1 Ecuaciones lineales con dos incógnitas

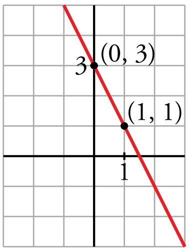
Página 105

1. Obtén dos soluciones de cada ecuación y representa las rectas correspondientes.

a) $2x + y = 3$ **b)** $x + y = 4$

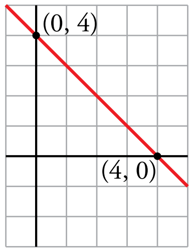
a) $2x + y = 3$

Dos soluciones son (0, 3) y (1, 1).



b) $x + y = 4$

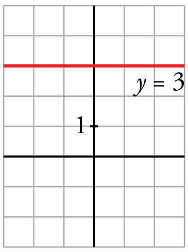
(0, 4) y (4, 0) son soluciones de la ecuación.



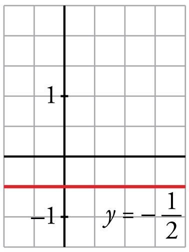
2. Representa gráficamente.

a) $y = 3$ **b)** $y = -\frac{1}{2}$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = \frac{3}{2}$

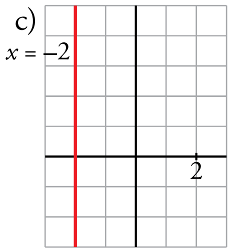
a)



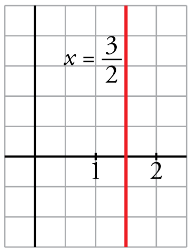
b)



c)



d)



2 Sistemas de ecuaciones lineales

Página 106

1. Representa las rectas en cada caso y di si el sistema tiene una solución, si es indeterminado (tiene infinitas) o si es incompatible (no tiene solución). En el caso de que tenga solución, di cuál es:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

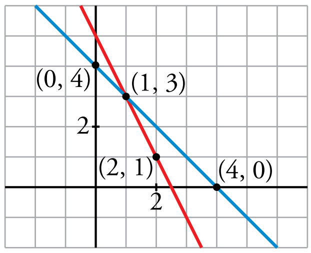
a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$

$2x + y = 5$

x	y
2	1
1	3

$x + y = 4$

x	y
0	4
4	0

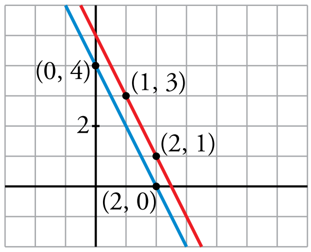


El sistema tiene una solución, $x = 1$, $y = 3$, punto de corte de ambas rectas.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

$4x + 2y = 8$

x	y
0	4
2	0

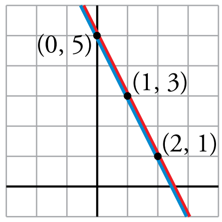


Las dos rectas son paralelas. El sistema no tiene solución.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{array}\right\}$ Antes de representarlas observamos que la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2.

$4x + 2y = 10$

x	y
0	5
2	1



Se trata de la misma recta. El sistema tiene infinitas soluciones.

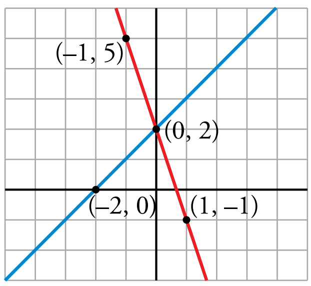
d) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\}$

$-x + y = 2$

x	y
0	2
–2	0

$3x + y = 2$

x	y
1	–1
–1	5



Las dos rectas se cortan en el punto (0, 2).

El sistema tiene una solución: $x = 0$, $y = 2$.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones

Página 108

1. Resuelve por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 4x + \ \ y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 4y = \ \ 1 \\ \ \ x + 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = \ \ 9 \\ 3x - \ \ y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 4x + \ \ y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{matrix}\right\}$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 9 - 4x$

$\left.\begin{matrix} 3x + 2(9 - 4x) = 8 \ \to \ 3x + 18 - 8x = 8 \ \to \ x = 2 \\ y = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \end{matrix}\right\}$ Solución: $x = 2, \ y = 1$

b) $\left.\begin{matrix} -x + 4y = \ \ 1 \\ x + 2y = -1 \end{matrix}\right\}$ Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $x = 4y - 1$

$\left.\begin{matrix} 4y - 1 + 2y = -1 \ \to \ 6y = 0 \ \to \ y = 0 \\ x = 4 \cdot 0 - 1 = -1 \end{matrix}\right\}$ Solución: $x = -1, \ y = 0$

c) $\left.\begin{matrix} 2x - 3y = \ \ 9 \\ 3x - \ \ y = 10 \end{matrix}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = 3x - 10$

$\left.\begin{matrix} 2x - 3(3x - 10) = 9 \ \to \ 2x - 9x + 30 = 9 \ \to \ x = 3 \\ y = 3 \cdot 3 - 10 = 9 - 10 = -1 \end{matrix}\right\}$ Solución: $x = 3, \ y = -1$

d) $\left.\begin{matrix} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{matrix}\right\}$ Despejamos y de la 1.ª ecuación, $y = 5 - 2 = 3$.
Sustituimos en la 2.ª ecuación: $3x + 4 \cdot 3 = 0 \ \to \ 3x = -12 \ \to \ x = -4$

Solución: $x = -4, \ y = 3$

2. Resuelve aplicando el método de igualación.

a) $\begin{cases} x + 5y = \ \ 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x + 1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = \ \ 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x + 5y = \ \ 4 \\ x - 3y = -4 \end{matrix}\right\}$ Despejamos x de ambas ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{matrix} x = \ \ 4 - 5y \\ x = -4 + 3y \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 4 - 5y = -4 + 3y \ \to \ 8 = 8y \ \to \ y = 1 \\ \text{Luego } x = 4 - 5 \cdot 1 = 4 - 5 = -1 \end{matrix}\right\}$ Solución: $x = -1, \ y = 1$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ Despejamos y de la segunda ecuación y la igualamos con la primera:

$y = 4 - 2x$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x+1}{2} = 4 - 2x \;\to\; 3x + 1 = 8 - 4x \;\to\; 7x = 7 \;\to\; x = 1 \\ y = 4 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 1,\ y = 2$$

c) $\left.\begin{array}{l} 5x + y = 3 \\ 2x - y = -3 \end{array}\right\}$ Despejamos y de ambas ecuaciones e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3 - 5x \\ y = 2x + 3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3 - 5x = 2x + 3 \;\to\; -7x = 0 \;\to\; x = 0 \\ y = 3 - 5 \cdot 0 = 3 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 0,\ y = 3$$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3-3y}{4} \\ x = \dfrac{3-6y}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{3-3y}{4} = \dfrac{3-6y}{2} \;\to\; 3 - 3y = 6 - 12y \;\to\; 9y = 3 \;\to\; y = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{3 - 3 \cdot (1/3)}{4} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{3}$

3. Resuelve por reducción.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos el valor de x:

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \;\to\; x = 3 \\ 3 + y = 4 \;\to\; y = 1 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 3,\ y = 1$$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos el valor de x:

$$\left.\begin{array}{l} 9x = 18 \;\to\; x = 2 \\ 4 \cdot 2 + 3y = 5 \;\to\; 8 + 3y = 5 \;\to\; 3y = -3 \;\to\; y = -1 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 2,\ y = -1$$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{l} 4x - 6y = 22 \\ 5x + 6y = 14 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9x \quad\quad = 36 \;\rightarrow\; x = 4 \\ 2 \cdot 4 - 3y = 11 \;\rightarrow\; 8 - 3y = 11 \;\rightarrow\; -3 = 3y \;\rightarrow\; y = -1 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 4,\; y = -1$$

d) $\left.\begin{array}{l} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la primera ecuación por 5, la segunda por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{l} 35x + 10y = 125 \\ \;\;6x - 10y = -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 41x \quad\quad = 123 \;\rightarrow\; x = \dfrac{123}{41} = 3 \\ 7 \cdot 3 + 2y = 25 \;\rightarrow\; 2y = 4 \;\rightarrow\; y = 2 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 3,\; y = 2$$

4. Representa gráficamente cada par de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - 3y = 13} \\ \mathbf{3x - 5y = 21} \end{array}\right.$

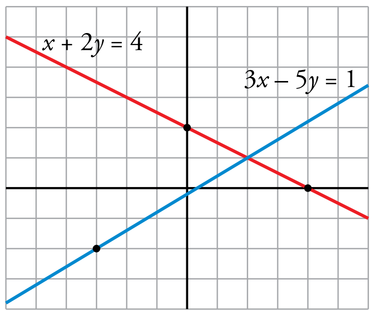
Resuelve los sistemas por alguno de los métodos algebraicos que conoces y comprueba que la solución coincide con el punto de corte del par de rectas.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$ Aplicamos el método de sustitución: $\rightarrow\; x = 4 - 2y$

$3(4 - 2y) - 5y = 1 \;\rightarrow\; 12 - 6y - 5y = 1 \;\rightarrow\; -11y = -11 \;\rightarrow\; y = 1$

Si $y = 1 \;\rightarrow\; x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

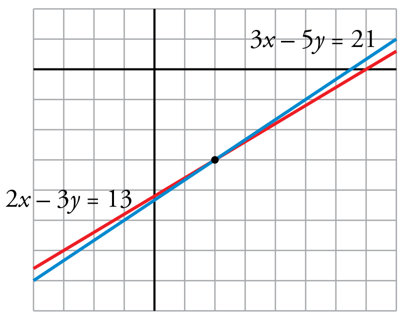
Solución: $x = 2,\; y = 1$



b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 5y = 21 \end{array}\right\}$ Aplicamos reducción: $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 5y = 21 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot (-2)} \end{array} \begin{array}{r} 6x - 9y = 39 \\ -6x + 10y = -42 \\ \hline y = -3 \end{array}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 5y = 21 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xrightarrow{\cdot (-3)} \end{array} \begin{array}{r} 10x - 15y = 65 \\ -9x + 15y = -63 \\ \hline x \quad\quad = 2 \end{array}$$

Solución: $x = 2,\; y = -3$



4 Sistemas de ecuaciones lineales más complejos

Página 109

1. Resuelve simplificando previamente.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3 \\ \dfrac{x+y}{8} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5(y-1) = \dfrac{x-1}{2} \\ \dfrac{4(x+1)}{5} = 6y + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x - y + 3) - 3x = 0 \\ \dfrac{2(x+1)}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{2} = 2(x+y) + 3 \\ \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3 \\ \dfrac{x+y}{8} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ 3x - 2y = 18 \\ \to\ x + y = 16 \end{array}\Bigg\}$ Método de sustitución: $\to\ x = 16 - y$

$3(16 - y) - 2y = 18 \ \to\ 48 - 3y - 2y = 18 \ \to\ -5y = -30 \ \to\ y = 6$

Si $y = 6 \ \to\ x = 16 - 6 = 10$

Solución: $x = 10,\ y = 6$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 5(y-1) = \dfrac{x-1}{2} \\ \dfrac{4(x+1)}{5} = 6y + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ 2x + 10(y-1) = x - 1 \\ \to\ 4(x+1) = 5(6y+1) \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} \to \\ \to \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 2x + 10y - 10 = x - 1 \\ 4x + 4 = 30y + 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ x + 10y = 9 \\ \to\ 4x - 30y = 1 \end{array}\Bigg\}$

Método de reducción:

$\left.\begin{array}{r} x + 10y = 9 \\ 4x - 30y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot\, 3} \left.\begin{array}{r} 3x + 30y = 27 \\ 4x - 30y = 1 \end{array}\right\}$

$7x \qquad = 28 \ \to\ x = 4$

$\left.\begin{array}{r} x + 10y = 9 \\ 4x - 30y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot\, (-4)} \left.\begin{array}{r} -4x - 40y = -36 \\ 4x - 30y = 1 \end{array}\right\}$

$-70y = -35 \ \to\ y = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = 4,\ y = \dfrac{1}{2}$

c) Simplificamos cada una de las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-2y+6-3x=0 \\ 4(x+1)-3y=6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-2y=-6 \\ 4x+4-3y=6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=6 \\ 4x-3y=2 \end{array}\right\}$$

Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$x=6-2y$

$$\left.\begin{array}{l} 4(6-2y)-3y=2 \rightarrow 24-8y-3y=2 \rightarrow -11y=-22 \rightarrow y=2 \\ x=6-2\cdot 2=6-4=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Solución:} \\ x=2,\ \ y=2 \end{array}$$

d) Simplificamos previamente cada una de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-9y=12(x+y)+18 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-9y=12x+12y+18 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -8x-21y=18 \\ x-\ \ \ y=\ \ 5 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 8 y sumamos:

$$\begin{array}{r} -8x-21y=18 \\ 8x-\ \ 8y=40 \\ \hline -29y=58 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -29y=58 \rightarrow y=\dfrac{-58}{29} \rightarrow y=-2 \\ x-(-2)=5 \rightarrow x+2=5 \rightarrow x=3 \end{array}\right\} \text{Solución: } x=3,\ \ y=-2$$

5 Sistemas no lineales

Página 110

1. Resuelve simplificando previamente.

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$　　c) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$　　e) $\begin{cases} x + 7 = y^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{xy} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 15 \;\to\; x = 15 + y \\ x \cdot y = 100 \;\to\; (15 + y)y = 100 \;\to\; 15y + y^2 = 100 \;\to\; y^2 + 15y - 100 = 0 \end{cases}$

$$y = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} = \frac{-15 \pm 25}{2} = \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -20 \end{cases}$$

$y_1 = 5 \to x_1 = 20 \to$ Solución: $x_1 = 20,\ y_1 = 5$

$y_2 = -20 \to x_2 = -5 \to$ Solución: $x_2 = -5,\ y_2 = -20$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 2x - 2$

$x^2 + x(2x - 2) = 0 \to x^2 + 2x^2 - 2x = 0 \to 3x^2 - 2x = 0 \to$

$$\to x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \to x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \to y = -2 \\ \text{Si } x = \dfrac{2}{3} \to y = 2 \cdot \dfrac{2}{3} - 2 = \dfrac{4}{3} - 2 = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = -2 \\ x_2 = \dfrac{2}{3},\ y_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

Igualamos ambas ecuaciones y resolvemos la ecuación radical que nos queda:

$\sqrt{x+1} = 5 - x \to \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (5 - x)^2 \to x + 1 = 25 - 10x + x^2 \to x^2 - 11x + 24 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$$

Si $x = 8 \to y = 5 - 8 = -3$. Si $x = 3 \to y = 5 - 3 = 2$

Comprobación:

$x = 8,\ y = -3$ no verifica la primera ecuación: $\sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3; -3$. No es solución.

$x = 3,\ y = 2$ cumple ambas ecuaciones: $\sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;\ 5 - 3 = 2$.

Solución: $x = 3,\ y = 2$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\} \to x^2 = 3 + y^2$

$3 + y^2 + y^2 = 5 \to 2y^2 = 2 \to y^2 = 1 \to y = \pm 1$

Si $y = 1 \to x^2 = 3 + 1^2 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$

Si $y = -1 \to x^2 = 3 + (-1)^2 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -2,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = -1;\ x_4 = -2,\ y_4 = -1$

e) $\left.\begin{array}{l} x + 7 = y^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{xy} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = y^2 - 7 \\ y + x = 5 \end{array}\right\} \to y + y^2 - 7 = 5$

$y^2 + y - 12 = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+7}{2} = 3 \\[2mm] \dfrac{-1-7}{2} = -4 \end{cases}$$

Si $y = 3 \to x = 3^2 - 7 = 2 \to x = 2$

Si $y = -4 \to x = (-4)^2 - 7 = 9 \to x = 9$

Comprobamos:

Si $x_1 = 2,\ y_1 = 3$

$\left.\begin{array}{l} 2 + 7 = 3^2 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{2 \cdot 3} \end{array}\right\}$ Sí

Si $x_2 = 9,\ y_2 = -4$

$\left.\begin{array}{l} 9 + 7 = (-4)^2 \\ \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{-4} = \dfrac{5}{9 \cdot (-4)} \end{array}\right\}$ Sí

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 9,\ y_2 = -4$

6 Resolución de problemas mediante sistemas

Página 111

1. La suma de dos números es 323, y su diferencia, 47. ¿Cuáles son esos números?

$x \to$ número mayor

$y \to$ número menor

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 323 \\ x - y = 47 \end{array}\right\} \text{ Sumando: } \begin{array}{r} x + y = 323 \\ x - y = 47 \\ \hline 2x = 370 \end{array} \to x = \frac{370}{2} = 185$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 323 \\ x - y = 47 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{array}{r} -x - y = -323 \\ x - y = 47 \\ \hline -2y = -276 \end{array} \to y = \frac{-276}{-2} = 138$$

Los números buscados son 185 y 138.

2. Tres kilos de peras y dos de naranjas cuestan 6,70 €; un kilo de peras y cinco de naranjas cuestan 7 €. ¿A cómo está el kilo de peras? ¿Y el de naranjas?

$$\left.\begin{array}{l} x \to \text{precio de un kilo de peras} \\ y \to \text{precio de un kilo de naranjas} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 6,70 \\ x + 5y = 7 \end{array}\right\}$$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 - 5y \\ 3(7 - 5y) + 2y = 6,70 \end{array}\right\} \to 21 - 15y + 2y = 6,70 \to -13y = -14,30 \to y = 1,1$$

$x = 7 - 5 \cdot 1,1 = 7 - 5,5 = 1,5$

Solución: Un kilo de peras cuesta 1,50 €, y uno de naranjas, 1,10 €.

3. En un test de 50 preguntas se suman dos puntos por cada acierto y se resta medio punto por cada fallo. ¿Cuántos aciertos y cuántos fallos dan un resultado de 65 puntos?

x = número de aciertos

y = número de fallos

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 2x - 0,5y = 65 \end{array}\right\} \to x = 50 - y$$

Sustituyendo:

$$2(50 - y) - 0,5y = 65 \to 100 - 2y - 0,5y = 65 \to -2,5y = -35 \to y = \frac{-35}{-2,5} = 14$$

Si $y = 14 \to x = 50 - 14 = 36$

Tiene 36 aciertos y 14 fallos.

4. En un cine, tres entradas y dos bolsas de palomitas nos han costado 23 €. Si hubiera venido también Andrea, habrían sido una entrada y una bolsa de palomitas más, y habríamos pagado 31,50 €. ¿Cuánto cuesta cada entrada y cada bolsa de palomitas?

x = precio de una entrada (€)

y = precio de unas palomitas (€)

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 23 \\ 4x + 3y = 31,50 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ x = \dfrac{23 - 2y}{3} \\ \to\ x = \dfrac{31,50 - 3y}{4} \end{array}$$

Igualamos las variables:

$$\frac{23 - 2y}{3} = \frac{31,50 - 3y}{4} \ \to\ 4(23 - 2y) = 3(31,50 - 3y) \ \to\ 92 - 8y = 94,50 - 9y \ \to$$

$$\to\ 9y - 8y = 94,50 - 9y \ \to\ y = 2,50$$

Si $y = 2,50 \ \to\ x = \dfrac{23 - 2 \cdot 2,50}{3} = \dfrac{23 - 5}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$

La entrada de cine cuesta 6 €. Las palomitas cuestan 2,50 €.

5. Un empresario aceitero ha envasado 10 000 litros de aceite en 12 000 botellas, unas de litro y otras de tres cuartos de litro. ¿Cuántas botellas de cada clase ha utilizado?

x = número de botellas de 1 *l* que ha usado.

y = número de botellas de 3/4 *l* que ha usado.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12\,000 \\ x + \dfrac{3}{4}y = 10\,000 \end{array}\right\} \to\ x = 12\,000 - y$$

Sustituimos:

$$12\,000 - y + \frac{3}{4}y = 10\,000 \ \to\ 12\,000 - 10\,000 = \frac{y}{4} \ \to\ \frac{y}{4} = 2\,000 \ \to\ y = 8\,000$$

Si $y = 8\,000 \ \to\ x = 12\,000 - 8\,000 = 4\,000$

Usó 4 000 botellas de 1 *l* y 8 000 botellas de 3/4 *l*.

6. Dos números se diferencian en 35 unidades. Si al mayor se le resta la quinta parte del menor, se obtiene la misma cantidad que si al menor se le suma la quinta parte del mayor. ¿Qué números son?

x = número mayor

y = número menor

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ x - \dfrac{y}{5} = y + \dfrac{x}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ 5x - y = 5y + x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ 4x = 6y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ 2x = 3y \end{array}\right\} \to\ x = 35 + y$$

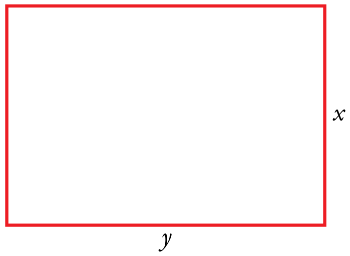
Sustituimos:

$2(35 + y) = 3y \ \to\ 70 + 2y = 3y \ \to\ 70 = y$

Si $y = 70 \ \to\ x = 35 + 70 = 105$

Los números buscados son 105 y 70.

7. La base de un rectángulo mide 13 cm más que la altura, y el perímetro mide 142 m. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?



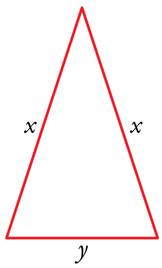
$$\left.\begin{array}{l} y = x + 13 \\ 2x + 2y = 142 \end{array}\right\}$$

$2x + 2(x + 13) = 142 \;\rightarrow\; 2x + 2x + 26 = 142 \;\rightarrow\; 4x = 116 \;\rightarrow\; x = \dfrac{116}{4} = 29$

Si $x = 29 \;\rightarrow\; y = 29 + 13 = 42$

Solución: la base mide 42 cm, y la altura, 29 cm.

8. En un triángulo isósceles, el perímetro mide 21 cm y el lado desigual es 3 cm más corto que cada uno de los lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?



$$\left.\begin{array}{l} y = x - 3 \\ 2x + y = 21 \end{array}\right\}$$

$2x + x - 3 = 21 \;\rightarrow\; 3x = 24 \;\rightarrow\; x = 8$

Si $x = 8 \;\rightarrow\; y = 8 - 3 = 5$

Solución: el lado desigual mide 5 cm. Cada lado igual mide 8 cm.

Página 112

9. Un bodeguero mezcla un tonel de vino de 4,80 €/*l* con otro tonel de un vino inferior, de 3,50 €/*l*, obteniendo 1 300 litros que salen a 4 € el litro. ¿Cuánto vino de cada clase hay en la mezcla?

x = litros de vino de 4,80 €/*l*

y = litros de vino de 3,50 €/*l*

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1300 \\ 4,80x+3,50y=4\cdot 1300 \end{array}\right\} \rightarrow x=1300-y$$

$$4,80(1\,300-y)+3,50y=5\,200 \rightarrow 6\,240-4,80y+3,50y=5\,200 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1\,040=1,30y \rightarrow y=\frac{1040}{1,30}=800$$

Si $y=800 \rightarrow x=1\,300-800=500$

Usa 500 *l* de vino caro y 800 *l* de vino barato.

10. Dos ciudades, A y B, distan 113 km. Un coche sale de A hacia B a 100 km/h, y media hora después sale de B hacia A un camión a 80 km/h. ¿Qué distancia recorre cada uno hasta que se cruzan?

x = kilómetros que recorre el coche hasta encontrarse con el camión.

y = kilómetros que recorre el camión hasya encontrarse con el coche.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=113 \\ \dfrac{x}{100}=\dfrac{y}{80}+\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=113 \\ 4x=5y+200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=113-y \\ 4(113-y)=5y+200 \end{array}\right\}$$

$$4(113-y)=5y+200 \rightarrow 452-4y=5y+200 \rightarrow 9y=252 \rightarrow y=28$$

Si $y=28 \rightarrow x=113-28=85$

Hasta que se cruzan, el coche recorre 85 km, y el camión, 28 km.

11. Jaime tiene 20 000 €. Coloca una parte, en un banco, al 7 %, y el resto, al 3 %. Gana 760 € en un año. ¿A cuánto ascendía cada parte?

Llamamos x al dinero que puso al 7 % e y, al que puso al 3 %.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=20\,000 \\ 0,07x+0,03y=760 \end{array}\right\} \rightarrow y=20\,000-x$$

$$0,07x+0,03(20\,000-x)=760 \rightarrow 0,07x+600-0,03x=760 \rightarrow 0,04x=160 \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{160}{0,04} \rightarrow x=4\,000$$

Si $x=4\,000 \rightarrow y=20\,000-4\,000=16\,000$

Jaime puso 4 000 € al 7 % y 16 000 € al 3 %.

12. **Sofía tenía un capital de 200 000 €. Depositó una parte en un banco al 4 % anual. El resto lo invirtió en acciones, con las que perdió el 11 %. Al final del año ganó 4 250 €.**

¿Cuánto destinó a cada inversión?

Llamamos x al capital que depositan en el banco e y al que invierte en acciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 200\,000 \\ 0,04x - 0,11y = 4\,250 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow\ y = 200\,000 - x \\ \rightarrow\ 0,04x - 0,11\,(200\,000 - x) = 4\,250\ \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow\ 0{,}04x - 22\,000 + 0{,}11x = 4\,250\ \rightarrow\ 0{,}15x = 26\,250\ \rightarrow\ x = \frac{26\,250}{0,15}\ \rightarrow\ x = 175\,000$$

$y = 200\,000 - 175\,000 = 25\,000$

Sofía invirtió 175 000 € en el banco y 25 000 € en acciones.

13. **Un inversor reparte su capital en dos fondos de riesgo medio y un tiempo después los rescata, ganando un 3,25 % en el primero y perdiendo un 0,75 % en el segundo.**

¿Qué tanto por ciento colocó en cada fondo si, en total, obtuvo un beneficio del 2,85 %?

Por cada 100 euros, coloca x euros en el primer fondo y $100 - x$ en el segundo.

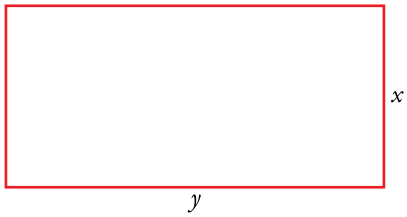
$1{,}0325x + 0{,}9925(100 - x) = 100 \cdot 1{,}0285\ \rightarrow\ 1{,}0325x + 99{,}25 - 0{,}9925x = 102{,}85\ \rightarrow$

$\rightarrow\ 0{,}04x = 102{,}85 - 99{,}25\ \rightarrow\ 0{,}04x = 3{,}6\ \rightarrow\ x = 90$

Colocó el 90 % en el primer fondo, y el 10 %, en el segundo.

Página 113

14. La valla de una finca rectangular mide 148 m, y su superficie, 1 200 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 148 \\ x \cdot y = 1200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 74 \\ x \cdot y = 1200 \end{array}\right\} \rightarrow x = 74 - y$$

$(74 - y) \cdot y = 1\,200 \rightarrow 74y - y^2 - 1\,200 = 0 \rightarrow y^2 - 74y + 1\,200 = 0$

$$y = \frac{-(-74) \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1200}}{2 \cdot 1} = \frac{74 \pm \sqrt{5476 - 4800}}{2} = \frac{74 \pm 26}{2} = \begin{cases} \dfrac{74 + 26}{2} = 50 \\[2ex] \dfrac{74 - 26}{2} = 24 \end{cases}$$

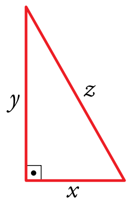
Si $y = 50 \rightarrow x = 74 - 50 = 24$

Si $y = 24 \rightarrow x = 74 - 24 = 50$

Solución: Largo de la finca: 50 m

Ancho de la finca: 24 m

15. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto es 10 cm más largo que el otro y que el área mide 150 cm².



$$\left.\begin{array}{l} y = x + 10 \\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 150 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x(x+10)}{2} = 150 \rightarrow x(x + 10) = 300$$

$x^2 + 10x - 300 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 1200}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{1300}}{2} \approx$$

$$\approx \frac{-10 \pm 36{,}06}{2} = \begin{cases} \dfrac{-10 + 36{,}06}{2} = 13{,}03 \\[2ex] \dfrac{-10 - 36{,}06}{2} \rightarrow \text{No es solución del problema.} \end{cases}$$

Si $x = 13{,}03 \rightarrow y = 13{,}03 + 10 = 23{,}03$

Por el teorema de Pitágoras:

$z^2 = 13{,}03^2 + 23{,}03^2 = 169{,}7809 + 530{,}3809 = 700{,}1618 \rightarrow z = \sqrt{700{,}1618} \approx 26{,}46$ cm

Solución:

Perímetro del triángulo = 13,03 + 23,03 + 26,46 = 62,52 cm

16. Un depósito dispone de dos grifos de llenado. Si se abre solo el primero, el depósito tarda en llenarse el doble que si se abre solo el segundo. Pero si se abren los dos a la vez, se llena en 10 minutos. ¿Cuánto tarda cada grifo en llenar el depósito actuando en solitario?

x = número de horas que tarda el grifo 1 en llenar el pilón.

y = número de horas que tarla el grifo 2 en llenar el pilón.

El grifo 1 en 1 hora llena $\frac{1}{x}$ del pilón.

El grifo 2 en 1 hora llena $\frac{1}{y}$ del pilón.

Los grifos 1 y 2 juntos en 1 hora llenan 6 pilones.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{y} = 6 \rightarrow 1 + 2 = 12y \rightarrow 12y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$x = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Solución: el grifo 1 tarda $\frac{1}{2}$ hora = 30 minutos en llenar el pilón, y el grifo 2 tarda $\frac{1}{4}$ hora = 15 minutos en llenar el pilón.

Ejercicios y problemas

Página 114

Practica

Sistemas lineales

1. **Comprueba si el par (3, –1) es solución de alguno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

El par (3, –1) es solución de un sistema si al sustituir x por 3 e y por –1, se verifican ambas igualdades:

a) $\left.\begin{matrix} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 9 + 2 = 11 \end{matrix}\right\} \to$ (3, –1) es solución del sistema.

b) $\left.\begin{matrix} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5 \\ 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 8 \end{matrix}\right\} \to$ La segunda ecuación no se cumple. (3, –1) no es solución del sistema.

2. **Completa en tu cuaderno para que los siguientes sistemas tengan como solución $x = -1$, $y = 2$:**

a) $\begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = \dots \\ \dots + y/2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{matrix}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} -1 - 3 \cdot 2 = -1 - 6 = -7 \\ 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$

Así, $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ es el sistema buscado.

b) $\left.\begin{matrix} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{matrix}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases}$

El sistema que tiene como solución $x = -1$, $y = 2$ es: $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$

c) $\left.\begin{matrix} 3x + y = \dots \\ \dots + \dfrac{y}{2} = 0 \end{matrix}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} 3 \cdot (-1) + 2 = -3 + 2 = -1 \\ \dots + \dfrac{2}{2} = 0 \to \dots = -1 \text{ luego} \dots \text{es } x \end{cases}$

El sistema buscado es $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases}$

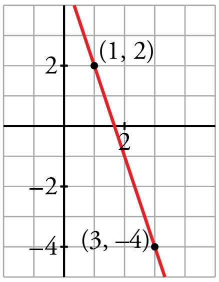
d) $\left.\begin{aligned} \ldots - 2x &= 4 \\ 3y + \ldots &= 1 \end{aligned}\right\}$ Si $x = -1,\ y = 2 \rightarrow \begin{cases} \ldots - 2 \cdot (-1) = 4 \rightarrow \ldots + 2 = 4 \rightarrow \ldots = 2 = y \\ 3 \cdot 2 + \ldots = 1 \rightarrow \ldots = -5 \text{ luego} \ldots \text{es } 5x \end{cases}$

El sistema buscado es: $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 3y + 5x = 1 \end{cases}$

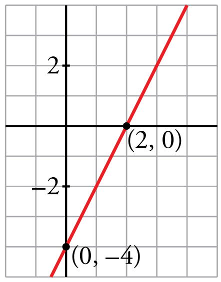
3. **Busca dos soluciones para cada una de estas ecuaciones y representa las rectas correspondientes:**

a) $\mathbf{3x + y = 5}$ **b)** $\mathbf{2x - y = 4}$

a) Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: (1, 2) y (3, –4).



b) Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: (0, –4) y (2, 0).



4. **Resuelve gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + y = 5} \\ \mathbf{x + y = 1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{4x - y = 7} \\ \mathbf{y - 1 = 0} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{2x - y = 4} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{x + 3 = 0} \end{cases}$

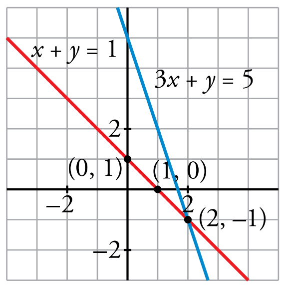
a) Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$3x + y = 5$

x	*y*
0	5
2	–1

$x + y = 1$

x	*y*
0	1
1	0

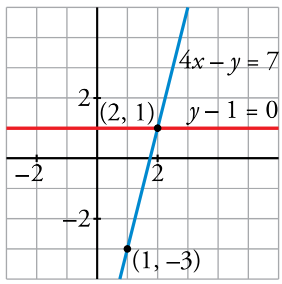


Las rectas se cortan en el punto (2, –1) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = 2,\ y = -1$.

b) La segunda ecuación representa a una recta paralela al eje X, $y = 1$.

La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, –3) y (2, 1).

La solución del sistema es $x = 2,\ y = 1$, punto de intersección de ambas rectas.



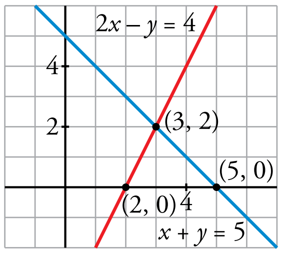
c) Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

$2x - y = 4$

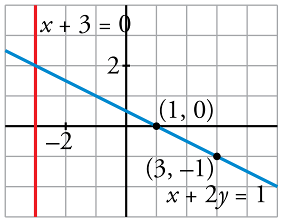
x	y
2	0
3	2



Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), luego $x = 3$, $y = 2$ es la solución del sistema.

d) La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, 0) y (3, –1). La segunda ecuación es la de una recta al eje Y, $x = -3$.

Las dos rectas se cortan en el punto (–3, 2) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = -3$, $y = 2$.



5. **Dos de los siguientes sistemas tienen solución única; uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + \ \ y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \ \ x + \ \ y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + y = \ \ 2 \\ \ \ x - y = -2 \end{cases}$

- El sistema c) tiene infinitas soluciones, pues la segunda ecuación es la primera multiplicada por 3. Por tanto, las dos ecuaciones dicen lo mismo.
- El sistema b) es incompatible, sin solución, ya que las ecuaciones son contradictorias:

$$\left.\begin{aligned} 2x + \ \ y &= 3 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$ Imposible que se cumplan ambas a la vez.

- Los sistemas a) y d) tienen solución.

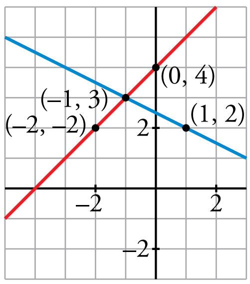
Resolvemos gráficamente todos los sistemas para comprobarlo:

a) $x + 2y = 5$

x	y
1	2
–1	3

$y - x = 4$

x	y
–2	2
0	4



Las dos rectas se cortan en (–1, 3).

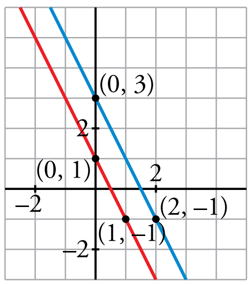
La solución del sistema es $x = -1$, $y = 3$.

b) $2x + y = 3$

x	y
0	3
2	–1

$4x + 2y = 2$

x	y
0	1
1	–1



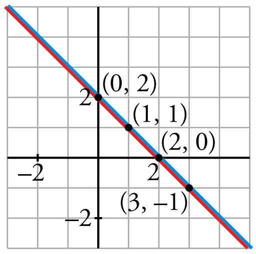
Las rectas son paralelas $\rightarrow$ El sistema no tiene solución.

c) $x + y = 2$

x	y
0	2
2	0

$3x + 3y = 6$

x	y
1	1
3	–1



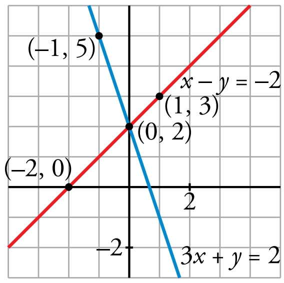
Se trata de la misma recta $\rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones.

d) $3x + y = 2$

x	y
0	2
–1	5

$x - y = -2$

x	y
–2	0
1	3



El sistema tiene solución única $x = 0$, $y = 2$, punto de corte de ambas rectas.

6. **Dada la ecuación $x + 3y = 1$, busca otra ecuación que forme con ella un sistema cuya única solución sea $x = -2$, $y = 1$. Busca también otra ecuación que forme con ella un sistema incompatible y otra que forme con ella un sistema indeterminado.**

$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{array}\right\}$ Es un sistema que tiene como solución $x = -2$, $y = 1$.

$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -1 \end{array}\right\}$ Es un sistema que no tiene solución, es incompatible.

$$\begin{array}{rcl} -2x - 6y & = & -2 \\ 2x + 6y & = & -1 \\ \hline 0 & = & -3 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$ Es un sistema que tiene infinitas soluciones, es indeterminado (la 2.ª ecuación es la tercera parte de la primera).

7. **Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 2.ª ecuación y sustituimos en la 1.ª: $y = -1 - 4x$

$\left.\begin{array}{l} 3x - 5(-1 - 4x) = 5 \rightarrow 3x + 5 + 20x = 5 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0 \\ y = -1 - 4 \cdot 0 = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 0$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la 2.ª ecuación y sustituimos en la 1.ª: $x = -5 - 6y$

$\left.\begin{array}{l} 8(-5 - 6y) - 7y = 15 \rightarrow -55y = 55 \rightarrow y = -1 \\ x = -5 - 6 \cdot (-1) = -5 + 6 = 1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 1$, $y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ 3x - \ \ y = \ \ 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 2.ª ecuación y sustituimos en la 1.ª: $y = 3x - 7$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5(3x - 7) = -1 \ \to \ 2x + 15x - 35 = -1 \ \to \ 17x = 34 \ \to \ x = 2 \\ y = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Solución:} \\ x = 2, \ \ y = -1\end{array}$$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 1.ª ecuación y sustituimos en la 2.ª: $y = \dfrac{3x-2}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 4 \cdot \left(\dfrac{3x-2}{2}\right) = 7 \ \to \ 5x + 6x - 4 = 7 \ \to \ x = 1 \\ y = \dfrac{3 \cdot 1 - 2}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 1, \ \ y = \dfrac{1}{2}$$

8. **Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:**

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x-3}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + y = \ \ 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = \ \ 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x-3}{2} \end{array}\right\}$ $2x - 3 = \dfrac{x-3}{2} \ \to \ 4x - 6 = x - 3 \ \to \ 3x = 3 \ \to \ x = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

Solución: $x = 1, \ y = -1$

b) Despejamos y de cada una de las ecuaciones e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} y = 8 - 5x \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} 8 - 5x = 2x + 1 \ \to \ 7 = 7x \ \to \ x = 1 \\ y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{array}$$

Solución: $x = 1, \ y = 3$

c) Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 - 6y \\ x = 1 + 3y \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} -2 - 6y = 1 + 3y \ \to \ -3 = 9y \ \to \ y = -1/3 \\ x = -2 - 6 \cdot (-1/3) = -2 + 2 = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0, \ y = -\dfrac{1}{3}$

d) Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5y-2}{4} \\ x = \dfrac{10-2y}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{5y-2}{4} = \dfrac{10-2y}{3} \ \to \ 3(5y-2) = 4(10-2y) \ \to \ 23y = 46 \ \to \ y = 2 \\ x = \dfrac{5 \cdot 2 - 2}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{array}$$

Solución: $x = 2, \ y = 2$

9. **Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos } 8x = 8 \to x = 1 \\ 3 \cdot 1 + 2y = 4 \to 2y = 1 \to y = 1/2 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1,\ y = \dfrac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{array}{r} -4x - 10y = -22 \\ 4x - 3y = -4 \\ \hline -13y = -26 \end{array} \to y = 2$

$2x + 5 \cdot 2 = 11 \to 2x = 1 \to x = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{1}{2},\ y = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{array}{r} -3x - 18y = 12 \\ 3x - 5y = 11 \\ \hline -23y = 23 \end{array} \to y = -1$

$x + 6 \cdot (-1) = -4 \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{array}{r} -10x + 4y = -6 \\ 10x + 3y = -1 \\ \hline 7y = -7 \end{array} \to y = -1$

$5x - 2 \cdot (-1) = 3 \to 5x + 2 = 3 \to x = \dfrac{1}{5}$

Solución: $x = \dfrac{1}{5},\ y = -1$

10. **Resuelve por el método que consideres más adecuado:**

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 3 = 2y + 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 2.ª ecuación y la sustituimos en la 1.ª: $y = -2$

$7x + 6 \cdot (-2) = 2 \to 7x - 12 = 2 \to 7x = 14 \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \begin{array}{r} 10x - 6y = 2 \\ 12x + 6y = 42 \\ \hline 22x \quad = 44 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 22x = 44 \to x = 2 \\ 5 \cdot 2 - 3y = 1 \to 9 = 3y \to y = 3 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 2,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} 3(x+2) = y + 7 \\ x + 2(y+1) = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3x + 6 = y + 7 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 3x - 1$

$\left.\begin{array}{l} x + 2(3x - 1) = -2 \to x + 6x - 2 = -2 \to 7x = 0 \to x = 0 \\ y = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 0,\ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 18 \\ x + y = 8 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = 8 - y$

$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot (8 - y) + 3y = 18 \to 16 - 2y + 3y = 18 \to y = 2 \\ x = 8 - 2 = 6 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 6,\ y = 2$

e) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3 = 2y - 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 4x - 2y = -18 \\ x + 6y = 15 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = 15 - 6y$

$\left.\begin{array}{l} 4(15 - 6y) - 2y = -18 \to 60 - 24y - 2y = -18 \to 78 = 26y \to y = 3 \\ x = 15 - 6 \cdot 3 = 15 - 18 = -3 \end{array}\right\}$ Solución: $x = -3,\ y = 3$

f) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -x + 7 = 2(y + 4) \\ 10x = 3y - 10 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -x - 2y = 1 \\ 10x - 3y = -10 \end{array}\right\}$

Aplicamos el método de reducción: multiplicamos la primera ecuación por 10 y sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -10x - 20y = 10 \\ 10x - 3y = -10 \\ \hline -23y = 0 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} -23y = 0 \to y = 0 \\ -x - 2 \cdot 0 = 1 \to -x = 1 \to x = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = -1,\ y = 0$

11. **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

a) Por reducción. Multiplicamos la 1.ª ecuación por –2 y sumamos:

$$\begin{array}{r} -4x+2y=-8 \\ 4x+3y=-7 \\ \hline 5y=-15 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5y=-15 \to y=-3 \\ x=\dfrac{4+y}{2} \to x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Solución: } x=\frac{1}{2},\ y=-3$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} 2\cdot\dfrac{1}{2}-(-3)=1+3=4 \\ 4\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot(-3)=2-9=-7 \end{cases}$$

b) Por reducción. Multiplicamos la 2.ª ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{r} x+2y=-1 \\ 6x-2y=-2,5 \\ \hline 7x\qquad=-3,5 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x=-3,5 \to x=-0,5 \\ y=\dfrac{-1-x}{2} \to y=-0,25 \end{array}\right\} \text{Solución: } x=-0,5,\ y=-0,25$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} -0,5+2(-0,25)=-1 \\ 3(-0,5)-(-0,25)=-1,25 \end{cases}$$

c) Por reducción. Multiplicamos la 2.ª ecuación por –3 y sumamos:

$$\begin{array}{r} 3x-\ \ 2y=2 \\ -3x-12y=5 \\ \hline -14y=7 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -14y=7 \to y=-1/2 \\ x=\dfrac{-5}{3}-4y \to x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \text{Solución: } x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{2}$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} 3\cdot\dfrac{1}{3}-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2 \\ \dfrac{1}{3}+4\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{-5}{3} \end{cases}$$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+1+3y=3 \\ x-3+8y=4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+3y=2 \\ x+8y=7 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x=2-3y \\ x=7-8y \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} 2-3y=7-8y \to y=1 \\ x=7-8\cdot 1 \to x=-1 \end{array}$$

Solución: $x=-1,\ y=1$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} \dfrac{-1+1}{3}+1=0+1=1 \\ \dfrac{-1-3}{4}+2\cdot 1=-1+2=1 \end{cases}$$

Página 115

Sistemas no lineales

12. **Halla las soluciones de estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)y + 2y = 2 \;\to\; y - y^2 + 2y = 2 \;\to\; -y^2 + 3y - 2 = 0 \end{cases}$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} y_1 = 1 \;\to\; x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \;\to\; x_2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\; y_1 = 1;\; x_2 = -1,\; y_2 = 2$

b) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x^2 + (3 - 2x)^2 = 2 \;\to\; x^2 + 9 + 4x^2 - 12x = 2 \;\to\; 5x^2 - 12x + 7 = 0 \end{cases}$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2 \cdot 5} = \frac{12 \pm 2}{10} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5} \;\to\; y_1 = 3 - 2 \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = 1 \;\to\; y_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{7}{5},\; y_1 = \frac{1}{5};\; x_2 = 1,\; y_2 = 1$

c) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \;\to\; (3 - 2x)(x - (3 - 2x)) = 0 \end{cases}$

$$(3 - 2x) \cdot (3x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \;\to\; y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \;\to\; y_2 = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{3}{2},\; y_1 = 0;\; x_2 = 1,\; y_2 = 1$

d) $\begin{cases} y = 3x - 3 \\ 2x^2 + (3x - 3)^2 = 9 \;\to\; 2x^2 + 9x^2 + 9 - 18x = 9 \;\to\; 11x^2 - 18x = 0 \end{cases}$

$$x(11x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \;\to\; y_1 = -3 \\ x_2 = \dfrac{18}{11} \;\to\; y_2 = \dfrac{21}{11} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\; y_1 = -3;\; x_2 = \frac{18}{11},\; y_2 = \frac{21}{11}$

13. **Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + \ y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + \ y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la 1.ª ecuación y sumamos:

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 2y^2 = -148 \\ 2x^2 - 3y^2 = \quad 23 \\ \hline -5y^2 = -125 \end{array} \to y^2 = \frac{125}{5} = 25 \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

Si $y_1 = 5 \to x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Si $y_2 = -5 \to x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = -7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 7,\ y_1 = 5;\ x_2 = -7,\ y_2 = 5;\ x_3 = 7,\ y_3 = -5;\ x_4 = -7,\ y_4 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{array}\right\}$ Lo resolvemos por el método de reducción multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y la 2.ª por –3.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ -6x^2 + 33y^2 = 9 \\ \hline 23y^2 = 23 \end{array} \to y^2 = 1$$

$3x^2 - 5 \cdot 1 = 7 \to 3x^2 = 7 + 5 \to 3x^2 = 12 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$

Si $y = 1 \to x = \pm 2$. Si $y = -1 \to x = \pm 2$.

Las soluciones son: $x_1 = -2,\ y_1 = -1;\ x_2 = -2,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = -1;\ x_4 = 2,\ y_4 = 1$

14. **Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):**

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x + 2} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} y = \sqrt{x + 2} \\ x - 2y = 1 \end{array}\right\} \to x = 1 + 2y$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = \sqrt{1 + 2y + 2} \to y = \sqrt{3 + 2y}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $y^2 = 3 + 2y \to y^2 - 2y - 3 = 0$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \to x = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ -1 \to x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{cases}$$

Comprobamos si las soluciones obtenidas cumplen la primera ecuación del sistema:

$x_1 = 7,\ y_1 = 3 \to 3 = \sqrt{7 + 2} \to 3 = \sqrt{9} \to 3 = 3 \to$ Solución válida.

$x_2 = -1,\ y_2 = -1 \to -1 = \sqrt{-1 + 2} \to -1 = \sqrt{1} \to -1 \neq 1 \to$ Solución no válida.

Por tanto, la solución es $x = 7,\ y = 3$.

b) $\left.\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{array}\right\}$ $x + 1 = \sqrt{x} + 7 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow (x - 6)^2 = x \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \rightarrow y = 9 + 1 = 10 \\ 4 \rightarrow y = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

Comprobación (de la 2.ª ecuación):

$x_1 = 9,\ y_1 = 10 \rightarrow \sqrt{9} + 7 = 3 + 7 = 10 \rightarrow$ Solución válida.

$x_2 = 4,\ y_2 = 5 \rightarrow \sqrt{4} + 7 = 9 \neq 5 \rightarrow$ Solución no válida.

Solución: $x = 9,\ y = 10$.

c) $\left.\begin{array}{l} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{25y}{2}$

$$xy = 2 \rightarrow \frac{25}{2}y \cdot y = 2 \rightarrow \frac{25}{2}y^2 = 2 \rightarrow y^2 = \frac{4}{25} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm\frac{2}{5}$$

Si $y = \dfrac{2}{5} \rightarrow x = \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$

$y = -\dfrac{2}{5} \rightarrow x = -5$

Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 5,\ y_1 = \dfrac{2}{5} \\ x_2 = -5,\ y_2 = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \rightarrow x = 4 - 2y \end{array}\right\}$ $2(4 - 2y) \cdot y = 3 \rightarrow 8y - 4y^2 = 3 \rightarrow 4y^2 - 8y + 3 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = \begin{cases} \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \rightarrow x = 4 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 1 \\ \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = 4 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\ y_1 = \dfrac{3}{2};\ x_2 = 3,\ y_2 = \dfrac{1}{2}$

15. **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y)^2 + y^2 = 11 - 3(1 + y) \rightarrow 1 + y^2 + 2y + y^2 = 11 - 3 - 3y \end{cases}$

$$2y^2 + 5y - 7 = 0 \rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 9}{4} = \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = -7/2 \rightarrow x_2 = -5/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -\dfrac{5}{2},\ y_2 = -\dfrac{7}{2}$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{-3x}{2} \\ x^2 - x\left(\dfrac{-3x}{2}\right) = 2\left(\dfrac{9x^2}{4} - 4\right) \to x^2 + \dfrac{3x}{2} - \dfrac{9x^2}{2} = -8 \end{cases}$

$2x^2 + 3x^2 - 9x^2 = -16 \to 4x^2 = 16$

$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \to y_1 = -3 \to \text{Solución: } x_1 = 2,\ y_1 = -3 \\ x_2 = -2 \to y_2 = 3 \to \text{Solución: } x_2 = -2,\ y_2 = 3 \end{cases}$

Aplica lo aprendido

16. **La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?**

Llamamos x e y a los números buscados.

La suma es 15 $\to x + y = 15$

La mitad de x + tercera parte de y es 6 $\to \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6$

$\left.\begin{array}{r} x + y = 15 \\ 3x + 2y = 36 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} y = 15 - x \to y = 15 - 6 = 9 \\ 3x + 2(15 - x) = 36 \to 3x + 30 - 2x = 36 \to x = 6 \end{array}$

Los números buscados son 6 y 9.

17. **La suma de dos números es 14. Añadiendo una unidad al mayor se obtiene el doble del menor. Halla los dos números.**

x = número mayor $\quad \left.\begin{array}{l} x + y = 14 \\ x + 1 = 2y \end{array}\right\} \to x = 2y - 1$

y = número menor

$2y - 1 + y = 14 \to 3y = 15 \to y = 5 \to x = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

Los números son 5 y 9.

18. **Encuentra dos números tales que añadiendo tres unidades al primero se obtenga el segundo y, en cambio, añadiendo dos unidades al segundo se obtenga el doble del primero.**

Llamamos x e y a los números pedidos: x es el primero e y el segundo.

$\left.\begin{array}{l} x + 3 = y \\ y + 2 = 2x \end{array}\right\} x + 3 + 2 = 2x \to 5 = x \to y = 5 + 3 = 8$

Los números son 5 y 8.

19. Un número es triple que otro. Pero si al menor se le suman 7 unidades y al mayor se le resta su quinta parte, quedan igualados. ¿Qué números son?

$$\begin{array}{ll} x = \text{número mayor} & \\ y = \text{número menor} & \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x = 3y \\ y + 7 = x - \dfrac{x}{5} \end{array}\right\} \to y + 7 = 3y - \dfrac{3y}{5}$$

$$5y + 35 = 15y - 3y \to 35 = 7y \to y = \frac{35}{7} = 5$$

Si $y = 5 \to x = 3 \cdot 5 = 15$

Solución: los números buscados son 15 y 5.

20. Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

$x \to$ precio de una barra de pan (€)

$y \to$ precio de un litro de leche (€)

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 6,8 \\ 3x + 4y = 4,7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot (-4)} \end{array} \begin{array}{r} 12x + 18y = 20,4 \\ -12x - 16y = -18,8 \\ \hline 2y = 1,6 \end{array} \to y = 0,8$$

$$4x + 6 \cdot 0,8 = 6,8 \to 4x + 4,8 = 6,8 \to 4x = 2 \to x = \frac{2}{4} = 0,5$$

Una barra de pan cuesta 0,50 €, y un litro de leche, 0,80 €.

21. Una empresa aceitera ha envasado 3 000 *l* de aceite en 1 200 botellas de 2 *l* y de 5 *l*. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

x = número de botellas de aceite de 2 *l*

y = número de botellas de aceite de 5 *l*

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1200 \\ 2x + 5y = 3000 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot (-2)} \begin{array}{r} -2x - 2y = -2400 \\ 2x + 5y = 3000 \\ \hline 3y = 600 \end{array} \to y = 200 \to x = 1200 - 200 = 1000$$

Se han utilizado 1 000 botellas de 2 *l* y 200 de 5 *l*.

22. Un test consta de 48 preguntas. Por cada acierto se suman 0,75 puntos y por cada error se restan 0,25. Mi puntuación fue de 18 puntos. ¿Cuántos aciertos y errores tuve, si contesté a todas las preguntas?

$$\begin{array}{l} x = \text{número de aciertos} \\ y = \text{número de errores} \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 48 \\ 0,75x - 0,25y = 18 \end{array}\right\} \to x = 48 - y$$

$$\left.\begin{array}{l} 0,75(48 - y) - 0,25y = 18 \\ 36 - 0,75y \;\; 0,25y = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 18 = y \\ x = 48 - 18 = 30 \end{array}$$

Tuve 30 aciertos y 18 errores.

23. **Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,80 € por cada pieza que sale de su taller para la venta, pero sufre una pérdida de 1 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En un día ha fabricado 2 255 bombillas, obteniendo unos beneficios de 1 750 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se fabricaron ese día?**

x = número de bombillas válidas

y = número de bombillas defectuosas

$$\begin{array}{lcl} \text{En un día fabrica 2 255 bombillas} & \to & \left.\begin{array}{r} x + y = 2\,255 \\ 0,80x - y = 1750 \end{array}\right\} \\ \text{En un día obtiene 1750 € de beneficio} & \to & \\ \hline & & 1,80x \quad = 4\,005 \to x = 2\,225 \end{array}$$

$y = 2255 - 2\,225 = 30$

Hay 2 225 bombillas válidas y 30 defectuosas.

24. **En una pescadería, un cliente se lleva una pescadilla de kilo y medio y tres cuartos de kilo de boquerones. Tras él, una señora pide media pescadilla que pesa 600 gramos y un kilo de boquerones. El primero paga 21 € por su compra, y la señora, 12,60 € por la suya. ¿A cómo está el kilo de pescadilla? ¿Y el de boquerones?**

x = precio de la pescadilla (€/kg)

y = precio de los boquerones (€/kg)

$$\begin{array}{l} \text{El cliente se gasta} \to \\ \text{La señora paga} \to \end{array} \left.\begin{array}{r} 1,5x + 0,75y = 21 \\ 0,6x + \quad y = 12,6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-4)} \\ \xrightarrow{\cdot 10} \end{array} \left.\begin{array}{r} -6x - 3y = -84 \\ 6x + 10y = 126 \end{array}\right\}$$

$$7y = 42 \to y = 6 \to x = 11$$

Solución: la pescadilla cuesta 11 €/kg y los boquerones 6 €/kg.

25. **En un aparcamiento cobran un fijo por entrar y un tanto a la hora. Hoy, por hora y media, he pagado 2,60 € y ayer pagué 3,40 € por dos horas y diez minutos. ¿Cuál es el fijo y cuál es el coste por hora?**

x = precio por entrar (€)

y = precio por hora (€)

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad 1,5y = 2,6 \\ x + (2 + 1/6)y = 3,4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-6)} \\ \xrightarrow{\cdot 6} \end{array} \left.\begin{array}{r} -6x - 9y = -15,6 \\ 6x + 13y = 20,4 \end{array}\right\}$$

$$4y = 4,80 \to y = 1,20 \to x = 0,80$$

Solución: se cobra por entrar 0,80 € y 1,20 €/h.

26. **Andrés tiene dos cuentas en el banco. Si pasara 600 € de la primera a la segunda, esta quedaría con saldo doble. Pero si la transferencia fuera de 300 € en sentido contrario, sería la primera la que tendría el doble. ¿Cuánto hay en cada una?**

x = euros en la primera cuenta

y = euros en la segunda cuenta

$$\left.\begin{array}{r} 2(x - 600) = y + 600 \\ x + 300 = 2(y - 300) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to y = 2x - 1800 \to y = 1\,200 \\ \to x + 300 = 2(2x - 1\,800 - 300) \to 3x = 4\,500 \to x = 1500 \end{array}$$

Solución: en la primera cuenta tiene 1 500 € y en la segunda 1 200 €.

27. **Una empresa de alquiler de coches cobra por día y por kilómetros recorridos. Un cliente pagó 160 € por 3 días y 400 km, y otro pagó 175 € por 5 días y 300 km. Averigua cuánto cobran por día y por km.**

$x \rightarrow$ días

$y \rightarrow$ kilómetros recorridos

$$\left.\begin{aligned} 3x + 400y &= 160 \\ 5x + 300y &= 175 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 5} \\ &\xrightarrow{\cdot(-3)} \end{aligned} \begin{aligned} 15x + 2\,000y &= 800 \\ -15x - 900y &= -525 \\ \hline 1\,100y &= 275 \end{aligned} \rightarrow y = 0{,}25$$

$3x + 0{,}25 \cdot 400 = 160 \rightarrow 3x = 60 \rightarrow x = 20$

La empresa cobra 20 € por día y 0,25 € por cada kilómetro recorrido.

28. **La diferencia de dos números es 6, y la de sus cuadrados, 144. Halla los números.**

Llamamos x e y a los números buscados.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 6 \\ x^2 - y^2 &= 144 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &x = 6 + y \rightarrow x = 6 + 9 = 15 \\ &(6 + y)^2 - y^2 = 144 \rightarrow 36 + 12y + y^2 - y^2 = 144 \rightarrow 12y = 108 \rightarrow y = 9 \end{aligned}$$

Los números son 15 y 9.

29. **Calcula dos números cuya suma sea 24, y su producto, 135.**

Llamamos x e y a los números buscados.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 24 \\ xy &= 135 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &y = 24 - x \\ &x(24 - x) = 135 \rightarrow 24x - x^2 = 135 \rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 540}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \rightarrow y = 24 - 15 = 9 \\ 9 \rightarrow y = 24 - 9 = 15 \end{cases}$$

Los números son 9 y 15.

30. **Halla dos números cuya suma sea 20, y la de sus cuadrados, 232.**

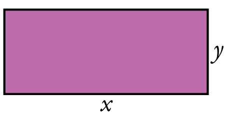
Llamamos x e y a los números buscados.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x^2 + y^2 &= 232 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &y = 20 - x \\ &x^2 + (20 - x)^2 = 232 \rightarrow x^2 + 400 - 40x + x^2 = 232 \rightarrow x^2 - 20x + 84 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \rightarrow y = 20 - 14 = 6 \\ 6 \rightarrow y = 20 - 6 = 14 \end{cases}$$

Los números son 6 y 14.

31. **El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones?**



$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 20 \\ x \cdot y &= 21 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 10 \\ xy &= 21 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 21 \rightarrow -x^2 + 10x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-2} = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{-2} =$$

$$= \frac{-10 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = 7 \rightarrow y_1 = 10 - 7 = 3 \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 10 - 3 = 7 \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 7 cm.

Página 116

Resuelve problemas

32. **La edad de un padre es hoy el triple que la del hijo y hace 6 años era cinco veces la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

	EDAD ACTUAL	EDAD HACE 6 AÑOS
PADRE	x	$x-6$
HIJO	y	$y-6$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x - 6 = 5(y-6) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x - 5y = -24 \end{array}\right\} \text{Método de sustitución}$$

$3y - 5y = -24 \;\rightarrow\; -2y = -24 \;\rightarrow\; y = 12$

El hijo tiene 12 años, y el padre, $3 \cdot 12 = 36$ años.

33. **La edad de un padre es hoy siete veces la edad del hijo y dentro de 10 años será solo el triple. Calcula la edad actual de cada uno.**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 10 AÑOS
PADRE	x	$x+10$
HIJO	y	$y+10$

$$\left.\begin{array}{l} x = 7y \\ x + 10 = 3(y+10) \end{array}\right\}$$

$7y + 10 = 3y + 30 \;\rightarrow\; 4y = 20 \;\rightarrow\; y = 5 \;\rightarrow\; x = 7 \cdot 5 = 35$

El padre tiene 35 años, y el hijo, 5 años.

34. **Se sabe que Noelia le saca 27 años a Marcos y que dentro de 12 años le doblará en edad. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 12 AÑOS
NOELIA	x	$x+12$
MARCOS	y	$y+12$

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 27 \\ x + 12 = 2(y+12) \end{array}\right\}$$

$y + 27 + 12 = 2y + 24 \;\rightarrow\; y + 39 = 2y + 24 \;\rightarrow\; 15 = y \;\rightarrow\; x = 15 + 27 = 42$

Noelia tiene 42 años, y Marcos, 15 años.

35. **El año que viene, la edad de Raquel será el triple que la de su hijo Iván, pero dentro de 12 años solo será el doble. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

	EDAD DENTRO DE 1 AÑO	EDAD DENTRO DE 12 AÑOS
RAQUEL	$x+1$	$x+12$
IVÁN	$y+1$	$y+12$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 = 3(y+1) \\ x + 12 = 2(y+12) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 3y + 2 \\ 3y + 12 + 2 = 2y + 24 \;\rightarrow\; y = 10 \;\rightarrow\; x = 32 \end{array}$$

Raquel tiene 32 años e Iván tiene 10 años.

36. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

37. **Un inversor dispone de 100 000 €. Invierte una parte en un banco que le paga el 4 % anual, y el resto, en unas acciones que le producen un 5 % al final del año. En total, gana 4 700 €. ¿Qué cantidad ha destinado a cada operación?**

x = inversión en el banco (€)

y = inversión en las acciones (€)

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 100\,000 \\ 4\,\% \text{ de } x + 5\,\% \text{ de } y = 4\,700 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 100\,000 \\ 0,04x + 0,05y = 4\,700 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x + \ \ y = 100\,000 \\ 4x + 5y = 470\,000 \end{array}\right\} \rightarrow x = 100\,000 - y$$

$4(100\,000 - y) + 5y = 470\,000 \rightarrow 400\,000 - 4y + 5y = 470\,000 \rightarrow y = 70\,000$

$x = 100\,000 - 70\,000 = 30\,000$

Solución: en el banco invierte 30 000 €.

En las acciones invierte 70 000 €.

38. **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10 % de su valor, y con el ordenador, el 15 %. ¿Cuánto le costó cada uno?**

	P. COMPRA	P. VENTA
E. MÚSICA	x	$0,9x$
ORDENADOR	y	$0,85y$

$$\left.\begin{array}{l} x + \qquad y = 2\,500 \\ 0,9x + 0,85y = 2\,157,5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0,9x + 0,85\,(2\,500 - x) = 2\,157,5 \end{array}\right\}$$

$0,9x + 2\,125 - 0,85x = 2\,157,5 \rightarrow 0,05x = 32,5 \rightarrow x = 650 \rightarrow y = 2\,500 - 650 = 1\,850$

El equipo de música le costó 650 €, y el ordenador, 1 850 €.

39. **Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8 %, y el cuaderno tiene una rebaja del 10 %. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €. ¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?**

x = precio inicial de la calculadora (€)

y = precio inicial del cuaderno (€)

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10,80 \\ 108\,\% \text{ de } x + 90\,\% \text{ de } y = 11,34 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 10,80 \\ 1,08x + 0,9y = 11,34 \end{array}\right\} \rightarrow x = 10,80 - y$$

$1,08(10,80 - y) + 0,9y = 11,34 \rightarrow 11,664 - 1,08y + 0,9y = 11,34 \rightarrow$

$\rightarrow 11,664 - 11,34 = 1,08y - 0,9y \rightarrow 0,324 = 0,18y \rightarrow y = \dfrac{0,324}{0,18} = 1,80$

$x = 10,80 - 1,80 = 9$

Solución: la calculadora costaba 9 €, y el cuaderno, 1,80 €.

40. En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ A	x	6	$6x$
CAFÉ B	y	8,50	$8{,}50y$
MEZCLA	20	7	140

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 6x + 8{,}5y &= 140 \end{aligned}\right\} \to x = 20 - y$$

$6(20 - y) + 8{,}5y = 140 \to 120 - 6y + 8{,}5y = 140 \to 2{,}5y = 20 \to y = 8$

$x = 20 - 8 = 12$

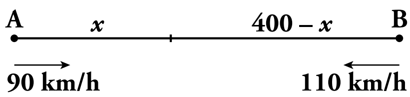
Necesitan 12 kg de café inferior y 8 kg de café superior.

41. Por la mezcla de 5 kg de pintura verde y 3 kg de pintura blanca he pagado 63 €. Calcula el precio de la pintura blanca y de la pintura verde sabiendo que si mezclase un kilogramo de cada una el coste de la mezcla sería 15 €.

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 63 \\ x + y &= 15 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{aligned} 5x + 3y &= 63 \\ -3x - 3y &= -45 \\ \hline 2x &= 18 \end{aligned} \to x = 9 \to y = 15 - 9 = 6$$

La pintura verde cuesta 9 € el kilogramo, y la blanca, 6 €.

42. La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?



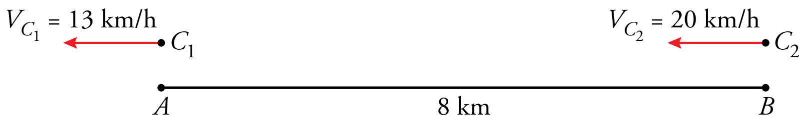
	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
A	x	90 km/h	t
B	$400 - x$	110 km/h	t

$v = \dfrac{s}{t}$

$$\left.\begin{aligned} 90 &= \frac{x}{t} \to x = 90t \\ 110 &= \frac{400 - x}{t} \to 400 - x = 110t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &400 - 90t = 110t \\ &400 = 200t \to t = 2 \end{aligned}$$

Se encontrarán al cabo de 2 h a $90 \cdot 2 = 180$ km de A.

43. **Dos pueblos, A y B, están en la misma carretera, a una distancia de 8 km. Un ciclista sale de A, alejándose de B, a una velocidad de 15 km/h. Veinte minutos más tarde, sale de B otro ciclista, a 20 km/h, con la intención de alcanzar al anterior. ¿Qué distancia habrá recorrido cada uno hasta el momento en que se produce el alcance?**



x = horas que tarda C_1 hasta que es alcanzado por C_2.

y = horas que tarda C_2 en alcanza a C_1.

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 1/3 \\ 15x + 8 = 20y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \ C_2 \text{ sale 20 min más tarde que } C_1 \\ \to \ C_2 \text{ recorre 8 km más que } C_1 \end{array}$$

$$15\left(y + \frac{1}{3}\right) + 8 = 20y \ \to \ 15y + 5 + 8 = 20y \ \to \ 13 = 5y \ \to \ y = \frac{13}{5} \text{ horas tarda } C_2$$

$$x = \frac{13}{5} + \frac{1}{3} = \frac{39 + 5}{15} = \frac{44}{15} \text{ horas tarda } C_1$$

El ciclista 1 recorre: $\frac{44}{15}$ h · 15 km/h = 44 km

El ciclista 2 recorre: $\frac{13}{5}$ h · 20 km/h = 52 km

44. **Un transportista va a una ciudad que está a 300 km de distancia. Al volver, su velocidad media ha sido superior en 10 km/h a la velocidad de ida, y ha tardado una hora menos. Calcula las velocidades y los tiempos empleados a la ida y a la vuelta.**

$$\left.\begin{array}{l} vt = 300 \\ (v + 10)(t - 1) = 300 \end{array}\right\} \ \to \ vt + 10t - v - 10 = 300$$

$$\left.\begin{array}{l} vt = 300 \\ 10t - v - 10 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (10t - 10)\,t = 300 \ \to \ 10t^2 - 10t - 300 = 0 \ \to \ t^2 - t - 30 = 0 \\ v = 10t - 10 \end{array}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \begin{cases} 6 \\ -5 \ \ \text{No vale.} \end{cases}$$

300 : 6 = 50; 300 : 5 = 60

A la ida va a 50 km/h y tarda 6 horas. A la vuelta va a 60 km/h y tarda 5 horas.

Página 117

45. Ejercicio resuelto.

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

46. La suma de las dos cifras de un número es 5. Si invertimos el orden de las cifras, el número es 9 unidades menor que el inicial. ¿De qué número se trata?

x = cifra de las unidades

y = cifra de las decenas

$$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ 10y+x+9=10x+y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\ \ y=5 \\ 9x-9y=9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow x=1+y$$

$1+y+y=5 \rightarrow 2y=4 \rightarrow y=2$

$x=1+2=3$

Solución: el número buscado es 23.

47. La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es ese número?

Número $\rightarrow \boxed{x}\,\boxed{y} \rightarrow y+10x$

Número inverso $\rightarrow \boxed{y}\,\boxed{x} \rightarrow x+10y$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ y+10x+18=x+10y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=8-y \\ -9y+9(8-y)+18=0 \rightarrow -18y=-90 \rightarrow y=5 \rightarrow x=3 \end{array}$$

El número es el 35.

48. La edad actual de Rosa es el cuadrado de la de su hija y dentro de 9 años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una?

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 9 AÑOS
ROSA	x	$x+9$
HIJA	y	$y+9$

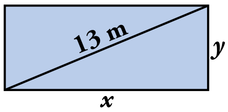
$$\left.\begin{array}{l} x=y^2 \\ x+9=3(y+9) \end{array}\right\}$$

$y^2+9=3y+27 \rightarrow y^2-3y-18=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{3\pm 9}{2}=\begin{cases} 6 \rightarrow x=6^2=36 \\ -3 \ \ \text{No es válida.} \end{cases}$$

Rosa tiene 36 años, y su hija, 6 años.

49. **Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 34 m, y su diagonal, 13 m.**



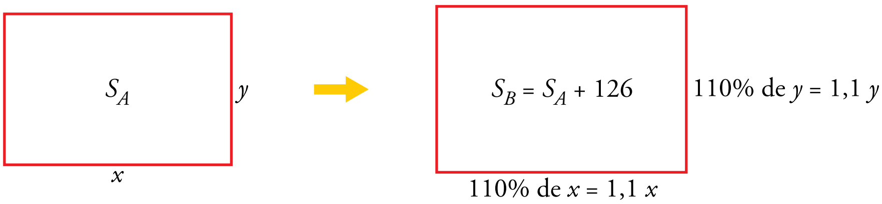
Aplica el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 34 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y = 17 \;\rightarrow\; y = 17 - x \\ x^2 + (17-x)^2 = 169 \end{array}$$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 17x + 60 = 0 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x = 12 \text{ m} \;\rightarrow\; y = 5 \text{ m} \\ x = 5 \text{ m} \;\rightarrow\; y = 12 \text{ m} \end{array}\right\}$$

Los lados del rectángulo miden 12 m y 5 m.

50. **Una pista rectangular de patinaje, con un perímetro de 100 metros, va a sufrir una reforma que le hará ganar un 10 % a lo ancho y otro 10 % a lo largo. Así aumentará su superficie en 126 m². ¿Cuáles eran las medidas primitivas de la pista?**



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 100 \\ 1{,}1x \cdot 1{,}1y = x \cdot y + 126 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 1{,}21xy - xy = 126 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 0{,}21xy = 126 \end{array}\right\} \rightarrow x = 50 - y$$

$$0{,}21(50 - y) \cdot y = 126 \;\rightarrow\; 10{,}5y - 0{,}21y^2 - 126 = 0 \;\rightarrow\; 21y^2 - 1\,050y + 12\,600 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; y^2 - 50y + 600 = 0$$

$$y = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 600}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{50 \pm 10}{2} = \begin{cases} \dfrac{50 + 10}{2} = 30 \\ \dfrac{50 - 10}{2} = 20 \end{cases}$$

Si $y = 30 \;\rightarrow\; x = 50 - 30 = 20$

Si $y = 20 \;\rightarrow\; x = 50 - 20 = 30$

Solución: las dimensiones iniciales de la pista son 30 m de largo y 20 m de ancho.

51. **Un tren de mercancías sale de A hacia B a la vez que uno de viajeros de B hacia A, y tardan 20 minutos en cruzarse. ¿Cuánto tarda cada uno en cubrir el recorrido completo, sabiendo que el de mercancías lo hace en 30 minutos más que el de viajeros?**

Para hacer su recorrido, el tren de mercancías tarda x minutos. Así, en un minuto recorre $\frac{1}{x}$ de la distancia total.

Por otro lado, el tren de pasajeros tarda y minutos en hacer ese mismo recorrido, en sentido contrario. Por tanto, en un minuto recorre $\frac{1}{y}$ de la distancia total.

Entre los dos tardan en hacer el recorrido 20 minutos: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$.

El tren de mercancías tarda 30 minutos más que el de pasajeros en hacer el recorrido: $x=y+30$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{20}\\ x&=y+30\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned}20y+20x&=xy\\ x&=y+30\end{aligned}\right\} \to 20y+20(y+30)=(y+30)y \to$$

$$\to 40y+600=y^2+30y \to y^2-10y-600=0$$

$$y=\frac{10\pm\sqrt{100+2\,400}}{2}=\frac{10\pm 50}{2}= \begin{cases} y_1=30 \\ y_2=-20 \quad \text{No vale.}\end{cases}$$

Si $y=30 \to x=30+30=60$

El tren de mercancías tarda 60 minutos, y el de pasajeros, 30 minutos.

Problemas "+"

52. **Un joyero tiene dos lingotes de oro, uno con un 80 % de pureza y otro con un 95 %. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kg con un 86 % de pureza?**

$$\left.\begin{aligned}0,8x+0,95y&=0,86\,(x+y)\\ x+\quad y&=5\end{aligned}\right\} \to x=5-y$$

$0,8(5-y)+0,95y=0,86(5-y+y) \to 4-0,8y+0,95y=4,3 \to 0,15y=0,3 \to y=2$

$x=3$

Debe fundir 3 kg de 80 % de pureza con 2 kg del lingote que tiene un 95 % de pureza.

53. **¿Cuántos litros de leche con un 10 % de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4 % de grasa para obtener 18 litros con un 6 % de grasa?**

$x \to$ litros de leche con un 10 % de grasa

$y \to$ litros de leche con un 4 % de grasa

$$\left.\begin{aligned}x+y&=18\\ 0,1x+0,04y&=0,06\,(x+y)\end{aligned}\right\} \; 0,04x=0,02y \to y=2x$$

$x+2x=18 \to 3x=18 \to x=6,\; y=12$

Hemos de mezclar 6 litros de leche de un 10 % de grasa con 12 litros de leche de un 4 % de grasa.

54. **La edad actual de una madre es el cuadrado de la que tendrá su hija dentro de dos años, momento en el que la edad de la hija será la sexta parte de la edad que tiene ahora la madre. Calcula la edad de ambas.**

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 2 AÑOS
MADRE	x	$x + 2$
HIJA	y	$y + 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = (y+2)^2 \\ y + 2 = \dfrac{1}{6}x \end{array}\right\} x = \left(\frac{1}{6}x\right)^2 \rightarrow \frac{1}{36}x^2 - x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{36}x - 1\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{36}x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{36}x = 1 \rightarrow x = 36 \rightarrow y = 4$$

La madre tiene 36 años, y su hija, 4 años.

Curiosidades matemáticas

Ecuaciones diofánticas

Las ecuaciones diofánticas se caracterizan por tener soluciones naturales (algunas veces, enteras). Se llaman así en honor a Diofanto de Alejandría, matemático del siglo III, considerado el primer algebrista.

Te proponemos dos problemas para resolver con *ecuaciones diofánticas*.

Son problemas abiertos que pueden tener varias soluciones, pero eso lo tienes que averiguar tú. Si hay varias, has de encontrarlas todas.

PROBLEMA 1

Tenemos un mueble del que se ha roto una pata de 4 cm de altura. Para equilibrarlo provisionalmente, disponemos de varios discos de madera, unos de 5 mm de grosor y otros de 3 mm. ¿Cuántos discos de cada clase usaremos?

4 cm = 40 mm

$x \rightarrow$ número de discos de 5 mm.

$y \rightarrow$ número de discos de 3 mm.

$5x + 3y = 40$

Como 40 es múltiplo de 5 y con los discos x siempre cubriremos un múltiplo de 5, necesitamos que $3y$ sea múltiplo de 5 y menor que 40.

Como también es múltiplo de 3:

$3y = 15 \rightarrow y = 5 \rightarrow 5x + 15 = 40 \rightarrow x = 5$

$3y = 30 \rightarrow y = 10 \rightarrow 5x + 30 = 40 \rightarrow x = 2$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 5;\ x_2 = 2,\ y_2 = 10$

PROBLEMA 2

En un test de 20 preguntas se consiguen 5 puntos por cada respuesta correcta, se pierden 3 por cada respuesta errónea, y otros 2 por cada pregunta sin contestar. ¿Qué tiene que ocurrir para obtener una calificación de 0 puntos? ¿Y para obtener 50?

$x \rightarrow$ número de aciertos

$y \rightarrow$ número de errores

$z \rightarrow$ número de preguntas sin contestar

Para obtener 0 puntos se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 5x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Para obtener 50 puntos necesitamos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 5x - 3y - 2z = 50 \end{array}\right\}$$