1 Identidades y ecuaciones

Página 89

1. Las siguientes ecuaciones tienen alguna solución entera. Hállala tanteando.

a) $5^x = 25$ **b)** $(x-5)^2 = 4$

c) $3^x = 81$ **d)** $3^{x-1} = 81$

e) $\sqrt{x+3} = 4$ **f)** $x^x = 256$

a) $x = 2$

b) $(x-5)^2 = 4 \begin{cases} x-5=-2 \rightarrow x=3 \\ x-5=2 \rightarrow x=7 \end{cases}$

c) $3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 4$

d) $3^{x-1} = 81 \rightarrow 3^{x-1} = 3^4 \rightarrow x = 5$

e) $\sqrt{x+3} = 4 \rightarrow x+3 = 16 \rightarrow x = 13$

f) $x^x = 256 \rightarrow x^x = 4^4 \rightarrow x = 4$

2. Las siguientes ecuaciones no tienen solución entera.

Tanteando, obtén la solución de cada una de ellas aproximando hasta las décimas.

a) $x^5 = 400$ **b)** $x^4 = 5\,000$

c) $4^x = 200$ **d)** $x^x = 1\,000$

a) $3^5 = 243$; $3{,}5^5 = 525{,}22$; $3{,}3^5 = 391{,}35$; $3{,}4^5 = 454{,}35$

$x^5 = 400 \rightarrow x \approx 3{,}3$

b) $8{,}3^4 = 4\,745{,}83$; $8{,}4^4 = 4\,978{,}71$; $8{,}5^4 = 5\,220{,}06$

$x^4 = 5\,000 \rightarrow x \approx 8{,}4$

c) $4^{3,7} = 168{,}90$; $4^{3,8} = 194{,}01$; $4^{3,9} = 222{,}86$

$4^x = 200 \rightarrow x \approx 3{,}8$

d) $4{,}5^{4,5} = 869{,}87$; $4{,}6^{4,6} = 1\,118{,}63$

$x^x = 1\,000 \rightarrow x \approx 4{,}6$

2 Resolución de ecuaciones de primer grado

Página 91

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 11 + 2x = 5 + x - 6$

b) $5 - 7x + 2 - 6x = 10x - 7 - 2x$

c) $6x - 15 + 3x = x - 8 + 8x + 1$

d) $5x + 4 - 13x - 9 - 2x = 0$

e) $0 = 4x - 3 - x + 1 - 3x + 2$

a) $3x + 11 + 2x = 5 + x - 6$

$3x + 2x - x = 5 - 6 - 11$

$4x = -12$

$x = -\dfrac{12}{4} = -3$

b) $5 - 7x + 2 - 6x = 10x - 7 - 2x$

$7 - 13x = 8x - 7$

$14 = 21x$

$x = \dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3}$

c) $6x - 15 + 3x = x - 8 + 8x + 1$

$9x - 15 = 9x - 7$

$9x - 9x = -7 + 15$

$0 = 8 \;\rightarrow$ No hay solución.

d) $5x + 4 - 13x - 9 - 2x = 0$

$-10x - 5 = 0$

$-10x = 5$

$x = -\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2}$

e) $0 = 4x - 3 - x + 1 - 3x + 2$

$0 = 0 \;\rightarrow$ Infinitas soluciones.

2. Quita paréntesis y resuelve.

a) $8 + (5x - 6) = 3x - (x + 4)$

b) $x - (1 - 4x) - (6x - 5) + 1 = 0$

c) $3x - 1 - (2x + 1) = 1 - (x + 2) - 3$

d) $0 = (1 - x) + 2(x + 1) - 3(1 - x)$

e) $3(5x - 7) + 2(x - 1) = 5x - 3$

f) $5x + 3(1 - x) = 12 + 2(x - 5)$

g) $4(2 + 3x) = 10(x - 1) + 2(x + 9)$

h) $2(x - 3) - 5x + 7 = 11(1 - x) - (1 + 3x) - x$

i) $10[2x - (x - 1)] + 3 = 8x - 5(x + 3)$

j) $2x + 3 = 8 - 3[9 - 2(3x + 5)]$

k) $3x - 5[1 - 3(2x + 4)] = 3[1 - 4(x - 1)]$

a) $8 + (5x - 6) = 3x - (x + 4)$

$8 + 5x - 6 = 3x - x - 4$

$2 + 5x = 2x - 4$

$5x - 2x = -4 - 2$

$3x = -6$

$x = -\dfrac{6}{3} = -2$

b) $x - (1 - 4x) - (6x - 5) + 1 = 0$

$x - 1 + 4x - 6x + 5 + 1 = 0$

$-x + 5 = 0$

$5 = x$

c) $3x - 1 - (2x + 1) = 1 - (x + 2) - 3$

$3x - 1 - 2x - 1 = 1 - x - 2 - 3$

$x - 2 = -x - 4$

$x + x = -4 + 2$

$2x = -2$

$x = -\frac{2}{2} = -1$

d) $0 = (1 - x) + 2(x + 1) - 3(1 - x)$

$0 = 1 - x + 2x + 2 - 3 + 3x$

$0 = 4x$

$x = \frac{0}{4} = 0$

e) $3(5x - 7) + 2(x - 1) = 5x - 3$

$15x - 21 + 2x - 2 = 5x - 3$

$17x - 23 = 5x - 3$

$17x - 5x = -3 + 23$

$12x = 20$

$x = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

f) $5x + 3(1 - x) = 12 + 2(x - 5)$

$5x + 3 - 3x = 12 + 2x - 10$

$2x + 3 = 2x + 2$

$2x - 2x = 2 - 3$

$0 = -1$ No hay solución.

g) $4(2 + 3x) = 10(x - 1) + 2(x + 9)$

$8 + 12x = 10x - 10 + 2x + 18$

$8 + 12x = 12x + 8$ Infinitas soluciones.

h) $2(x - 3) - 5x + 7 = 11(1 - x) - (1 + 3x) - x$

$2x - 6 - 5x + 7 = 11 - 11x - 1 - 3x - x$

$-3x + 1 = -15x + 10$

$-3x + 15x = 10 - 1$

$12x = 9$

$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

i) $10[2x - (x - 1)] + 3 = 8x - 5(x + 3)$

$10[2x - x + 1] + 3 = 8x - 5x - 15$

$20x - 10x + 10 + 3 = 3x - 15$

$10x + 13 = 3x - 15$

$10x - 3x = -15 - 13$

$7x = -28$

$x = -\frac{28}{7} = -4$

j) $2x + 3 = 8 - 3[9 - 2(3x + 5)]$

$2x + 3 = 8 - 3[9 - 6x - 10]$

$2x + 3 = 8 - 27 + 18x + 30$

$2x + 3 = 11 + 18x$

$3 - 11 = 18x - 2x$

$-8 = 16x$

$x = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$

k) $3x - 5[1 - 3(2x + 4)] = 3[1 - 4(x - 1)]$

$3x - 5[1 - 6x - 12] = 3[1 - 4x + 4]$

$3x - 5 + 30x + 60 = 3 - 12x + 12$

$33x + 55 = -12x + 15$

$33x + 12x = 15 - 55$

$45x = -40$

$x = -\frac{40}{45} = -\frac{8}{9}$

3. **Quita denominadores y resuelve.**

a) $2x - 1 = x - \frac{x}{5}$

b) $5x - \frac{x}{3} + 2 = \frac{2x}{3}$

c) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{1}{10}$

d) $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{5} - x$

e) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = x + \frac{3}{10}$

f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

a) $2x - 1 = x - \frac{x}{5}$

$5[2x - 1] = 5\left[x - \frac{x}{5}\right]$

$10x - 5 = 5x - x$

$10x - 5x + x = 5$

$6x = 5$

$x = \frac{5}{6}$

b) $5x - \frac{x}{3} + 2 = \frac{2x}{3}$

$3\left[5x - \frac{x}{3} + 2\right] = 3\left[\frac{2x}{3}\right]$

$15x - x + 6 = 2x$

$15x - x - 2x = -6$

$12x = -6$

$x = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

c) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{1}{10}$

$10\left[1 - \frac{x}{5}\right] = 10\left[x + \frac{1}{10}\right]$

$10 - 2x = 10x + 1$

$10 - 1 = 10x + 2x$

$9 = 12x$

$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{5} - x$

$10\left[\frac{x}{2} + 1\right] = 10\left[\frac{x}{5} - x\right]$

$5x + 10 = 2x - 10x$

$10 = 2x - 10x - 5x$

$10 = -13x$

$x = -\frac{10}{13}$

e) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = x + \frac{3}{10}$

$10\left[\frac{2x}{5} + \frac{x}{2}\right] = 10\left[x + \frac{3}{10}\right]$

$4x + 5x = 10x + 3$

$9x - 10x = 3$

$-x = 3$

$x = -3$

f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

$12\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right] = 12\left[\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right]$

$6x + 2 = 4x + 3$

$6x - 4x = 3 - 2$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

4. **Resuelve.**

a) $2x - \frac{x}{3} = \frac{3x+1}{5} - 1$

b) $x - \frac{2x+3}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

c) $\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{2}$

d) $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} = \frac{14x-6}{9}$

e) $x + \frac{3(x-2)}{9} = \frac{5(x-1)}{4} + \frac{7}{12}$

f) $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5} = \frac{2(x+1)}{5} + \frac{37}{10}$

g) $\frac{-x-1}{6} - \frac{3(x+5)}{12} = \frac{2(11-x)}{9} - 6$

a) $2x - \frac{x}{3} = \frac{3x+1}{5} - 1$

$15\left[2x - \frac{x}{3}\right] = 15\left[\frac{3x+1}{5} - 1\right]$

$30x - 5x = 3(3x+1) - 15$

$25x = 9x + 3 - 15$

$25x - 9x = 3 - 15$

$16x = -12$

$x = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$

b) $x - \frac{2x+3}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

$12\left[x - \frac{2x+3}{4}\right] = 12\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right]$

$12x - 3(2x+3) = 6x + 4$

$12x - 6x - 9 = 6x + 4$

$12x - 6x - 6x = 4 + 9$

$0 = 13$ No hay solución.

c) $\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{2}$

$4\left[\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4}\right] = 4\left[\frac{x-1}{2}\right]$

$2(2x-3) - (x+3) = 2(x-1)$

$4x - 6 - x - 3 = 2x - 2$

$4x - x - 2x = -2 + 6 + 3$

$x = 7$

d) $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} = \frac{14x-6}{9}$

$\frac{9x + 2x - 3 + 3x - 3}{9} = \frac{14x-6}{9}$

$\frac{14x-6}{9} = \frac{14x-6}{9}$ Infinitas soluciones.

e) $x + \frac{3(x-2)}{9} = \frac{5(x-1)}{4} + \frac{7}{12}$

$36\left[x + \frac{3x-6}{9}\right] = 36\left[\frac{5x-5}{4} + \frac{7}{12}\right]$

$36x + 4(3x-6) = 9(5x-5) + 21$

$36x + 12x - 24 = 45x - 45 + 21$

$48x - 24 = 45x - 24$

$48x - 45x = -24 + 24$

$3x = 0$

$x = \frac{0}{3} = 0$

f) $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5} = \frac{2(x+1)}{5} + \frac{37}{10}$

$10\left[\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5}\right] = 10\left[\frac{2(x+1)}{5} + \frac{37}{10}\right]$

$15(x+2) + 2(x-1) = 4(x+1) + 37$

$15x + 30 + 2x - 2 = 4x + 4 + 37$

$17x + 28 = 4x + 41$

$17x - 4x = 41 - 28$

$13x = 13$

$x = \frac{13}{13} = 1$

g) $\frac{-x-1}{6} - \frac{3(x+5)}{12} = \frac{2(11-x)}{9} - 6$

$36\left[\frac{-x-1}{6} - \frac{3(x+5)}{12}\right] = 36\left[\frac{2(11-x)}{9} - 6\right]$

$6(-x-1) - 9(x+5) = 8(11-x) - 216$

$-6x - 6 - 9x - 45 = 88 - 8x - 216$

$-15x - 51 = -8x - 128$

$-51 + 128 = -8x + 15x$

$77 = 7x$

$x = \frac{77}{7} = 11$

Página 92

5. **Si al doble de un número le sumamos la cuarta parte de dicho número, el resultado es 189. ¿Cuál es el número?**

Llamamos x a ese número.

$2x + \frac{1}{4}x = 189 \rightarrow 8x + x = 756 \rightarrow 9x = 756 \rightarrow x = 84$

6. **Eloisa tiene 26 años menos que su madre. Entre las dos suman medio siglo. ¿Qué edad tiene cada una?**

x = edad de Eloisa

$x + 26$ = edad de la madre de Eloisa

$x + x + 26 = 50 \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{2} = 12$

Solución: Eloisa tiene 12 años. Su madre tiene 38 años.

7. **Un bote de tomate y un frasco de mostaza pesan 800 gramos. El bote pesa 150 gramos más que el frasco. ¿Cuánto pesa cada uno?**

x = peso del bote de tomate (g)

$x - 150$ = peso del frasco de mostaza (g)

$x + x - 150 = 800 \rightarrow 2x = 950 \rightarrow x = \frac{950}{2} = 475$

Solución: el bote de tomate pesa 475 g. El frasco de mostaza pesa 325 g.

8. **Tres hermanos se llevan, cada uno al siguiente, un año, y entre los tres suman 48 años. ¿Cuáles son sus edades?**

x = edad del hermano pequeño

$x + 1$ = edad del hermano mediano

$x + 2$ = edad del hermano mayor

$x + x + 1 + x + 2 = 48 \rightarrow 3x + 3 = 48 \rightarrow 3x = 45 \rightarrow x = \frac{45}{3} = 15$

Solución: las edades de los hermanos son 15, 16 y 17 años.

9. **La suma de tres números consecutivos es cuatro veces el menor de ellos. ¿Qué números son?**

Llamamos x al menor de los números.

$x + (x + 1) + (x + 2) = 4x \rightarrow 3x + 3 = 4x \rightarrow x = 3$

Los números son el 3, el 4 y el 5.

10. Entre mi amigo y yo llevamos en los bolsillos 8,20 €. Si yo le diera 80 céntimos, tendríamos los dos lo mismo. ¿Cuánto llevamos cada uno?

x = dinero que llevo (€)

$8{,}20 - x$ = € que lleva mi amigo

$$x - 0{,}80 = 8{,}20 - x + 0{,}80 \rightarrow x + x = 8{,}20 + 0{,}80 + 0{,}80 \rightarrow 2x = 9{,}80 \rightarrow x = \frac{9{,}80}{2} = 4{,}90$$

Solución: yo llevo 4,90 € y mi amigo lleva 3,30 €.

11. En un concurso de televisión, dotado con un premio total de 1 000 €, el concursante A se llevó el doble que el concursante B pero 100 € menos que el concursante C. ¿Cuánto se llevó cada uno?

x = € que se lleva B

$2x$ = € que se lleva A

$2x + 100$ = € que se lleva C

$$x + 2x + 2x + 100 = 1\,000 \rightarrow 5x = 1\,000 - 100 \rightarrow 5x = 900 \rightarrow x = \frac{900}{5} = 180$$

Solución: A se lleva $180 \cdot 2 = 360$ €. B se lleva 180 €. C se lleva $360 + 100 = 460$ €.

12. Doña Laura lleva una vida muy regular, y duerme todos los días una hora menos de la mitad del tiempo que está despierta. ¿Cuánto tiempo duerme?

x = horas que duerme Laura.

$24 - x$ = horas que está despierta Laura.

$$x = \frac{24 - x}{2} - 1 \rightarrow x + 1 = \frac{24 - x}{2} \rightarrow 2(x + 1) = 24 - x \rightarrow 2x + 2 = 24 - x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x + x = 24 - 2 \rightarrow 3x = 22 \rightarrow x = \frac{22}{3} = 7 + \frac{1}{3}$$

Solución: Laura duerme 7 h y $\frac{1}{3}$ de hora, es decir, 7 horas y 20 minutos.

13. Por tres cafés y dos cruasanes hemos pagado 7,70 €. ¿Cuál es el precio de un cruasán, sabiendo que cuesta 60 céntimos menos que un café?

x = precio de un café (€)

$x - 0{,}60$ = € que cuesta un cruasán

$$3x + 2(x - 0{,}60) = 7{,}70 \rightarrow 3x + 2x - 1{,}20 = 7{,}70 \rightarrow 5x = 7{,}70 + 1{,}20 \rightarrow 5x = 8{,}90 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{8{,}90}{5} = 1{,}78$$

Solución: un café cuesta 1,78 €. Un cruasán cuesta 1,18 €.

Página 93

14. Moliendo juntas dos clases de café, la primera de 7,50 €/kg y la segunda de 5,70 €/kg, se han obtenido 90 kg de mezcla que sale a 6,50 €/kg. ¿Cuánto café de cada clase se ha utilizado en la mezcla?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	VALOR (€)
CAFÉ CARO	x kg	7,50 €/kg	$7{,}50x$
CAFÉ BARATO	$90 - x$ kg	5,70 €/kg	$5{,}70\,(90 - x)$
MEZCLA	90 kg	6,50 €/kg	$90 \cdot 6{,}50$

$$7{,}50x + 5{,}70\,(90 - x) = 90 \cdot 6{,}50 \;\rightarrow\; 7{,}50x + 513 - 5{,}70x = 585 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 7{,}50x - 5{,}70x = 585 - 513 \;\rightarrow\; 1{,}80x = 72 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; x = \frac{72}{1{,}80} = 40$$

Solución: se han mezclado 40 kg de café caro con 50 kg de café barato.

15. Los ahorros de Adela quintuplican a los de su hermana Beatriz, pero si Adela hiciera a Beatriz una transferencia de 800 €, solo serían el triple. ¿Cuánto tiene cada una?

x = ahorros de Beatriz (€)

$5x$ = ahorros de Adela (€)

$$5x - 800 = 3(x + 800) \;\rightarrow\; 5x - 800 = 3x + 2\,400 \;\rightarrow\; 5x - 3x = 2\,400 + 800 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 2x = 3\,200 \;\rightarrow\; x = \frac{3\,200}{2} = 1\,600$$

Solución: Beatriz tiene ahorrados 1 600 €. Adela tiene ahorrados 5 · 1 600 = 8 000 €.

16. Aumentando un número en un 20 % y restándole dos unidades, se obtiene el mismo resultado que sumándole su séptima parte. ¿Qué número es?

x = número buscado

$$120\,\%\text{ de } x - 2 = x + \frac{x}{7} \;\rightarrow\; \frac{120x}{100} - 2 = x + \frac{x}{7} \;\rightarrow\; 1{,}2x - 2 = x + \frac{x}{7} \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 7[1{,}2x - 2] = 7\left[x + \frac{x}{7}\right] \;\rightarrow\; 8{,}4x - 14 = 7x + x \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 8{,}4x - 7x - x = 14 \;\rightarrow\; 0{,}4x = 14 \;\rightarrow\; x = \frac{14}{0{,}4} = 35$$

Solución: el número buscado es 35.

17. Hace dos años compré una bicicleta y un equipo de música por 260 €. Los acabo de vender por un total de 162 €, habiendo perdido el 30 % con la bicicleta y el 40 % con el equipo de música.

¿Cuánto me costó cada objeto?

x = precio de la bicicleta (€)

$260 - x$ = precio del equipo de música (€)

70 % de x + 60 % de $(260 - x) = 162$

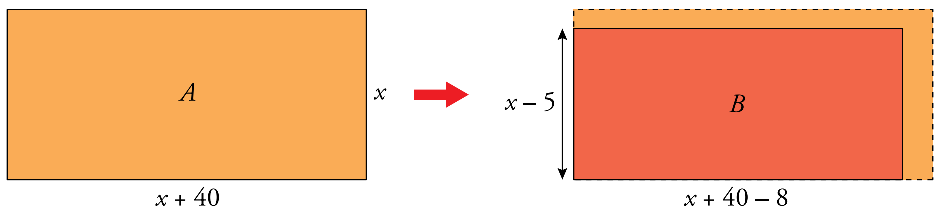
$$0{,}7x + 0{,}6(260 - x) = 162 \rightarrow 0{,}7x + 156 - 0{,}6x = 162 \rightarrow 0{,}7x - 0{,}6x = 162 - 156 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}1x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{0{,}1} = 60$$

Solución: la bicicleta costó 60 €. El equipo de música costó 260 – 60 = 200 €.

18. Una finca rectangular es 40 metros más larga que ancha. Al urbanizar la zona, se le recortan 8 m a lo largo y 5 m a lo ancho. Así, su perímetro se reduce en una décima parte.

¿Cuáles eran las dimensiones primitivas de la finca?



Perímetro de $B = \frac{9}{10}$ de Perímetro de A.

$$2(x + 40 - 8) + 2(x - 5) = \frac{9}{10} \cdot [2(x + 40) + 2x] \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x + 32) + 2(x - 5) = \frac{9[2(x + 40) + 2x]}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10[2(x + 32) + 2(x - 5)] = 9[2(x + 40) + 2x] \rightarrow$$

$$\rightarrow 10[2x + 64 + 2x - 10] = 9[2x + 80 + 2x] \rightarrow 10[4x + 54] = 9[4x + 80] \rightarrow$$

$$\rightarrow 40x + 540 = 36x + 720 \rightarrow 40x - 36x = 720 - 540 \rightarrow 4x = 180 \rightarrow x = \frac{180}{4} = 45$$

Solución: la finca mediá en su origen 45 m de ancho y 85 m de largo.

3 Ecuaciones de segundo grado

Página 94

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 - 20x + 100 = 0$

c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$

d) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

e) $10x^2 - 3x - 1 = 0$

f) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{7+5}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\ \dfrac{7-5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x = 6$, $x = 1$

b) $x^2 - 20x + 100 = 0$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} = \frac{20 \pm 0}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Solución: $x = 10$ (doble)

c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 132}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-107}}{6}$$

No tiene solución.

d) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \dfrac{-5+1}{12} = -\dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-5-1}{12} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluciones: $x = -\dfrac{1}{3}$, $x = -\dfrac{1}{2}$

e) $10x^2 - 3x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1)}}{2 \cdot 10} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{20} = \frac{3 \pm 7}{20} = \begin{cases} \dfrac{3+7}{20} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3-7}{20} = -\dfrac{4}{20} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Soluciones: $x = \dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{5}$

f) $2x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Solución: $x = 2$ (doble)

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $2x^2 - 50 = 0$ **b)** $x^2 - 1 = 0$

c) $3x^2 + 5 = 0$ **d)** $2x^2 + 10x = 0$

e) $4x^2 - 3 = 0$ **f)** $7x^2 - 5x = 0$

a) $2x^2 - 50 = 0 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = \dfrac{50}{2} \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 5,\ x_2 = -5$

b) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

c) $3x^2 + 5 = 0 \rightarrow 3x^2 = -5 \rightarrow x^2 = -\dfrac{5}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{5}{3}}$ No existe solución.

d) $2x^2 + 10x = 0 \rightarrow 2x(x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -5$

e) $4x^2 - 3 = 0 \rightarrow 4x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \dfrac{3}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $7x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(7x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x - 5 = 0 \rightarrow 7x = 5 \rightarrow x = 5/7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{5}{7}$

Página 95

3. Elimina los paréntesis, si los hay, y resuelve.

a) $2x^2 - 7 = 3x - x^2 - 1$ **b)** $3(x-1) + 5x^2 = x(x+3) + 1$

c) $3x(2-x) - 2 = 4x(x-1) + x^2$ **d)** $16 - 5x(2x-3) = x - 2x(3x-1)$

a) $2x^2 - 7 = 3x - x^2 - 1 \rightarrow 2x^2 + x^2 - 3x - 7 + 1 = 0 \rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\[2ex] \dfrac{1-3}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -1$

b) $3(x-1) + 5x^2 = x(x+3) + 1 \rightarrow 3x - 3 + 5x^2 = x^2 + 3x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 - x^2 + 3x - 3x - 3 - 1 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \dfrac{4}{4} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

c) $3x(2-x) - 2 = 4x(x-1) + x^2 \rightarrow 6x - 3x^2 - 2 = 4x^2 - 4x + x^2 \rightarrow$

$\rightarrow -8x^2 + 10x - 2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} \dfrac{5+3}{8} = 1 \\[2ex] \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{4}$

d) $16 - 5x(2x-3) = x - 2x(3x-1) \rightarrow 16 - 10x^2 + 15x = x - 6x^2 + 2x \rightarrow$

$\rightarrow -10x^2 + 6x^2 + 15x - x - 2x + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -4x^2 + 12x + 16 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\[2ex] \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -1$

4. Opera y resuelve.

a) $x^2 + 2x = (x + 2)(1 - x)$ **b)** $(x + 2)(x - 1) + 2 = x(2 - x)$

c) $3x - (x - 2)(x + 2) = 2(x^2 - 1)$ **d)** $x(x - 5) + x^2 = (3x - 1)(x - 1)$

e) $(3x - 2)(5x + 1) = 4(x - 1)$ **f)** $15 - (x + 2)^2 = (x - 3)^2 + 2x$

a) $x^2 + 2x = (x + 2)(1 - x) \rightarrow x^2 + 2x = x - x^2 + 2 - 2x \rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 2x - x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{-3 + 5}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-3 - 5}{4} = -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -2$

b) $(x + 2)(x - 1) + 2 = x(2 - x) \rightarrow x^2 + 2x - x - 2 + 2 = 2x - x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + x^2 + 2x - x - 2x - 2 + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 - x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$

c) $3x - (x - 2)(x + 2) = 2(x^2 - 1) \rightarrow 3x - (x^2 - 4) = 2x^2 - 2 \rightarrow 3x - x^2 + 4 - 2x^2 + 2 = 0$

$\rightarrow -3x^2 + 3x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1 + 3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{1 - 3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -1$

d) $x(x - 5) + x^2 = (3x - 1)(x - 1) \rightarrow x^2 - 5x + x^2 = 3x^2 - 3x - x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 5x - 3x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow -x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$ No tiene solución.

e) $(3x - 2)(5x + 1) = 4(x - 1) \rightarrow 15x^2 + 3x - 10x - 2 = 4x - 4 \rightarrow$

$\rightarrow 15x^2 - 7x - 2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2}}{2 \cdot 15} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{30} = \frac{11 \pm 1}{30} = \begin{cases} \dfrac{11 + 1}{30} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{11 - 1}{30} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = \frac{1}{3}$

f) $15 - (x + 2)^2 = (x - 3)^2 + 2x \rightarrow 15 - (x^2 + 4 + 4x) = x^2 + 9 - 6x + 2x \rightarrow$

$\rightarrow 15 - x^2 - 4 - 4x - x^2 - 9 + 6x - 2x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

5. Elimina los denominadores y resuelve.

a) $x(2x+1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}=3$

b) $\dfrac{x(x+3)}{2}-\dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{1}{3}=0$

c) $\dfrac{7-x^2}{8}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2x^2+1}{4}$

d) $1-\dfrac{x}{6}=\dfrac{(x-2)x}{2}+\dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{2(x+3)(x-3)}{5}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x(x-2)}{2}$

f) $\dfrac{(x+2)^2}{7}-x=\dfrac{x(x-4)}{2}+1$

g) $\dfrac{(2x-3)^2}{9}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{(x-1)^2+5}{6}$

a) $x(2x+1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}=3 \;\rightarrow\; 2\left[x(2x+1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}\right]=2\cdot 3$

$\rightarrow\; 2x(2x+1)-(x-1)^2=6 \;\rightarrow\; 4x^2+2x-(x^2+1-2x)-6=0$

$\rightarrow\; 4x^2+2x-x^2-1+2x-6=0 \;\rightarrow\; 3x^2+4x-7=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-7)}}{2\cdot 3}=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{6}=\frac{-4\pm 10}{6}=\begin{cases}\dfrac{-4+10}{6}=\dfrac{6}{6}=1\\[2ex]\dfrac{-4-10}{6}=\dfrac{-14}{6}=\dfrac{-7}{3}\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=1,\; x_2=\dfrac{-7}{3}$

b) $\dfrac{x(x+3)}{2}-\dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{1}{3}=0 \;\rightarrow\; 6\left[\dfrac{x(x+3)}{2}-\dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{1}{3}\right]=6\cdot 0$

$\rightarrow\; 3x(x+3)-2(x+1)^2+2=0 \;\rightarrow\; 3x^2+9x-2(x^2+1+2x)+2=0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 3x^2+9x-2x^2-2-4x+2=0 \;\rightarrow\; x^2+5x=0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x(x+5)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases}x=0\\ x+5=0 \;\rightarrow\; x=-5\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=-5$

c) $\dfrac{7-x^2}{8}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2x^2+1}{4} \;\rightarrow\; 8\left[\dfrac{7-x^2}{8}-\dfrac{1}{2}\right]=8\left[\dfrac{2x^2+1}{4}\right] \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 7-x^2-4=2(2x^2+1) \;\rightarrow\; 3-x^2=4x^2+2 \;\rightarrow\; -x^2-4x^2=2-3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -5x^2=-1 \;\rightarrow\; x^2=\dfrac{-1}{-5}=\dfrac{1}{5} \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Soluciones: $x_1=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\; x_2=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

d) $1-\dfrac{x}{6}=\dfrac{(x-2)x}{2}+\dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; 6\left[1-\dfrac{x}{6}\right]=6\left[\dfrac{(x-2)x}{2}+\dfrac{2}{3}\right] \;\rightarrow\; 6-x=3x(x-2)+4 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 6-x=3x^2-6x+4 \;\rightarrow\; 3x^2-6x+4-6+x=0 \;\rightarrow\; 3x^2-5x-2=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm 7}{6}=\begin{cases}\dfrac{5+7}{6}=2\\[2ex]\dfrac{5-7}{6}=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=2,\; x_2=-\dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{2(x+3)(x-3)}{5}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x(x-2)}{2} \to 10\left[\dfrac{2(x+3)(x-3)}{5}+\dfrac{x}{2}\right]=10\left[\dfrac{x(x-2)}{2}\right] \to$

$\to 4(x+3)(x-3)+5x=5x(x-2) \to 4(x^2-9)+5x=5x^2-10x \to$

$\to 4x^2-36+5x-5x^2+10x=0 \to -x^2+15x-36=0$

$$x=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4(-1)(-36)}}{2(-1)}=\frac{-15\pm\sqrt{225-144}}{-2}=\frac{-15\pm 9}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-15+9}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3\\[2ex]\dfrac{-15-9}{-2}=\dfrac{-24}{-2}=12\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=12$

f) $\dfrac{(x+2)^2}{7}-x=\dfrac{x(x-4)}{2}+1 \to 14\left[\dfrac{(x+2)^2}{7}-x\right]=14\left[\dfrac{x(x-4)}{2}+1\right] \to$

$\to 2(x+2)^2-14x=7x(x-4)+14 \to 2(x^2+4+4x)-14x=7x^2-28x+14 \to$

$\to 2x^2+8+8x-14x-7x^2+28x-14=0 \to -5x^2+22x-6=0$

$$x=\frac{-22\pm\sqrt{22^2-4(-5)(-6)}}{2(-5)}=\frac{-22\pm\sqrt{484-120}}{-10}=\frac{-22\pm\sqrt{364}}{-10}=$$

$$=\frac{-22\pm 2\sqrt{91}}{-10}=\begin{cases}\dfrac{-22+2\sqrt{91}}{-10}=\dfrac{11-\sqrt{91}}{5}\\[2ex]\dfrac{-22-2\sqrt{91}}{-10}=\dfrac{11+\sqrt{91}}{5}\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=\dfrac{11-\sqrt{91}}{5},\ x_2=\dfrac{11+\sqrt{91}}{5}$

g) $\dfrac{(2x-3)^2}{9}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{(x-1)^2+5}{6} \to 18\left[\dfrac{(2x-3)^2}{9}+\dfrac{x}{2}\right]=18\left[\dfrac{(x-1)^2+5}{6}\right] \to$

$\to 2(2x-3)^2+9x=3[(x-1)^2+5] \to 2(4x^2+9-12x)+9x=3[x^2+1-2x+5] \to$

$\to 8x^2+18-24x+9x=3x^2+3-6x+15 \to 8x^2+18-15x-3x^2+6x-18=0 \to$

$$\to 5x^2-9x=0 \to x(5x-9)=0 \to \begin{cases}x=0\\ 5x-9=0 \to x=9/5\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=\dfrac{9}{5}$

Página 96

6. El producto de dos números naturales consecutivos es 90. ¿Qué números son?

$x(x+1) = 90 \rightarrow x^2 + x - 90 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} 9 \\ -10 \end{cases}$$

Como los números son naturales, la solución $x = -10$ no es válida. Los números son 9 y 10.

7. Si multiplico mi edad por la que tenía el año pasado, obtengo el mismo resultado que si multiplico la que tenía hace cuatro años por la que tendré dentro de cuatro. ¿Cuántos años tengo?

x = mi edad actual

$x(x-1) = (x-4)(x+4) \rightarrow x^2 - x = x^2 - 16 \rightarrow x^2 - x - x^2 + 16 = 0 \rightarrow -x + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 16$

Solución: tengo 16 años actualmente.

8. El producto de dos números es 10, y su suma, 6,5. ¿Qué números son?

Si un número es x, el otro es $6{,}5 - x$.

$x \cdot (6{,}5 - x) = 10 \rightarrow 6{,}5x - x^2 = 10 \rightarrow x^2 - 6{,}5x + 10 = 0$

$$x = \frac{6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 40}}{2} = \frac{6{,}5 \pm 1{,}5}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2{,}5 \end{cases}$$

$$6{,}5 - x = \begin{cases} 6{,}5 - 4 = 2{,}5 \\ 6{,}5 - 2{,}5 = 4 \end{cases}$$

Los números son 2,5 y 4.

9. La superficie de un rectángulo es 150 cm², y su perímetro, 50 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Base del rectángulo $\rightarrow x$

Altura del rectángulo $\rightarrow \dfrac{50 - 2x}{2} = 25 - x$

Área $= x \cdot (25 - x) = 150 \rightarrow 25x - x^2 - 150 = 0 \rightarrow x^2 - 25x + 150 = 0$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} = \begin{cases} 15 \\ 10 \end{cases}$$

$$25 - x = \begin{cases} 25 - 15 = 10 \\ 25 - 10 = 15 \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son 10 cm y 15 cm.

10. Los tres lados de un triángulo miden 15 cm, 22 cm y 23 cm. Si a los tres les restamos la misma longitud, el triángulo resultante es rectángulo. ¿Qué longitud es esa?

Llamamos x a la cantidad que restamos.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(23 - x)^2 = (15 - x)^2 + (22 - x)^2 \rightarrow$

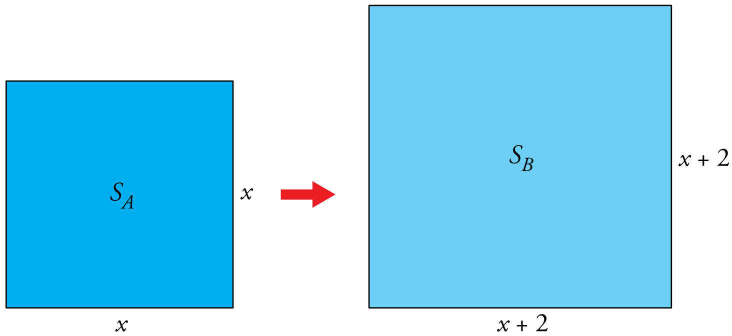
$\rightarrow 529 + x^2 - 46x = 225 + x^2 - 30x + 484 + x^2 - 44x \rightarrow x^2 - 28x + 180 = 0$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 720}}{2} = \frac{28 \pm 8}{2} = \begin{cases} 18 \\ 10 \end{cases}$$

La solución $x = 18$ no es válida, ya que uno de los lados mide 15.

La longitud buscada es 10 cm.

11. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su superficie aumenta 28 cm². ¿Cuánto mide el lado?



$S_B = S_A + 28$

$(x + 2)^2 = x^2 + 28$

$x^2 + 4 + 4x = x^2 + 28$

$x^2 + 4 + 4x - x^2 - 28 = 0$

$4x - 24 = 0$

$4x = 24$

$x = \frac{24}{4} = 6$

Solución: el lado del cuadrado mide 6 cm.

Página 97

12. El área total de un cilindro de 22 m de altura es 1 110π m². Halla su radio.

$A_{\text{TOTAL}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi(r^2 + rh) = 1\,110\pi \rightarrow 2(r^2 + rh) = 1\,110 \rightarrow$

$\rightarrow r^2 + 22r = 555 \rightarrow r^2 + 22r - 555 = 0$

$$r = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 2\,220}}{2} = \frac{-22 \pm 52}{2} = \begin{cases} 15 \\ -37 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Radio del cilindro = 15 m

13. Un depósito cilíndrico de combustible, de 22 m de altura, tiene una superficie total de 2 380 m². ¿Cuánto mide su radio?

$2\pi(r^2 + rh) = 2\,380 \rightarrow \pi(r^2 + 22r) = 1\,190 \rightarrow \pi r^2 + 22\pi r - 1\,190 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow r^2 + 22r - (1\,190/\pi) = 0$

$$r = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + (4\,760/\pi)}}{2} = \frac{-22 \pm 44{,}71}{2} = \begin{cases} 11{,}36 \\ -33{,}36 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

El radio mide, aproximadamente, 11,36 m.

14. Un inversor deposita 20 000 € a un cierto porcentaje. Al cabo de un año, añade 10 000 € y mantiene todo el capital al mismo porcentaje. Al finalizar el segundo año le devuelven 35 200 €.

¿A qué porcentaje impuso su capital inicial?

Primer año $\rightarrow 20\,000x$

Segundo año $\rightarrow (20\,000x + 10\,000)x$

$20\,000x^2 + 10\,000x = 35\,200 \rightarrow 200x^2 + 100x - 352 = 0 \rightarrow 50x^2 + 25x - 88 = 0$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 17\,600}}{100} = \frac{-25 \pm 135}{100} = \begin{cases} 1{,}10 \\ -1{,}60 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

El índice de crecimiento anual es 1,10. Por tanto, el porcentaje de aumento anual es del 10 %.

4 Otros tipos de ecuaciones

Página 98

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-4)(x-6)=0$

b) $(x+2)(x-3)=0$

c) $(x+1)(3x-5)=0$

d) $(3x+1)(2x-3)=0$

e) $x(x^2-64)=0$

f) $3x(x^2+x-2)=0$

g) $(x+1)(x^2-4)=0$

h) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0$

i) $(x+3)\left(\dfrac{1}{x}-4\right)=0$

j) $(x-4)\left(\dfrac{4}{3x-1}-2\right)=0$

a) $(x-4)(x-6)=0 \begin{cases} x-4=0 \ \rightarrow \ x_1=4 \\ x-6=0 \ \rightarrow \ x_2=6 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=4, \ x_2=6$

b) $(x+2)(x-3)=0 \begin{cases} x+2=0 \ \rightarrow \ x_1=-2 \\ x-3=0 \ \rightarrow \ x_2=3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-2, \ x_2=3$

c) $(x+1)(3x-5)=0 \begin{cases} x+1=0 \ \rightarrow \ x_1=-1 \\ 3x-5=0 \ \rightarrow \ x_2=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-1, \ x_2=\dfrac{5}{3}$

d) $(3x+1)(2x-3)=0 \begin{cases} 3x+1=0 \ \rightarrow \ x_1=-\dfrac{1}{3} \\ 2x-3=0 \ \rightarrow \ x_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-\dfrac{1}{3}, \ x_2=\dfrac{3}{2}$

e) $x(x^2-64)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x^2-64=0 \begin{cases} x_2=8 \\ x_3=-8 \end{cases} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0, \ x_2=8, \ x_3=-8$

f) $3x(x^2+x-2)=0 \begin{cases} 3x=0 \ \rightarrow \ x_1=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases}$

$x^2+x-2=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}= \begin{cases} x_2=\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_3=\dfrac{-1-3}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1=0, \ x_2=1, \ x_3=-2$

g) $(x+1)(x^2-4)=0 \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x_1=-1 \\ x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_2=2,\ x_3=-2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=-2$

h) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0 \begin{cases} 2x+1=0 \rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+5x-24=0 \end{cases}$

$$x^2+5x-24=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{2}=\frac{-5\pm 11}{2}= \begin{cases} x_2=3 \\ x_3=-8 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=3,\ x_3=-8$

i) $(x+3)\left(\dfrac{1}{x}-4\right)=0 \begin{cases} x+3=0 \rightarrow x_1=-3 \\ \dfrac{1}{x}-4=0 \rightarrow \dfrac{1}{x}=4 \rightarrow x_2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-3,\ x_2=\dfrac{1}{4}$

j) $(x-4)\left(\dfrac{4}{3x-1}-2\right)=0 \begin{cases} x-4=0 \rightarrow x_1=4 \\ \dfrac{4}{3x-1}-2 \end{cases}$

$$\frac{4}{3x-1}-2=0 \rightarrow \frac{4}{3x-1}=2 \rightarrow \frac{3x-1}{4}=\frac{1}{2} \rightarrow 4\left[\frac{3x-1}{4}\right]=4\left[\frac{1}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x-1=2 \rightarrow 3x=3 \rightarrow x_2=1$$

Soluciones: $x_1=4,\ x_2=1$

2. Elimina los denominadores y resuelve.

a) $\dfrac{12}{x}+1=x+2$

b) $\dfrac{7}{x}-2=x+\dfrac{4}{x}$

c) $\dfrac{5}{x^2+1}+1=\dfrac{10}{x^2+1}$

d) $\dfrac{2}{3x-1}+x=\dfrac{x+3}{3x-1}$

e) $\dfrac{5}{x-3}-1=x$

f) $\dfrac{8}{x}-3=\dfrac{5}{x+3}$

g) $\dfrac{15}{x-1}=\dfrac{12}{x}+1$

h) $\dfrac{7}{x+2}+2=\dfrac{9}{x-2}$

a) $\dfrac{12}{x}+1=x+2 \rightarrow x\left[\dfrac{12}{x}+1\right]=x[x+2] \rightarrow 12+x=x^2+2x \rightarrow$

$$\rightarrow x^2+2x-x-12=0 \rightarrow x^2+x-12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}= \begin{cases} \dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ \dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4 \end{cases}$$

Comprobamos si $x=3$ y $x=-4$ son soluciones:

- Si $x=3$

  $\dfrac{12}{3}+1=3+2$

  $4+1=5$ (Sí es solución)

- Si $x=-4$

  $\dfrac{12}{-4}+1=-4+2$

  $-3+1=-2$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-4$

b) $\frac{7}{x} - 2 = x + \frac{4}{x} \rightarrow x\left[\frac{7}{x} - 2\right] = x\left[x + \frac{4}{x}\right] \rightarrow 7 - 2x = x^2 + 4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 4 + 2x - 7 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Comprobamos si son válidos los valores:

- Si $x = 1$

$\frac{7}{1} - 2 = 1 + \frac{4}{1}$

$7 - 2 = 1 + 4$ (Sí es solución)

- Si $x = -3$

$\frac{7}{-3} - 2 = -3 + \frac{4}{-3}$

$\frac{-7-6}{3} = \frac{-9-4}{3}$

$\frac{-13}{3} = \frac{-13}{3}$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -3$

c) $\frac{5}{x^2+1} + 1 = \frac{10}{x^2+1} \rightarrow (x^2+1)\left[\frac{5}{x^2+1} + 1\right] = (x^2+1)\left[\frac{10}{x^2+1}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 5 + x^2 + 1 = 10 \rightarrow x^2 = 10 - 1 - 5 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Comprobamos si son válidos:

- Si $x = 2$

$\frac{5}{2^2+1} + 1 = \frac{10}{2^2+1}$

$\frac{5}{5} + 1 = \frac{10}{5}$

$2 = 2$ (Sí es solución)

- Si $x = -2$

$\frac{5}{(-2)^2+1} + 1 = \frac{10}{(-2)^2+1}$

$\frac{5}{5} + 1 = \frac{10}{5}$

$2 = 2$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) $\frac{2}{3x-1} + x = \frac{x+3}{3x-1} \rightarrow (3x-1)\left[\frac{2}{3x-1} + x\right] = (3x-1)\left[\frac{x+3}{3x-1}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 2 + x(3x-1) = x + 3 \rightarrow 2 + 3x^2 - x - x - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Comprobamos si son válidos los valores:

- Si $x = 1$

$\frac{2}{3 \cdot 1 - 1} + 1 = \frac{1+3}{3 \cdot 1 - 1}$

$\frac{2}{2} + 1 = \frac{4}{2}$

$1 + 1 = 2$ (Sí es solución)

- Si $x = -\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3(-1/3) - 1} + 1 = \frac{-1/3 + 3}{3(-1/3) - 1}$

$\frac{2}{-1-1} + 1 = \frac{-8/3}{-1-1}$

$0 = \frac{-8/3}{-2}$ (No es solución)

Solución: $x = 1$

e) $\dfrac{5}{x-3} - 1 = x \;\to\; \dfrac{5}{x-3} = x + 1 \;\to\; 5 = (x+1)(x-3) \;\to\; 5 = x^2 - 3x + x - 3 \;\to$

$\to\; x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\[2mm] \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x = 4$

  $\dfrac{5}{4-3} - 1 = 4$

  $5 - 1 = 4$ (Sí es solución)

- Si $x = -2$

  $\dfrac{5}{-2-3} - 1 = -2$

  $-1 - 1 = -2$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 4,\; x_2 = -2$

f) $\dfrac{8}{x} - 3 = \dfrac{5}{x+3} \;\to\; \dfrac{8-3x}{x} = \dfrac{5}{x+3} \;\to\; (8-3x)(x+3) = 5x \;\to$

$\to\; 8x + 24 - 3x^2 - 9x - 5x = 0 \;\to\; -3x^2 - 6x + 24 = 0 \;\to\; x^2 + 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2-6}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \\[2mm] \dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x = -4$

  $\dfrac{8}{-4} - 3 = \dfrac{5}{-4+3}$

  $-2 - 3 = -5$ (Sí es solución)

- Si $x = 2$

  $\dfrac{8}{2} - 3 = \dfrac{5}{2+3}$

  $1 = 1$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = -4,\; x_2 = 2$

g) $\dfrac{15}{x-1} = \dfrac{12}{x} + 1 \;\to\; \dfrac{15}{x-1} = \dfrac{12+x}{x} \;\to\; 15x = (x-1)(12+x) \;\to$

$\to\; 15x = 12x + x^2 - 12 - x \;\to\; x^2 + 12x - x - 12 - 15x = 0 \;\to\; x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+8}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\[2mm] \dfrac{4-8}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x = 6$

  $\dfrac{15}{6-1} = \dfrac{12}{6} + 1$

  $\dfrac{15}{5} = 2 + 1$ (Sí es solución)

- Si $x = -2$

  $\dfrac{15}{-2-1} = \dfrac{12}{-2} + 1$

  $-5 = -6 + 1$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 6,\; x_2 = -2$

h) $\dfrac{7}{x+2}+2=\dfrac{9}{x-2} \rightarrow \dfrac{7+2(x+2)}{x+2}=\dfrac{9}{x-2} \rightarrow (x-2)[7+2(x+2)]=9(x+2) \rightarrow$

$\rightarrow (x-2)[7+2x+4]=9x+18 \rightarrow (x-2)(2x+11)-9x-18=0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2+11x-4x-22-9x-18=0 \rightarrow 2x^2-2x-40=0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-x-20=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{1\pm 9}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+9}{2}=\dfrac{10}{2}=5\\[2ex] \dfrac{1-9}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x=5$

  $\dfrac{7}{5+2}+2=\dfrac{9}{5-2}$

  $\dfrac{7}{7}+2=\dfrac{9}{3}$

  $1+2=3$ (Sí es solución)

- Si $x=-4$

  $\dfrac{7}{-4+2}+2=\dfrac{9}{-4-2}$

  $-\dfrac{7}{2}+2=-\dfrac{9}{6}$

  $-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1=5,\ x_2=-4$

Página 99

3. **Resuelve.**

a) $\sqrt{x} - 3 = 0$ **b)** $\sqrt{x} + 2 = x$

c) $\sqrt{4x + 5} = x + 2$ **d)** $\sqrt{x + 1} - 3 = x - 8$

e) $3\sqrt{x - 1} = 2x - 11$ **f)** $x = \sqrt{2x^2 - 1}$

g) $\sqrt{2x^2 - 2} = 1 - x$ **h)** $\sqrt{3x^2 + 4} = \sqrt{5x + 6}$

a) $\sqrt{x} - 3 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$

b) $\sqrt{x} + 2 = x \rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \rightarrow x = (x - 2)^2 \rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

Si $x = 4 \rightarrow \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$ $\quad x_1 = 4$ es válida.

Si $x = 1 \rightarrow \sqrt{1} + 2 = 1 + 2 = 3 \neq 1$ $\quad x_2 = 1$ no es válida.

Solución: $x = 4$

c) $\sqrt{4x + 5} = x + 2$

$$\left(\sqrt{4x + 5}\right)^2 = (x + 2)^2 \rightarrow 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 - 4x - 5 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Comprobación:

Si $x = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{4x + 5} = \sqrt{9} = 3 \\ 1 + 2 = 3 \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = 1$ es solución.

Si $x = -1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{4x + 5} = \sqrt{1} = 1 \\ -1 + 2 = 1 \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = -1$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

d) $\sqrt{x + 1} = x - 8 + 3 \rightarrow \sqrt{x + 1} = x - 5 \rightarrow \left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = (x - 5)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow x + 1 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$$

Comprobación:

Si $x = 8 \rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{8 + 1} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0 \\ 8 - 8 = 0 \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = 8$ es válida.

Si $x = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{3 + 1} - 3 = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1 \\ 3 - 8 = -5 \end{array}\right\}$ No coinciden $\rightarrow x = 3$ no es válida.

Solución: $x = 8$

e) $3\sqrt{x-1} = 2x - 11 \rightarrow \left(3\sqrt{x-1}\right)^2 = (2x-11)^2 \rightarrow 9(x-1) = 4x^2 + 121 - 44x \rightarrow$

$\rightarrow 9x - 9 = 4x^2 + 121 - 44x \rightarrow 4x^2 - 53x + 130 = 0$

$$x = \frac{-(-53) \pm \sqrt{2\,809 - 2\,080}}{8} = \frac{53 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{53 \pm 27}{8} = \begin{cases} 10 \\ 26/8 = 13/4 \end{cases}$$

Comprobación:

Si $x = 10 \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\sqrt{10-1} = 3 \cdot 3 = 9 \\ 2 \cdot 10 - 11 = 9 \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = 10$ es solución.

Si $x = 13/4 \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\sqrt{13/4 - 1} = 3 \cdot 3/2 = 9/2 \\ 2 \cdot 13/4 - 11 = -9/2 \end{array}\right\}$ No coinciden $\rightarrow x = 13/4$ no es solución.

Solución: $x = 10$

f) $x = \sqrt{2x^2 - 1} \rightarrow x^2 = \left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2 \rightarrow x^2 = 2x^2 - 1 \rightarrow 2x^2 - 1 - x^2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Comprobación:

Si $x = 1 \rightarrow 1 = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 1} \rightarrow 1 = 1$ $\quad x_1 = 1$ es solución.

Si $x = -1 \rightarrow -1 = \sqrt{2 \cdot (-1)^2 - 1} \rightarrow -1 \neq 1$ $\quad x_2 = -1$ no es solución.

Solución: $x = 1$

g) $\left(\sqrt{2x^2 - 2}\right)^2 = (1-x)^2 \rightarrow 2x^2 - 2 = 1 - 2x + x^2 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

Si $x = -3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{2 \cdot 9 - 2} = \sqrt{18 - 2} = \sqrt{16} = 4 \\ 1 - (-3) = 1 + 3 = 4 \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = -3$ es solución.

Si $x = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{2 \cdot 1 - 2} = \sqrt{2 - 2} = 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = 1$ es solución.

Soluciones: $x_1 = -3,\ x_2 = 1$

h) $\left(\sqrt{3x^2 + 4}\right)^2 = \left(\sqrt{5x + 6}\right)^2 \rightarrow 3x^2 + 4 = 5x + 6 \rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$

Comprobación:

Si $x = 2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot 4 + 4} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{5 \cdot 2 + 6} = \sqrt{10 + 6} = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = 2$ es solución.

Si $x = -\frac{1}{3} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} + 4} = \sqrt{\frac{1}{3} + 4} = \sqrt{\frac{13}{3}} \\ \sqrt{5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6} = \sqrt{-\frac{5}{3} + 6} = \sqrt{\frac{13}{3}} \end{array}\right\}$ Coinciden $\rightarrow x = -\frac{1}{3}$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{3}$

4. **Un comerciante de un mercadillo ha obtenido 240 € por la venta de cierta cantidad de camisas. Habría obtenido lo mismo vendiendo 6 unidades menos, pero dos euros más caras. ¿Cuántas camisas ha vendido?**

x = número de camisas vendidas

$\frac{240}{x}$ = precio de una camisa (€)

$$240 = (x-6)\left(\frac{240}{x}+2\right) \rightarrow 240 = 240 + 2x - \frac{1440}{x} - 12 \rightarrow 2x - \frac{1440}{x} - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 - 1440 - 12x = 0 \rightarrow x^2 - 6x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-720)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 2880}}{2} = \frac{6 \pm 54}{2} = \begin{cases} \frac{6+54}{2} = \frac{60}{2} = 30 \\ \frac{6-54}{2} \end{cases}$$

La solución negativa no es solución del problema, ya que el número de camisas vendidas no puede ser negativo.

Solución: se han vendido 30 camisas.

5. **Piensa en un triángulo rectángulo y escribe el enunciado de un problema que se resuelva con la ecuación $\sqrt{x^2+8^2} = x + 2$. Da la solución.**

POSIBLE ENUNCIADO: De un triángulo rectángulo conocemos la medida de uno de sus catetos, 8 cm, y sabemos que la hipotenusa mide 2 cm más que el otro cateto. Calcula la medida de los tres lados.

$$\sqrt{x^2+8^2} = x + 2 \rightarrow \left(\sqrt{x^2+8^2}\right)^2 = (x+2)^2 \rightarrow x^2 + 64 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 64 - 4 = 4x \rightarrow$$

$$\rightarrow 60 = 4x \rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$$

Solución: Los catetos miden 8 y 15 cm. La hipotenusa mide 17 cm.

Ejercicios y problemas

Página 100

Practica

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1. **Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{x+3} = 32$ **b)** $\sqrt{2x+1} = 9$

c) $x^{x+1} = 8$ **d)** $(x-1)^3 = 27$

a) $2^{x+3} = 32 \rightarrow 2^{x+3} = 2^5 \rightarrow x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$

b) $\sqrt{2x+1} = 9 \rightarrow 2x + 1 = 81 \rightarrow 2x = 80 \rightarrow x = 40$

c) $x^{x+1} = 8 \rightarrow x = 2$ (porque $2^{2+1} = 2^3 = 8$)

d) $(x-1)^3 = 27 \rightarrow (x-1)^3 = 3^3 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$

2. **Las siguientes ecuaciones tienen más de una solución entera. Búscalas tanteando.**

a) $(x+1)^2 = 4$ **b)** $(x+1)(x-3) = 0$

c) $x^2 = 2x$ **d)** $3(x-2)^2 = 3$

a) $(x+1)^2 = 4 \rightarrow x + 1$ puede ser 2 o –2, esto es $x_1 = 1$ o $x_2 = -3$

b) $(x+1)(x-3) = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

c) $x^2 = 2x \rightarrow x_1 = 0$ o $x_2 = 2$

d) $3(x-2)^2 = 3 \rightarrow (x-2)^2 = 1 \rightarrow x - 2$ es 1 o –1, esto es, $x_1 = 3$ o $x_2 = 1$

3. **Busca por tanteo, con la calculadora, una solución aproximada hasta las décimas.**

a) $x^3 + x^2 = 20$ **b)** $x^x = 35$

c) $3^x = 1\,000$ **d)** $x^3 = 30$

a) $\left.\begin{array}{l} 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12 \\ 3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36 \end{array}\right\}$ Por tanto, la solución está entre 2 y 3. Probemos con 2,4; 2,5; 2,6; …

$\left.\begin{array}{l} 2{,}4^3 + 2{,}4^2 = 19{,}584 \\ 2{,}5^3 + 2{,}5^2 = 21{,}875 \end{array}\right\}$ Por tanto, la solución es $x = 2{,}4$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3^3 = 27 \\ 4^4 = 256 \end{array}\right\}$ La solución está entre 3 y 4. Probemos con 3,1; 3,2; …

$\left.\begin{array}{l} 3{,}1^{3{,}1} = 33{,}36 \\ 3{,}2^{3{,}2} = 41{,}35 \end{array}\right\}$ La solución más próxima es $x = 3{,}1$.

c) $\left.\begin{array}{l}3^6 = 729\\ 3^7 = 2187\end{array}\right\}$ La solución está entre 6 y 7. Probemos con 6,2; 6,3; …

$\left.\begin{array}{l}3^{6,2} = 908,14\\ 3^{6,3} = 1013,59\end{array}\right\}$ La solución más próxima es $x = 6{,}3$.

d) $\left.\begin{array}{l}3^3 = 27\\ 4^3 = 64\end{array}\right\}$ La solución está entre 3 y 4. Probemos con 3,1; 3,2; …

$\left.\begin{array}{l}3,1^3 = 29,791\\ 3,2^3 = 32,768\end{array}\right\}$ La solución es $x = 3{,}1$.

Ecuaciones de primer grado

4. **Quita paréntesis y resuelve.**

a) $5(x - 1) - 6x + 2 = 3(1 - x) - (1 - 3x)$

b) $7[x - 2(x + 1)] - 4 = 3x - 4(x + 3)$

c) $x + 5 = 3x - 2[1 - 3(2x - 1)]$

d) $2x - 3[8 - 4(x - 1)] = 2[14 - 3(x - 1)]$

a) $5x - 5 - 6x + 2 = 3 - 3x - 1 + 3x \rightarrow -x - 3 = 2 \rightarrow -3 - 2 = x \rightarrow x = -5$

b) $7[x - 2x - 2] - 4 = 3x - 4x - 12 \rightarrow 7x - 14x - 14 - 4 = -x - 12 \rightarrow$

$\rightarrow -7x - 18 = -x - 12 \rightarrow -7x + x = -12 + 18 \rightarrow -6x = 6 \rightarrow x = -\dfrac{6}{6} = -1$

c) $x + 5 = 3x - 2 + 6(2x - 1) \rightarrow x + 5 = 3x - 2 + 12x - 6 \rightarrow$

$\rightarrow x - 3x - 12x = -2 - 6 - 5 \rightarrow -14x = -13 \rightarrow x = \dfrac{-13}{-14} = \dfrac{13}{14}$

d) $2x - 3[8 - 4x + 4] = 2[14 - 3x + 3] \rightarrow 2x - 24 + 12x - 12 = 28 - 6x + 6 \rightarrow$

$\rightarrow 2x + 12x + 6x = 28 + 6 + 24 + 12 \rightarrow 20x = 70 \rightarrow x = \dfrac{70}{20} = \dfrac{7}{2}$

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{1-2x}{9} = 1 - \dfrac{x+4}{6}$

b) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4}$

c) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{5x+1}{3} = \dfrac{1-9x}{6}$

d) $\dfrac{2x-5}{4} - \dfrac{x-1}{5} = 1 - \dfrac{2x+1}{20}$

a) Multiplicamos ambos miembros por 18 y simplificamos:

$2(1 - 2x) = 18 - 3(x + 4) \rightarrow 2 - 4x = 6 - 3x \rightarrow 2 - 6 = 4x - 3x \rightarrow x = -4$

b) Multiplicamos la expresión por 40 y simplificamos:

$8(3x + 2) - 4(4x - 1) + 5(5x - 2) = 10(x + 1) \rightarrow$

$\rightarrow 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0$

c) Multiplicamos ambos miembros por 6 y simplificamos:

$3(x - 3) - 2(5x + 1) = 1 - 9x \rightarrow 3x - 9 - 10x - 2 = 1 - 9x \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

d) Multiplicamos la expresión por 20 y simplificamos:

$5(2x - 5) - 4(x - 1) = 20 - 2x - 1 \rightarrow 10x - 25 - 4x + 4 = 19 - 2x \rightarrow 8x = 40 \rightarrow x = 5$

6. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{3-x}{2}-\frac{2(x-2)}{3}=4-\frac{7(2x-1)}{9}$

b) $\frac{1+12x}{4}+\frac{x-4}{2}=\frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

c) $\frac{3x-2}{6}-\frac{4x+1}{10}=\frac{-2}{15}-\frac{2(x-3)}{4}$

d) $\frac{2x-3}{6}-\frac{3(x-1)}{4}-\frac{2(3-x)}{6}+\frac{5}{8}=0$

a) Multiplicamos la ecuación por 18:

$9(3-x)-12(x-2)=72-14(2x-1) \rightarrow 27-9x-12x+24=72-28x+14 \rightarrow$

$\rightarrow -9x-12x+28x=72+14-27-24 \rightarrow 7x=35 \rightarrow x=\frac{35}{7}=5$

b) Multiplicamos toda la ecuación por 8:

$2(1+12x)+4(x-4)=3(x+1)-(1-x) \rightarrow 24x-16=0 \rightarrow x=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

c) Multiplicamos la ecuación por 60:

$10(3x-2)-6(4x+1)=-2\cdot 4-30(x-3) \rightarrow 30x-20-24x-6=-8-30x+90 \rightarrow$

$\rightarrow 36x=108 \rightarrow x=\frac{108}{36}=3$

d) Multiplicamos toda la ecuación por 24:

$4(2x-3)-18(x-1)-8(3-x)+3\cdot 5=0 \rightarrow 8x-12-18x+18-24+8x+15=0 \rightarrow$

$\rightarrow -2x=3 \rightarrow x=-\frac{3}{2}$

7. **Las siguientes ecuaciones son de primer grado. Compruébalo y resuélvelas:**

a) $(x+1)^2+(x-2)^2=(x+2)^2+(x-1)^2$

b) $4(x-3)(x+3)-(2x+1)^2=3$

c) $\frac{x+3}{5}+\frac{(x-1)^2}{4}=\frac{x^2+1}{4}$

d) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(2x-1)^2}{16}=\frac{35}{16}$

Para comprobar que son ecuaciones de primer grado, simplificamos las ecuaciones al máximo antes de resolverlas:

a) $x^2+2x+1+x^2-4x+4=x^2+4x+4+x^2-2x+1 \rightarrow$

$\rightarrow -2x+5=2x+5$ (es de primer grado) $\rightarrow -4x=0 \rightarrow x=0$

b) $4(x^2-9)-4x^2-4x-1=3 \rightarrow 4x^2-36-4x^2-4x-1=3 \rightarrow$

$\rightarrow -4x=40$ (es de primer grado) $\rightarrow x=\frac{40}{-4}=-10$

c) Multiplicamos la ecuación por 20:

$4(x+3)+5(x-1)^2=5(x^2+1) \rightarrow 4x+12+5(x^2-2x+1)=5x^2+5 \rightarrow$

$\rightarrow 4x+12+5x^2-10x+5=5x^2+5 \rightarrow -6x=-12$ (es de primer grado) $\rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{12}{6}=2$

d) $4(x^2+9-6x)-(4x^2+1-4x)=35 \rightarrow 4x^2+36-24x-4x^2-1+4x=35 \rightarrow$

$\rightarrow 20x=0$ (es de primer grado) $\rightarrow x=0$

Ecuaciones de segundo grado

8. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ **b)** $2x^2 - 7x - 4 = 0$

c) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ **d)** $x^2 + x + 2 = 0$

a) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$

b) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \dfrac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2/4 = -1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 4$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

c) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2/4 = -1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

d) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

No tiene solución.

9. **Resuelve.**

a) $4x^2 - 64 = 0$ **b)** $3x^2 - 9x = 0$

c) $2x^2 + 5x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

a) $4x^2 = 64 \rightarrow x^2 = \dfrac{64}{4} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$

b) $3x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

c) $x(2x+5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow x = -5/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{5}{2}$

d) $2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \dfrac{8}{2} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

10. **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:**

a) $-2x^2 - x + 3 = 0$

b) $25 - 100x^2 = 0$

c) $\frac{5}{2}x^2 + 3x = 0$

d) $-x^2 + 3x + 10 = 0$

a) $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} x = -6/4 = -3/2 \\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 1$

b) Despejamos $x^2 \rightarrow x^2 = \frac{25}{100} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{100}} = \pm\frac{5}{10} \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}$

c) Sacamos x factor común $\rightarrow x\left(\frac{5}{2}x + 3\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \frac{5}{2}x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{6}{5} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{6}{5}$

d) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{-2} = \frac{-3 \pm 7}{-2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5,\ x_2 = -2$

11. **Resuelve.**

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$

b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$

d) $3x(x+4) - x(x-1) = 13x + 8$

a) $x^2 - 9 + x^2 - 16 = 25 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5,\ x_2 = -5$

b) $x^2 + x - 3x - 3 + x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 1 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2$

c) $x^2 - 3x + x^2 - 16 = 2 - 3x \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

d) $3x^2 + 12x - x^2 + x = 13x + 8 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

12. **Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general.**

a) $(3x+1)(3x-1)+\dfrac{(x-2)^2}{2}=1-2x$

b) $\dfrac{x^2+2}{3}-\dfrac{x^2+1}{4}=\dfrac{x+5}{12}$

c) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}=\dfrac{3x-2}{6}+\dfrac{x^2}{3}$

a) $9x^2-1+\dfrac{x^2-4x+4}{2}=1-2x \;\to\; 18x^2-2+x^2-4x+4=2-4x \;\to$

$\to\; 19x^2=0 \;\to\; x=0$

b) Multiplicamos toda la ecuación por 12:

$4(x^2+2)-3(x^2+1)=x+5 \;\to\; 4x^2+8-3x^2-3=x+5 \;\to\; x^2-x=0 \;\to$

$\to\; x(x-1)=0$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=1$

c) Multiplicamos la ecuación por 6:

$2(2x-1)(2x+1)=3x-2+2x^2 \;\to\; 2(4x^2-1)=3x-2+2x^2 \;\to\; 6x^2-3x=0 \;\to$

$$\to\; 3x(2x-1)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \;\to\; x=1/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=\dfrac{1}{2}$

13. **Resuelve.**

a) $(2x-3)^2-19=3x(x-5)$

b) $x(1-2x)=(1-2x)^2$

c) $(x-4)^2+8(x+1)=17$

d) $(x-2)^2+(2x+1)^2=0$

e) $(x-3)^2+17=(2x+5)^2-28x$

a) $(2x-3)^2-19=3x(x-5) \;\to\; 4x^2+9-12x-19=3x^2-15x \;\to$

$\to\; 4x^2+9-12x-19-3x^2+15x=0 \;\to\; x^2+3x-10=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm7}{2}=\begin{cases}\dfrac{-3+7}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2mm] \dfrac{-3-7}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=2,\; x_2=-5$

b) $x(1-2x)=(1-2x)^2 \;\to\; x-2x^2=1+4x^2-4x \;\to\; 4x^2-4x+1+2x^2-x=0 \;\to$

$\to\; 6x^2-5x+1=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot6\cdot1}}{2\cdot6}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12}=\begin{cases}\dfrac{5+1}{12}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{5-1}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=\dfrac{1}{2},\; x_2=\dfrac{1}{3}$

c) $(x-4)^2 + 8(x+1) = 17 \;\rightarrow\; x^2 + 16 - 8x + 8x + 8 - 17 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 7 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -7$

No existe solución.

d) $(x-2)^2 + (2x+1)^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 4 - 4x + 4x^2 + 1 + 4x = 0 \;\rightarrow\; 5x^2 + 5 = 0 \;\rightarrow\; 5x^2 = -5$

No existe solución.

e) $(x-3)^2 + 17 = (2x+5)^2 - 28x \;\rightarrow\; x^2 + 9 - 6x + 17 = 4x^2 + 25 + 20x - 28x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x^2 + 25 - 8x - x^2 - 9 + 6x - 17 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{6} = 1 \\[2mm] \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\; x_2 = -\dfrac{1}{3}$

Página 101

14. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $(2x+1)^2 = 1 + (x-1)(x+1)$

b) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \dfrac{x}{4}$

c) $x + \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} = x^2 - 2$

d) $\dfrac{x(x-1)}{3} - \dfrac{x(x+1)}{4} + \dfrac{3x+4}{12} = 0$

a) $4x^2 + 1 + 4x = 1 + x^2 - 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x = -1/3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = -1$

b) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2} + x = \dfrac{x}{4} \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 + 4x = x \rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -3/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$

c) $6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12 \rightarrow 6x^2 - 13x - 19 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+456}}{12} = \frac{13 \pm 25}{12} = \begin{cases} x = 19/6 \\ x = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{19}{6}$, $x_2 = -1$

d) $4x(x-1) - 3x(x+1) + 3x + 4 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

Solución: $x = 2$

Otros tipos de ecuaciones

15. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(2x-5)(x+7) = 0$

b) $(x-2)(4x+6) = 0$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0$

d) $(3x+1)(x^2+x-2) = 0$

a) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2} \\ x + 7 = 0 \rightarrow x = -7 \end{array}\right\} \text{ Soluciones: } x_1 = -7,\ x_2 = \frac{5}{2}$$

b) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ 4x + 6 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \text{ Soluciones: } x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 2$$

c) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} x+2=0 \;\rightarrow\; x=-2 \\ x^2+4=0 \;\rightarrow\; x^2=-4 \;\text{ No tiene solución.}\end{array}\right\} \text{ Solución: } x=-2$$

d) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+1=0 \;\rightarrow\; x=-\dfrac{1}{3} \\ x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Soluciones:}\\ x_1=-2,\; x_2=\dfrac{-1}{3},\; x_3=1\end{array}$$

16. **Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:**

a) $(x-2)(x+3)(2x-5)=0$ **b)** $x^2(x-6)(3x-1)=0$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9)=0$ **d)** $x(x^2+1)(6x-3)=0$

a) $(x-2)(x+3)(2x-5)=0 \begin{cases} x-2=0 \;\rightarrow\; x=2 \\ x+3=0 \;\rightarrow\; x=-3 \\ 2x-5=0 \;\rightarrow\; x=5/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2,\; x_2=-3,\; x_3=\dfrac{5}{2}$

b) $x^2(x-6)(3x-1)=0 \begin{cases} x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \\ x-6=0 \;\rightarrow\; x=6 \\ 3x-1=0 \;\rightarrow\; x=1/3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=\dfrac{1}{3},\; x_3=6$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9)=0 \begin{cases} 2-x=0 \;\rightarrow\; x=2 \\ x-7=0 \;\rightarrow\; x=7 \\ x^2-9=0 \;\rightarrow\; x^2=9 \;\rightarrow\; x=\pm 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-3,\; x_2=2,\; x_3=3,\; x_4=7$

d) $x(x^2+1)(6x-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \;\rightarrow\; x^2=-1 \;\text{ No tiene solución.} \\ 6x-3=0 \;\rightarrow\; x=3/6=1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=\dfrac{1}{2}$

17. **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{3x}{2}$ **b)** $\dfrac{800}{x}-50=\dfrac{600}{x+4}$ **c)** $\dfrac{1}{x^2}-2=\dfrac{3-x}{3x^2}$ **d)** $\dfrac{x}{2}=1+\dfrac{2x-4}{x+4}$

a) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{3x}{2}$. Multiplicamos la ecuación por $2x$:

$4-1=3x^2 \;\rightarrow\; 3x^2=3 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm 1$

Comprobación: Si $x=-1 \;\rightarrow\; \dfrac{2}{-1}-\dfrac{1}{2(-1)}=\dfrac{3(-1)}{2} \;\rightarrow\; -2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$ Solución válida.

Si $x=1 \;\rightarrow\; 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ Solución válida.

Soluciones: $x_1=-1,\; x_2=1$

b) $\dfrac{800}{x} - 50 = \dfrac{600}{x+4}$. Multiplicamos la ecuación por $x(x+4)$:

$800(x+4) - 50x(x+4) = 600x \to 800x + 3\,200 - 50x^2 - 200x = 600x \to$

$\to -50x^2 + 3\,200 = 0 \to x^2 - 64 = 0 \to x^2 = 64 \to x = \pm 8$

Comprobación: Si $x = -8 \to \dfrac{800}{-8} - 50 = \dfrac{600}{-8+4} \to -150 = \dfrac{600}{-4}$ Solución válida.

Si $x = 8 \to 100 - 50 = \dfrac{600}{12} \to 50 = 50$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 8$

c) $\dfrac{1}{x^2} - 2 = \dfrac{3-x}{3x^2}$. Multiplicamos la ecuación por $3x^2$:

$3 - 6x^2 = 3 - x \to 6x^2 - x = 0 \to x(6x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 6x - 1 = 0 \to x = 1/6 \end{cases}$

Comprobación: Si $x = 0 \to \dfrac{1}{0}$ no existe, luego no es válida.

Si $x = \dfrac{1}{6} \to \dfrac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} - 2 = \dfrac{3 - \frac{1}{6}}{3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2} \to 36 - 2 = \dfrac{\frac{17}{6}}{\frac{3}{36}} \to$

$\to 34 = 17 \cdot 2$ Solución válida.

Solución: $x = \dfrac{1}{6}$

d) $\dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{2x-4}{x+4}$. Multiplicamos la ecuación por $2(x+4)$:

$x(x+4) = 2(x+4) \cdot 2(2x+4) \to x^2 + 4x = 2x + 8 + 4x - 8 \to x^2 - 2x = 0 \to$

$\to x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$

Comprobación: Si $x = 0 \to \dfrac{0}{2} = 1 + \dfrac{0-4}{0+4} \to 0 = 1 - 1$ Solución válida.

Si $x = 2 \to \dfrac{2}{2} = 1 + \dfrac{4-4}{2+4} \to 1 = 1 + 0$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$

18. **Resuelve.**

a) $\dfrac{100}{x} + 5 = \dfrac{90}{x-4}$

b) $\dfrac{250}{x+1} - 5 = 3(4x-1)$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{5}{9}$

d) $\dfrac{2-x}{2} + \dfrac{4}{2+x} = 1$

a) $\dfrac{100}{x} + 5 = \dfrac{90}{x-4}$. Multiplicamos la ecuación por $x(x-4)$:

$100(x-4) + 5x(x-4) = 90x \to 100x - 400 + 5x^2 - 20x = 90x \to$

$\to 5x^2 - 10x - 400 = 0 \to x^2 - 2x - 80 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} = \begin{cases} 10 \\ -8 \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = -8 \rightarrow \dfrac{100}{-8} + 5 = \dfrac{90}{-8-4} \rightarrow -\dfrac{15}{2} = -\dfrac{15}{2}$ Solución válida.

Si $x = 10 \rightarrow 10 + 5 = \dfrac{90}{10-4} \rightarrow 15 = 15$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 10$

b) $\dfrac{250}{x+1} - 5 = 3(4x-1)$. Multiplicamos la ecuación por $x + 1$:

$250 - 5(x+1) = 3(4x-1)(x+1) \rightarrow 250 - 5x - 5 = 3(4x^2 + 4x - x - 1) \rightarrow$

$\rightarrow 250 - 5x - 5 = 12x^2 + 9x - 3 \rightarrow 12x^2 + 14x - 248 = 0 \rightarrow 6x^2 + 7x - 124 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 2\,976}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{3\,025}}{12} = \frac{-7 \pm 55}{12} = \begin{cases} \dfrac{48}{12} = 4 \\ -\dfrac{62}{12} = -\dfrac{31}{6} \end{cases}$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = \dfrac{-31}{6} \rightarrow \dfrac{250}{-\dfrac{31}{6}+1} - 5 = \dfrac{250}{-\dfrac{25}{6}} - 5 = -65 \\ 3\left(4 \cdot \left(-\dfrac{31}{6}\right) - 1\right) = 3 \cdot \left[\left(-\dfrac{62}{3}\right) - 1\right] = 3 \cdot \left(-\dfrac{65}{3}\right) = -65 \end{array}\right\}$ Coincide.

$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 4 \rightarrow \dfrac{250}{5} - 5 = 50 - 5 = 45 \\ 3 \cdot (4 \cdot 4 - 1) = 3 \cdot 15 = 45 \end{array}\right\}$ Coincide.

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{31}{6},\ x_2 = 4$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{5}{9}$. Multiplicamos la ecuación por $9x^2$:

$9x + 18 = 5x^2 \rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81+360}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{441}}{10} = \frac{9 \pm 21}{10} = \begin{cases} \dfrac{30}{10} = 3 \\ -\dfrac{12}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = -\dfrac{6}{5} \rightarrow \dfrac{1}{-\dfrac{6}{5}} + \dfrac{2}{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2} = -\dfrac{5}{6} + \dfrac{50}{36} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$ Solución válida.

Si $x = 3 \rightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{3+2}{9} = \dfrac{5}{9}$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{6}{5},\ x_2 = 3$

d) $\dfrac{2-x}{2}+\dfrac{4}{2+x}=1$. Multiplicamos la ecuación por $2(2+x)$:

$(2-x)(2+x)+4\cdot 2=2(2+x) \to 4-x^2+8=4+2x \to x^2+2x-8=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}2\\-4\end{cases}$$

Comprobación: Si $x=-4 \to \dfrac{6}{2}+\dfrac{4}{-2}=3-2=1$ Solución válida.

Si $x=2 \to \dfrac{0}{2}+\dfrac{4}{4}=0+1=1$ Solución válida.

Soluciones: $x_1=-4,\ x_2=2$

19. **Resuelve.**

a) $x-\sqrt{x}=2$

b) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

c) $x-\sqrt{169-x^2}=17$

d) $x+\sqrt{5x+10}=8$

e) $\sqrt{2x^2+7}=\sqrt{5-4x}$

f) $\sqrt{x+2}+3=x-1$

a) $(x-2)=\sqrt{x} \to$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x^2-4x+4=x \to x^2-5x+4=0 \to x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=1\end{cases}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=4 \to 4-\sqrt{4}=2\\ x_2=1 \to 1-\sqrt{1}=0\neq 2\end{array}\right\}\ \text{Solución: } x=4$$

b) $(x-1)^2=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 \to$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2-2x+1=25-x^2 \to 2x^2-2x-24=0 \to x^2-x-12=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=-3\end{cases}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=4 \to 4-\sqrt{25-16}=4-3=1\\ x_2=-3 \to -3-\sqrt{25-9}=-3-4=-7\neq 1\end{array}\right\}\ \text{Solución: } x=4$$

c) $(x-17)^2=\left(\sqrt{169-x^2}\right)^2 \to$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2+289-34x=169-x^2 \to 2x^2-34x+120=0 \to x^2-17x+60=0$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{2}=\frac{17\pm 7}{2}=\begin{cases}x_1=12\\x_2=5\end{cases}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=12 \to 12-\sqrt{169-144}=12-5=7\neq 17\\ x_2=5 \to 5-\sqrt{169-25}=5-12=-7\neq 17\end{array}\right\}\ \text{No tiene solución.}$$

d) $\left(\sqrt{5x+10}\right)^2 = (8-x)^2 \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$5x + 10 = 64 + x^2 - 16x \rightarrow x^2 - 21x + 54 = 0$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441-216}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} = \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 18 \rightarrow 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 28 \neq 8 \\ x_2 = 3 \rightarrow 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 3 + 5 = 8 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 3$$

e) Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos: $2x^2 + 7 = 5 - 4x$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Comprobación: Si $x = -1 \rightarrow \sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 7} = \sqrt{5 - 4 \cdot (-1)} \rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9}$ Solución válida.

Solución: $x = -1$

f) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x + 2 = (x-4)^2 \rightarrow x + 2 = x^2 + 8x + 16 \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 7 \rightarrow \sqrt{7+2} + 3 = 6 = 7 - 1 \\ x_2 = 2 \rightarrow \sqrt{2+2} + 3 = 5 \neq 2 - 1 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 7$$

20. **Busca una solución en cada caso:**

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{5}{\sqrt{x} + 2}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3\sqrt{x-1}}$

d) $\dfrac{6}{\sqrt{x-2}} - 1 = \dfrac{x-22}{\sqrt{x-2}}$

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{x}} \rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \dfrac{6}{\sqrt{x}} = 1 \rightarrow \dfrac{x-6}{\sqrt{x}} = 1 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow (x-6)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 36 - 12x = x \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{13+5}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \\ \dfrac{13-5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Comprobación:

- Si $x = 9$

  $\dfrac{9}{\sqrt{9}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{9}}$

  $\dfrac{9}{3} - 1 = \dfrac{6}{3}$

  $3 - 1 = 2$ (Sí es solución)

- Si $x = 4$

  $\dfrac{4}{\sqrt{4}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{4}}$

  $\dfrac{4}{2} - 1 = \dfrac{6}{2}$

  $2 - 1 \neq 3$ (No es solución)

Solución: $x = 9$

b) $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{5}{\sqrt{x} + 2} \rightarrow \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right) = 5 \rightarrow x - 4 = 5 \rightarrow x = 9$

Comprobación: $\sqrt{9} - 2 = \dfrac{5}{\sqrt{9} + 2}$ (Sí es válido) $\rightarrow$ Solución: $x = 9$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3\sqrt{x-1}} \rightarrow \dfrac{6 + \sqrt{x-1}}{3\sqrt{x-1}} = \dfrac{8}{3\sqrt{x-1}} \rightarrow 6 + \sqrt{x-1} = 8 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x-1} = 8 - 6 \rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 2^2 \rightarrow x - 1 = 4 \rightarrow x = 5$

Comprobación:

$\dfrac{2}{\sqrt{5-1}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3\sqrt{5-1}} \rightarrow \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3 \cdot 2} \rightarrow \dfrac{6+2}{6} = \dfrac{8}{6}$ (Sí es válido)

Solución: $x = 5$

d) $\dfrac{6}{\sqrt{x} - 2} - 1 = \dfrac{x - 22}{\sqrt{x} - 2} \rightarrow \left(\sqrt{x} - 2\right)\left[\dfrac{6}{\sqrt{x} - 2} - 1\right] = \left(\sqrt{x} - 2\right)\left[\dfrac{x - 22}{\sqrt{x} - 2}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 6 - 1\left(\sqrt{x} - 2\right) = x - 22 \rightarrow 6 - \sqrt{x} + 2 = x - 22 \rightarrow 8 - x + 22 = \sqrt{x} \rightarrow$

$\rightarrow 30 - x = \sqrt{x} \rightarrow (30 - x)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow 900 + x^2 - 60x = x \rightarrow x^2 - 61x + 900 = 0$

$$x = \frac{-(-61) \pm \sqrt{(-61)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 900}}{2 \cdot 1} = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{2} = \frac{61 \pm 11}{2} = \begin{cases} \dfrac{61+11}{2} = \dfrac{72}{2} = 36 \\[2ex] \dfrac{61-11}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

Comprobación:

- Si $x = 36$

  $\dfrac{6}{\sqrt{36} - 2} - 1 = \dfrac{36 - 22}{\sqrt{36} - 2}$

  $\dfrac{6}{6 - 2} - 1 = \dfrac{14}{6 - 2}$

  $\dfrac{6}{4} - 1 = \dfrac{14}{4}$

  $\dfrac{3}{2} - 1 \neq \dfrac{7}{2}$ (No es solución)

- Si $x = 25$

  $\dfrac{6}{\sqrt{25} - 2} - 1 = \dfrac{25 - 22}{\sqrt{25} - 2}$

  $\dfrac{6}{5 - 2} - 1 = \dfrac{3}{5 - 2}$

  $2 - 1 = \dfrac{3}{3}$ (Sí es solución)

Solución: $x = 25$

Aplica lo aprendido

21. **Traduce a lenguaje algebraico y resuelve.**

a) El triple de un número menos 18 unidades es igual que su mitad más 7. ¿Qué número es?

b) El cuadrado de un número es igual que su doble más 15. ¿De qué número se trata?

a) $3x - 18 = \dfrac{x}{2} + 7 \rightarrow 2[3x - 18] = 2\left[\dfrac{x}{2} + 7\right] \rightarrow 6x - 36 = x + 14 \rightarrow$

$\rightarrow 6x - x = 14 + 36 \rightarrow 5x = 50 \rightarrow x = \dfrac{50}{5} = 10$

Solución: el número buscado es 10.

b) $x^2 = 2x + 15 \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \dfrac{2-8}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Solución: hay dos soluciones posibles. Los números buscados son 5 y –3.

22. **Reflexiona y busca todas las soluciones.**

a) ¿Qué número natural multiplicado por su siguiente da 182?

b) ¿Qué número entero multiplicado por su siguiente da 182?

c) La suma de tres números pares consecutivos es 102. ¿Cuáles son esos números?

a) $x(x + 1) = 182 \rightarrow x^2 + x - 182 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-182)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-1 \pm 27}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+27}{2} = 13 \\ \dfrac{-1-27}{2} = -14 \quad \text{No es válido.} \end{cases}$$

El número natural buscado es 13.

b) Hay dos soluciones posibles: 13 y –14. (Ver ecuación resuelta en el apartado anterior).

c) $2x$ = primer número par

$2x + 2$ = siguiente número par a $2x$

$2x + 4$ = siguiente número par a $2x + 2$

$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 102 \rightarrow 6x = 102 - 2 - 4 \rightarrow 6x = 96 \rightarrow x = \frac{96}{6} = 16$$

Los números buscados son 16, 18 y 20.

23. **Observa la tabla:**

ECUACIÓN	SOLUCIONES
$x(x-1) = 42$	7 y (–6)
$2x(2x-2) = 24$	
$3x(3x+3) = 54$	

La primera ecuación resuelve el problema: "¿Qué número multiplicado por su anterior da 42?".

Escribe un enunciado para cada una de las otras dos ecuaciones y resuélvelas.

Posibles enunciados:

2ª ec.: El producto de un número par y el anterior número par es 24. Halla los números.

3ª ec.: El producto de un múltiplo de 3 y el siguiente múltiplo de 3 es 54. Halla los números.

2ª ec.: $2x(2x - 2) = 24 \rightarrow 4x^2 - 4x - 24 = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \quad \text{(esta solución no es válida)} \end{cases}$$

Los números son 4 y 6.

3ª ec.: $3x(3x+3) = 54 \rightarrow 9x^2 + 9x - 54 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \quad \text{(esta solución no es válida)} \end{cases}$$

Los números son 6 y 9.

24. **La suma de dos números consecutivos es menor que 27. ¿Cuáles pueden ser esos números si sabemos que son de dos cifras?**

$x + x + 1 < 27 \rightarrow 2x < 26 \rightarrow x < 13$ y además $x > 9$

Los números pueden ser 10 y 11, 11 y 12 o 12 y 13.

25. **Calcula la edad de Alberto sabiendo que dentro de 22 años tendrá el triple de su edad actual.**

x = "Edad actual de Alberto"

Dentro de 22 años tendrá $x + 22$ años.

$$\underbrace{\text{Edad dentro de 22 años}}_{x+22} = 3 \cdot \underbrace{\text{Edad actual}}_{x} \rightarrow x + 22 = 3x \rightarrow 22 = 2x \rightarrow x = 11$$

Alberto tiene 11 años.

26. **Una tostada cuesta el doble que un café. Por tres cafés y dos tostadas hemos pagado 9,80 €. ¿Cuánto cuesta el café y cuánto la tostada?**

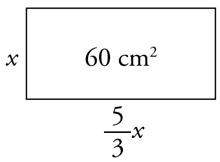
$x \rightarrow$ precio de un café

$2x \rightarrow$ precio de una tostada

$$3x + 2 \cdot 2x = 9{,}80 \rightarrow 3x + 4x = 9{,}80 \rightarrow 7x = 9{,}80 \rightarrow x = \frac{9{,}80}{7} = 1{,}40$$

Un café cuesta 1,40 €, y una tostada, 2,80 €.

27. **El área de una lámina rectangular de bronce es de 60 cm² y su base mide 5/3 de su altura. Halla las dimensiones de la lámina.**



Área del rectángulo: $\frac{5}{3}x \cdot x = \frac{5}{3}x^2$

La ecuación que hay que resolver es: $\frac{5}{3}x^2 = 60 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$ (la solución negativa $x = -6$ no es válida, por ser x una longitud).

$$\frac{5}{3}x = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$$

Las dimensiones de la lámina son: altura 6 cm y base 10 cm.

28. **Una persona compra un reproductor de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,50 €. Con el reproductor de música perdió el 10 % de su valor, y con el ordenador, el 15 %. ¿Cuánto le costó cada uno?**

Llamamos x = precio de compra del equipo de música.

El ordenador costó, pues, $2\,500 - x$.

Con el equipo de música perdió un 10 % $\rightarrow$ el precio de venta fue el 90 % de $x = 0{,}9x$.

Con el ordenador perdió un 15 % $\rightarrow$ el precio de venta fue $0{,}85(2\,500 - x)$.

La ecuación que hay que resolver es:

$0{,}9x + 0{,}85(2\,500 - x) = 2\,157{,}50$ € $\rightarrow$ $0{,}9x + 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}50 \rightarrow$

$\rightarrow 0{,}05x = 32{,}50 \rightarrow x = 650$

El equipo de música costó 650 €, y el ordenador, $2\,500 - 650 = 1\,850$ €.

Página 102

29. **En una papelería, el precio de una copia en color es 0,75 € y el de una en blanco y negro es 0,20 €. En una semana, el número de copias en color fue la décima parte que en blanco y negro y se recaudaron 110 €. Calcula cuántas copias se hicieron de cada tipo.**

$$\left.\begin{array}{l} 0,75x + 0,20y = 110 \\ x = \dfrac{1}{10}y \end{array}\right\} \; 0,75 \cdot \frac{1}{10}y + 0,20y = 110 \;\to\; y = 400;\; x = 40$$

Se hicieron 400 copias en blanco y negro y 40 en color.

30. **Se mezclan 8 *l* de aceite de 4 €/*l* con otro más barato para obtener 20 *l* a 2,50 €/*l*. ¿Cuál es el precio del aceite barato?**

Se mezclaron 20 – 8 = 12 litros de aceite barato.

$$\frac{8 \cdot 4 + 12 \cdot x}{20} = 2,5 \;\to\; 12x = 18 \;\to\; x = 1,5$$

El precio del aceite barato era de 1,50 €/*l*.

Resuelve problemas

31. **Hoy, la edad de Alberto cuadruplica la de su hija Marta, pero dentro de cinco años solo la triplicará. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

	HOY	DENTRO DE 5 AÑOS
MARTA	x	$x + 5$
ALBERTO	$4x$	$4x + 5$

$x \to$ edad de Marta hoy

$4x \to$ edad de Alberto hoy

$4x + 5 = 3 \cdot (x + 5) \;\to\; 4x + 5 = 3x + 15 \;\to\; x = 10$

Marta tiene 10 años, y Alberto, 40 años.

32. **Tengo 3 600 euros en el banco, repartidos en dos cuentas. Si hiciera una transferencia de la que más tiene a la que menos tiene, la primera aún seguiría teniendo el doble. ¿Cuánto hay en cada cuenta?**

x = Dinero que tengo en la cuenta A.

$3\,600 - x$ = Dinero que tengo en la cuenta B.

y = Dinero que transfiero.

$$x - y = 2 \cdot (3\,600 - x + y) \;\to\; x - y = 7\,200 - 2x + 2y \;\to\; 3x - 3y = 7\,200 \;\to$$
$$\to\; x - y = 2\,400$$

$x = 2\,400 + y \;\to$ En la cuenta A tengo más de 2 400 €.

$3\,600 - y - 2\,400 = 1\,200 - y \;\to$ En la cuenta B tengo menos de 1 200 €.

Por ejemplo:

Pueden haberse transferido 1 000 €, en cuyo caso, en A había 3 400 €, y en B, 200 €.

Pueden haberse transferido 400 € y, en este caso, en A había 2 800 €, y en B, 800 €.

33. **Problema resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

34. **Un granjero quiere vender una partida de botellas de leche a 0,50 € la botella. Se le rompen 60 botellas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,05 € el precio de cada botella. ¿Cuántas botellas tenía? ¿Cuánto dinero pretende ganar?**

Llamamos x = n.º de botellas de leche con las que salió de la granja.

x botellas a 0,50 € cada una $\rightarrow$ $0{,}50x$ es el dinero obtenido.

Se rompen 60 botellas. Le quedan para vender $x - 60$ a $0{,}50 + 0{,}05 = 0{,}55$ € cada una $\rightarrow$
$\rightarrow$ $0{,}55(x - 60)$ es el dinero obtenido.

El dinero conseguido vendiendo x o $x - 60$ botellas es el mismo.

$$0{,}50x = 0{,}55(x - 60) \rightarrow 0{,}50x = 0{,}55x - 33 \rightarrow 33 = 0{,}55x - 0{,}50x \rightarrow$$
$$\rightarrow 33 = 0{,}05x \rightarrow x = 660$$

Salió de la granja con 660 botellas y pretende ganar $0{,}50 \cdot 660 = 330$ €.

35. **Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?**

Si hubiese x estudiantes, cada uno pagaría $\frac{700}{x}$.

Si hubiese $x + 2$ estudiantes, cada uno pagaría 40 € menos $\rightarrow$ $\frac{700}{x} - 40$

$$(x + 2)\left(\frac{700}{x} - 40\right) = 700 \rightarrow 700 - 40x + \frac{1\,400}{x} - 80 = 700 \rightarrow$$
$$\rightarrow -40x^2 - 80x + 1\,400 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \quad \text{No válida.} \end{cases}$$

Han alquilado el piso 5 estudiantes.

36. **Un tipo de aceite de 3,20 €/*l* se obtiene mezclando un 60 % de aceite virgen de 4 €/*l* y el resto con otro más barato. ¿Cuál es el precio de ese otro?**

Precio aceite barato $\rightarrow$ x

$$0{,}6 \cdot 4 + 0{,}4 \cdot x = 3{,}2 \rightarrow 2{,}4 + 0{,}4x = 3{,}2 \rightarrow x = 2$$

El precio del aceite barato es de 2 €/*l*.

37. **El gerente de cierto negocio familiar, al cerrar el balance del mes, hace cuentas y concluye: si durante el próximo trimestre consiguiera, cada mes, un aumento progresivo del 10 % respecto al mes anterior, obtendría unos beneficios de 7 289 €. ¿Cuánto ha ganado este mes?**

x = beneficio de este mes.

110 % de [110 % de (110 % de x)] = 7 289

$$1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot x = 7\,289 \rightarrow 1{,}331x = 7\,289 \rightarrow x = \frac{7\,289}{1{,}331} \approx 5\,476{,}34$$

Este mes ha ganado 5 476,34 €.

38. **Problema resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

39. **Un profesor de lengua calcula la nota final de sus estudiantes mediante un examen escrito, que es el 75 % de la nota final, y otro de expresión oral, que es el 25 %. Ana obtiene en el segundo un 6.**

¿Qué tiene que sacar en el escrito para obtener como nota final al menos un notable (a partir de 7)?

Llamamos x = nota obtenida en el examen escrito.

$$\text{Nota final} = 75\,\%\ \underbrace{\text{ESCRITO}}_{x} + 25\,\%\ \underbrace{\text{LECTURA}}_{6} \rightarrow 0{,}75x + 0{,}25 \cdot 6 \geq 7$$

$$0{,}75x + 1{,}5 \geq 7 \rightarrow 0{,}75x \geq 5{,}5 \rightarrow x \geq 7{,}33$$

En el examen escrito tiene que sacar al menos un 7,33.

40. **Algunos de los miembros de un equipo de atletismo deciden regalar a su entrenador un cronómetro que cuesta 150 €. Al conocer la idea, se apuntan cinco atletas más, con lo que a cada uno le toca pagar 5 € menos. ¿Cuántos participan finalmente en la compra del regalo?**

x = número de atletas originales

$x + 5$ = número de atletas finales

y = dinero que iba a poner cada uno

$y - 5$ = dinero que pone cada uno al final

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 150 \\ (x+5)(y-5) = 150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{150}{y} \\ \left(\dfrac{150}{y} + 5\right)(y-5) = 150 \end{array}\right\}$$

$$(150 + 5y)(y - 5) = 150y \rightarrow 150y + 5y^2 - 750 - 25y = 150y \rightarrow 5y^2 - 25y - 750 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 - 5y - 150 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 600}}{2} = \frac{5 \pm 25}{2}$$

De las dos soluciones que se obtienen para y, solo es válida la positiva, $y = 15$. Para este valor, se obtiene $x = 10$.

En el regalo participan 10 + 5 = 15 atletas y cada uno pone 15 – 5 = 10 €.

Página 103

41. **Un vendedor del mercadillo lleva un cierto número de relojes, por los que piensa sacar 200 €, pero comprueba que dos de ellos están deteriorados. Aumentando el precio de los restantes en 5 €, consigue recaudar la misma cantidad. ¿Cuántos relojes lleva?**

x = número de relojes que lleva el vendedor

$\frac{200}{x}$ = dinero por el que vende, inicialmente, cada reloj

$$(x-2)\left(\frac{200}{x}+5\right) = 200 \to (x-2)(200+5x) = 200x \to 200x + 5x^2 - 400 - 10x = 200x \to$$

$$\to 5x^2 - 10x - 400 = 0 \to x^2 - 2x - 80 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2}$$

De las dos soluciones que se obtienen, 10 y –8, solo es válida la positiva.

El vendedor llevaba 10 relojes.

42. **En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto mide 5 cm menos que esta. Halla su perímetro.**

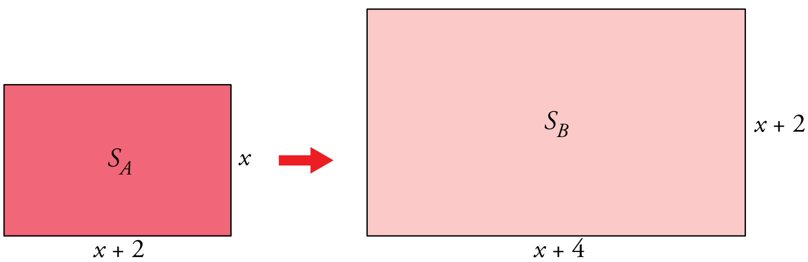
$$x^2 = \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + (x-5)^2 \to x^2 = \frac{9}{25}x^2 + x^2 + 25 - 10x \to 9x^2 - 250x + 625 = 0$$

$$x = \frac{250 \pm \sqrt{62\,500 - 22\,500}}{18} = \frac{250 \pm 200}{18} = \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = \frac{50}{18} = \frac{25}{9} < 5 \end{cases}$$

Para que la longitud de los lados sea positiva, se ha de tener $x > 5$, luego la solución es $x = 25$.

$$\text{Perímetro} = \frac{3}{5} \cdot 25 + 25 - 5 + 25 = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$

43. **La base de un rectángulo es 2 cm mayor que la altura, y si se hace 2 cm más largo y otros 2 cm más ancho, se dobla su superficie. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo?**



$S_B = 2 \cdot S_A$

$$(x+4)(x+2) = 2x(x+2) \to x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 4x \to x^2 - 2x - 8 = 0$$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$. De las dos soluciones, 4 y –2, solo es válida la positiva.

El rectángulo inicial tiene 4 m de altura y 6 m de base.

Problemas "+"

44. **Un pilón de riego se abastece mediante dos bombas que extraen el agua de sendos pozos. La primera, actuando sola, tarda cinco horas en llenar el pilón, y conectadas ambas a la vez, el pilón se llena en tan solo dos horas. ¿Cuánto tarda la segunda bomba actuando en solitario?**

Llamamos x a las horas que tarda la 2.ª bomba.

— La 1.ª bomba, en una hora, llena 1/5 del pilón.

— La 2.ª bomba, en una hora, llena 1/x del pilón.

— Las dos juntas, en una hora, llenan 1/2 del pilón.

x = número de horas que tarda la segunda bomba en llenar el pilón.

En una hora, la primera bomba llena 1/5 del pilón, y la segunda, $1/x$.

Actuando juntas, en una hora llenan 1/2 del pilón. Por tanto:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \to 2x + 10 = 5x \to 3x = 10 \to x = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

La segunda bomba tarda en llenar el pilón $\left(3 + \frac{1}{3}\right)$ h = 3 h 20 min.

45. **Una persona tarda 4 horas más que otra en hacer un trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan una hora y media en acabarlo. ¿Cuánto tarda cada una por separado?**

En una hora, la primera persona hace $\frac{1}{x+4}$ del trabajo, y la otra, $\frac{1}{x}$ del trabajo (suponiendo que la segunda hace el trabajo en x horas). Juntas, en una hora, hacen $\frac{1}{1,5}$ del trabajo. Por tanto:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{1,5} \to \frac{x+4+x}{x(x+4)} = \frac{1}{1,5} \to 3x + 6 = x^2 + 4x \to x^2 + x - 6 = 0 \to$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

La única solución válida es $x_1 = 2$

La primera persona tarda 6 horas en hacer el trabajo, y la segunda, 2 horas.

46. **Un camión ha salido de A hacia B a la vez que una furgoneta sale de B hacia A. Han tardado en cruzarse una hora y 12 minutos (6/5 de hora) y ambos vehículos han marchado a una velocidad constante. ¿Cuánto tiempo ha invertido cada vehículo en su recorrido sabiendo que el camión ha tardado una hora más que la furgoneta?**

x = Tiempo que tarda la furgoneta en ir de B hasta A (horas).

En una hora, la furgoneta recorre $\frac{1}{x}$ de esa distancia.

$(x + 1)$ = Tiempo que tarda el camión de ir de A hasta B (horas).

En una hora, el camión recorre $\frac{1}{x+1}$ de esa distancia.

La fracción de la distancia AB que recorren entre los dos en una hora es $\frac{1}{6/5} = \frac{5}{6}$.

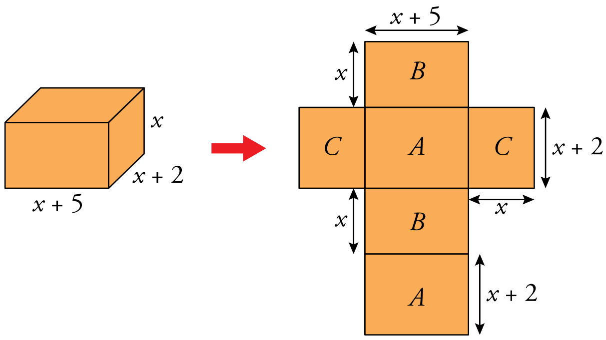
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{5}{6} \rightarrow 6(2x+1) = 5x^2 + 5x \rightarrow 5x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+120}}{10} = \frac{7 \pm 13}{10}$$

De las dos soluciones que se obtienen, 2 y $-6/10$, solo es válida la solución positiva.

La furgoneta ha tardado 2 horas en recorrer la distancia que hay de A a B, y el camión, 3 horas.

47. **Una caja de embalaje es 2 cm más ancha que alta y 3 cm más larga que ancha. En su construcción se han empleado 900 cm^2 de plancha de cartón, de los que el 20 % se usa para las solapas. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?**



$$2(x+5)(x+2) + 2(x+2)x + 2x(x+5) = 80\,\% \text{ de } 900 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x^2 + 2x + 5x + 10) + 2x^2 + 4x + 2x^2 + 10x = 0{,}8 \cdot 900 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 4x + 10x + 20 + 4x^2 + 14x = 720 \rightarrow 6x^2 + 28x - 700 = 0 \rightarrow 3x^2 + 14x - 350 = 0$$

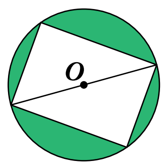
$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-350)}}{2 \cdot 3} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 4\,200}}{6} =$$

$$= \frac{-14 \pm 66{,}3}{6} = \begin{cases} \dfrac{-14 + 66{,}3}{6} = \dfrac{52{,}3}{6} \approx 8{,}71 \text{ cm} \\[2ex] \dfrac{-14 - 66{,}3}{6} \rightarrow \text{No vale por ser negativa.} \end{cases}$$

Las dimensiones de la caja son: 8,71 cm de alto; 10,71 cm de ancho y 13,71 cm de largo.

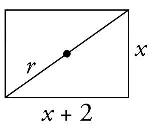
48. **En un terreno circular se quiere construir un polideportivo rectangular de 2 600 m^2 de área y en el que uno de los lados mida 2 m más que el otro.**

¿Cuál es la superficie de la zona que quedará sin edificar?



La zona rectangular tiene dimensiones x y $x + 2$.

El radio del círculo es la mitad de la longitud de la diagonal del rectángulo:

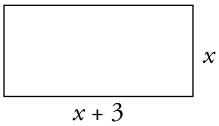


$$r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (x+2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{SIN EDIFICAR}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2) - 2\,600 \\ A_{\text{RECTÁNGULO}} = x(x+2) = x^2 + 2x = 2\,600 \end{array}\right\} A_{\text{SIN EDIFICAR}} = \pi \cdot \frac{1}{2}(2\,600 + 2) - 2\,600 =$$

$$= 1\,301\pi - 2\,600 \approx 1\,487 \text{ m}^2$$

49. **En un rectángulo en el que la base mide 3 cm más que la altura, el perímetro es mayor que 50 pero no llega a 54. ¿Qué puedes decir de la medida de la base?**



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2x + 6 > 50 \\ 2x + 2x + 6 < 54 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4x > 44 \;\rightarrow\; x > 11 \;\rightarrow\; x + 3 > 14 \\ 4x < 48 \;\rightarrow\; x < 12 \;\rightarrow\; x + 3 < 15 \end{array}$$

La base mide entre 14 y 15 cm, sin incluir ninguna de estas dos medidas. Por tanto, no puede medir un número natural.

Curiosidades matemáticas

Sabías que…

Ecuación viene del término latino *aequatio*, que, a su vez, se deriva de *aequare* (igualar) o *aequus* (igual).

Aquí tienes otras palabras del castellano con la misma raíz:

ECUADOR: Circunferencia máxima a *igual* distancia de los polos.

EQUILÁTERO: Con los lados *iguales*.

EQUIDISTANTE: Que está a *igual* distancia.

ECUANIMIDAD: *Igualdad* o constancia de ánimo.

EQUIVALENTES: Que tienen *igual* valor.

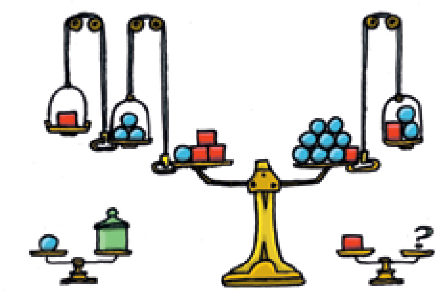
- **Busca otras cuatro palabras que tengan la misma raíz que *ecuación*.**

Ejemplos de palabras con la misma raíz:

Adecuado, equilibrio, igual, equinocio, equiparar, equivocación, equidiferente, ecualizador.

En equilibrio

Observa la balanza. Si cada bola pesa un gramo, ¿cuánto pesa cada caja?



Llamamos x al peso de una caja.

Nos queda la siguiente ecuación:

$$3x + 1 - (3 - x) = 8 + x - (2 + x) \;\rightarrow\; 3x + 1 - 3 + x = 8 + x - 2 - x \;\rightarrow\; 4x - 2 = 6 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 4x = 8 \;\rightarrow\; x = 2$$

Cada caja pesa 2 gramos.

Ingéniatelas como puedas

Encuentra una solución a esta ecuación:

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8$$

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8 \to \sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8-7 \to \sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=1$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}=1 \to \sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}=0$$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$$5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}=0 \to \sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}=5$$

Elevamos al cuadrado nuevamente:

$$30-\sqrt{13+\sqrt{x}}=25 \to \sqrt{13+\sqrt{x}}=5$$

Elevamos al cuadrado:

$$13+\sqrt{x}=25 \to \sqrt{x}=12 \to x=144$$

Comprobamos:

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{144}}}}}=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+12}}}}=$$

$$=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{25}}}}=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-5}}}=$$

$$=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{25}}}=7+\sqrt{1+\sqrt{5-5}}=7+\sqrt{1+0}=7+1=8$$