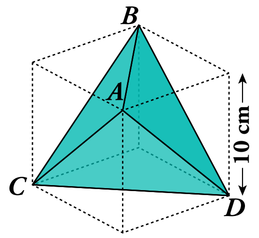
Se han derramado 904,78 $\text{cm}^3$ de agua.

b) Llamamos $h$ a la altura que alcanza el agua.

$904,78 = 12 \cdot 12 \cdot h \rightarrow 904,78 = 144h \rightarrow h = \frac{904,78}{144} = 6,28 \text{ cm}$

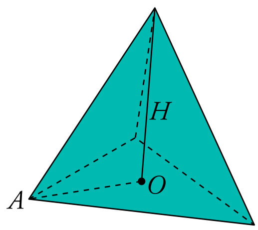
El algua alcanzará una altura de 6,28 cm.

**26.** **Este es el mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista. Halla su superficie y su volumen.**




Calculamos el lado del tetraedro:

$l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow l = 14,14 \text{ cm}$




Recordamos que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$. Por tanto, tenemos que hallar la altura del triángulo.

$h^2 = 14,14^2 - 7,07^2 \rightarrow h = 12,24 \text{ cm}$

$H^2 = 14,14^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 12,24\right)^2 = 133,29 \rightarrow H = 11,54 \text{ cm}$

$A_{\text{BASE}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14,14 \cdot 12,24 = 86,54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 86,54 = 346,15 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 86,54 \cdot 11,54 = 332,89 \text{ cm}^3$

**27.** **¿Cuál debe ser la altura de un cilindro cuya base mide 24 cm de radio para que su volumen sea 1 *l*?**

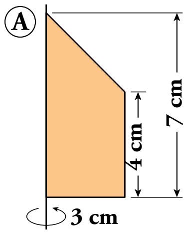
$1 \ l = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

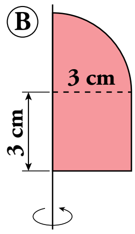
$V = \pi r^2 h$

$1\,000 = \pi \cdot 24^2 \cdot h \rightarrow h = \frac{1\,000}{576\pi} \rightarrow h = 0,55 \text{ cm}$

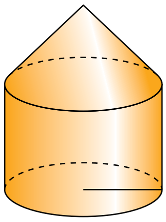
El cilindro medirá 0,55 cm de alto.

**28.** **Calcula el área total y el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**




Calculamos la generatriz:



$g^2 = 3^2 + 3^2 \to g^2 = 18 \to g = \sqrt{18} \to g = 4{,}24$ cm

$A_{CONO} = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 4{,}24 = 68{,}23 \text{ cm}^2$

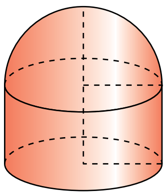
$A_{CILINDRO} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 131{,}95 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 68{,}23 + 131{,}95 = 200{,}18 \text{ cm}^2$

$$V_{CONO} = \frac{A_{BASE} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = 9\pi = 28{,}27 \text{ cm}^3$$

$V_{CILINDRO} = A_{BASE} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^3$

$V_{TOTAL} = 28{,}27 + 113{,}1 = 141{,}37 \text{ cm}^3$



$$A_{SEMIESFERA} = \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^2}{2} + \pi \cdot 3^2 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^2$$

$A_{CILINDRO} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 3 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 84{,}82 + 113{,}1 = 197{,}92 \text{ cm}^2$

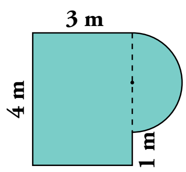
$$V_{SEMIESFERA} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = 6\pi = 18{,}85 \text{ cm}^3$$

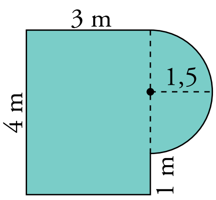
$V_{CILINDRO} = A_{BASE} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$

$V_{TOTAL} = 18{,}85 + 84{,}82 = 103{,}67 \text{ cm}^3$

**29.** **Calcula el volumen de una habitación de 2,30 m de altura, cuya planta tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura.**

**Halla, también, la superficie de las paredes.**




$A_{BASE} = a \cdot b + \pi r^2 = 3 \cdot 4 + \pi \cdot 1{,}5^2 = 19{,}07 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 19{,}07 \cdot 2{,}30 = 43{,}861 \text{ m}^3$

Calculamos la superficie de las paredes:

Perímetro $= 4 + 2 \cdot 3 + 1 + 1{,}5\pi = 15{,}71$

$A$ = Perímetro · altura $= 15{,}71 \cdot 2{,}30 = 36{,}13 \text{ m}^2$

El volumen es 43,861 $m^3$ y la superficie de las paredes 36,13 $m^2$.

**30.** **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm².  Halla el área total y el volumen del cono.**

Necesitamos saber la generatriz del cono y el radio de la base.

El arco de circunferencia correspondiente a 120° corresponderá con el perímetro de la circunferencia de la base.

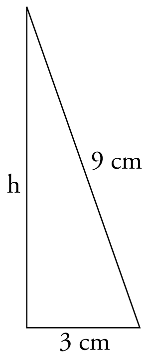
$$\frac{2\pi g 120°}{360°} = 2\pi r \rightarrow \frac{2}{3}\pi g = 2\pi r \rightarrow g = 3r$$

El área de la superficie lateral de un cono es $A_{\text{LATERAL}} = \pi r g$

$84{,}78 = \pi r g$

Así, hemos encontrado dos ecuaciones para las dos incógnitas que queremos saber:

$$\begin{cases} g = 3r \\ 84{,}78 = \pi r g \end{cases} \rightarrow 84{,}78 = \pi \cdot r \cdot 3r \rightarrow 84{,}78 = 3\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{84{,}78}{3\pi} \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3 \text{ cm}$$




$g = 3 \cdot 3 = 9$ cm

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi = 28{,}27 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 28{,}27 + 84{,}78 = 113{,}14 \text{ cm}^2$

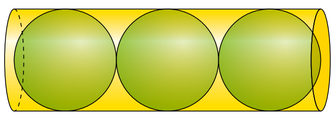
Para el volumen necesitamos la altura del cono:

$9^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h^2 = 81 - 9 \rightarrow h^2 = 72 \rightarrow h = \sqrt{72} = 8{,}5$ cm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 28{,}27 \cdot 8{,}5 = 240{,}3 \text{ cm}^3$

El área mide 113,14 cm² y el volumen, 240,3 cm³.

**31.** **Tres pelotas de tenis se introducen en un tubo cilíndrico de 6,6 cm de diámetro en el que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**



La altura del cilindro es la suma de los 3 diámetros de las pelotas de tenis:

$h = 3 \cdot 6{,}6 = 19{,}8$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 = 677{,}4 \text{ cm}^3$

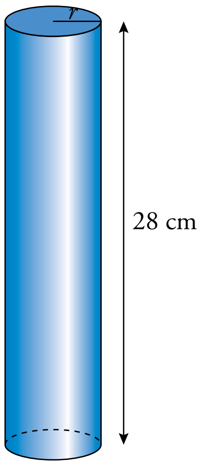
$$V_{\text{PELOTA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3 = 150{,}5 \text{ cm}^3$$

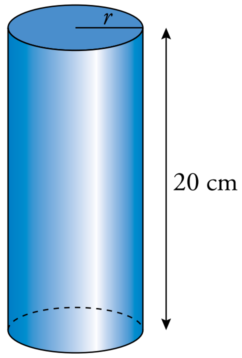
El volumen de las 3 pelotas es $3 \cdot 150{,}5 = 451{,}6 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen de la parte vacía es:

$V = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$

**32.** **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**




$L = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{20}{2\pi} = 3,18$

$V = \pi r^2 h = 891{,}27 \text{ cm}^3$

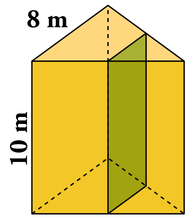
$L = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{28}{2\pi} = 4,46$

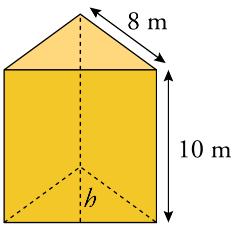
$V = \pi r^2 h = 1\,247{,}8 \text{ cm}^3$

Conseguimos mayor volumen si soldamos por el lado de 20 cm.

**33.** **Cortamos un prisma triangular regular por un plano perpendicular a las bases y que pasa por el punto medio de dos aristas.**

**Calcula el volumen de los dos prismas que se obtienen.**

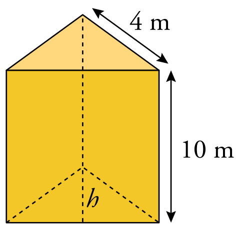



$h^2 = 8^2 - 4^2 \rightarrow h = 6{,}93 \text{ m}$

$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}71 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 27{,}71 \cdot 10 = 277{,}1 \text{ m}^3$

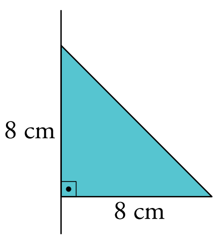



$h^2 = 4^2 - 2^2 \rightarrow h = 3{,}46 \text{ m}$

$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 6{,}93 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 6{,}93 \cdot 10 = 69{,}3 \text{ m}^3$

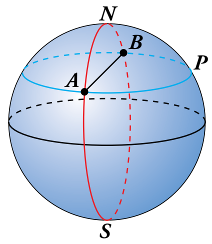
**34.** **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, se hace girar alrededor de la hipotenusa. Halla el volumen del cuerpo que se forma.**

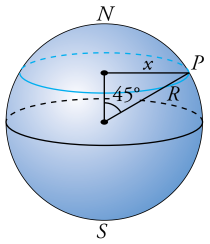



Se forma un cono:

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 536,16$

**35. Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (*APB*) o siguiendo la ruta polar (*ANB*). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto.**



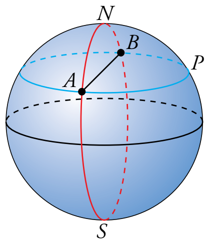




Hallamos el radio paralelo a 45°

$$R^2 = x^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{R^2}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504,27$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{APB}} = \frac{2\pi \cdot 4\,504,27}{2} = 14\,143,41 \text{ km}$$




Para ir de A a B por *ANB* abarca un ángulo de 45° + 45° = 90° sobre el meridiano.

Por tanto:

$$L_{\text{ANB}} = \frac{2\pi \cdot R \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi\, 6\,370}{2} \approx 10\,000,9 \text{ km}$$