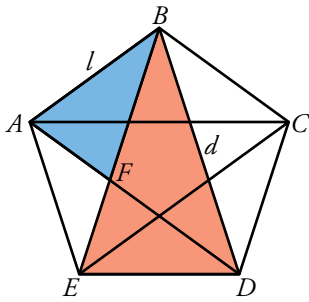


Resuelve

Página 29

El pentágono estrellado

Observa el pentágono estrellado que se muestra a continuación:



1. Demuestra que los triángulos ABF y EBD son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).

2. Si llamamos l al lado del pentágono y d a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación $\frac{d}{l}$ y comprueba que es el número áureo:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36^\circ$ en el triángulo ABF , y $\hat{B} = 36^\circ$ en el triángulo EBD . Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo \hat{A} en el triángulo ABF , y \hat{D} en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD ; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

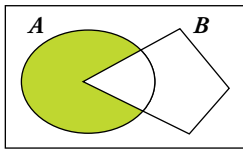
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$

1 Lenguaje matemático: conjuntos y símbolos

Página 31

1 ¿Verdadero o falso?



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B .

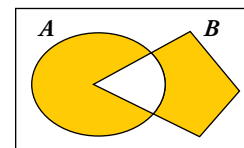
b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B , ya que B' es el complementario de B .

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A - B) \cup (B - A)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B , o está en B y no está en A .



d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B , pero no puede estar en los dos a la vez ($A \cap B$).

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B , o está en B y no está en A .

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\mathring{3}) \text{ y } x \in (\mathring{2})] \Leftrightarrow x \in (\mathring{6})$

(\mathring{n}) es el conjunto de los múltiplos de n .

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\mathring{3}) \cap (\mathring{2}) = (\mathring{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B , luego están en A y en B' .

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B .

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \subset B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A , es porque todos los elementos de A están en B , luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A .

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ y $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo $(0, 1)$ está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ pero $\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0,5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que -2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que -5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$.

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que -5 y menores que 7, están en el intervalo $(-5, 7)$ y además son enteros.

r) $(x \text{ es un número real pero no es racional}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 Números reales. La recta real

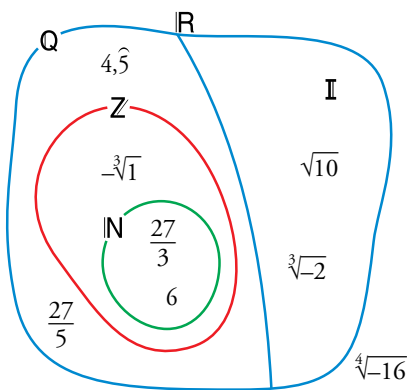
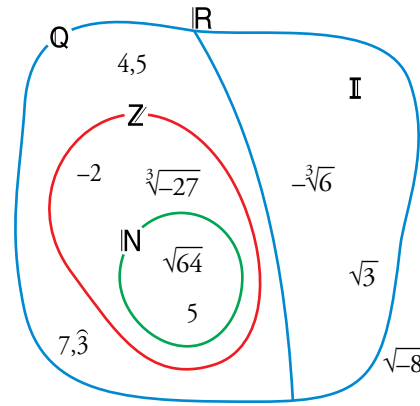
Página 32

Reflexiona y resuelve

Observa cómo se sitúan estos números en los conjuntos numéricos:

Ahora, en tu cuaderno, sitúa los siguientes números en un diagrama similar:

$-3\sqrt{1}$; $4,5$; 6 ; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-2}$; $27/5$; $27/3$



$$6, \frac{27}{3} \in \mathbb{N} \quad 6, \frac{27}{3}, -3\sqrt{1} \in \mathbb{Z} \quad 6; \frac{27}{3}; -3\sqrt{1}; 4,5; \frac{27}{5} \in \mathbb{Q}$$

$$6; \frac{27}{3}; -3\sqrt{1}; 4,5; \frac{27}{5}; \sqrt{10}; \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R} \quad \sqrt{10}; \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{I} \quad \sqrt[4]{-16} \text{ no es real}$$

Página 33

1 Representa los siguientes conjuntos:

- | | | | |
|----------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(-3, -1)$ | b) $[4, +\infty)$ | c) $(3, 9]$ | d) $(-\infty, 0)$ |
| e) $\{x / -2 \leq x < 5\}$ | f) $[-2, 5) \cup (5, 7]$ | g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ | h) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ |
-

2 Averigua y representa para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

- | | | |
|---------------------|------------------|------------------|
| a) $ x = 5$ | b) $ x \leq 5$ | c) $ x - 4 = 2$ |
| d) $ x - 4 \leq 2$ | e) $ x - 4 > 2$ | f) $ x + 4 > 5$ |

- | | |
|---|--|
| a) 5 y -5 | |
| b) $-5 \leq x \leq 5$; $[-5, 5]$ | |
| c) 6 y 2 | |
| d) $2 \leq x \leq 6$; $[2, 6]$ | |
| e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ | |
| f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$ | |

3 Radicales. Propiedades

Página 34

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$

b) $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[9]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común: $\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}$; $\sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3 Reduce a índice común.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651}$; $\sqrt[9]{132650}$

4 Simplifica.

a) $(\sqrt{\sqrt{k}})^8$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $(\sqrt[8]{k})^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 35

5 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$

f) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2} \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$$

6 Simplifica.

a) $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ c) $\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $15 \sqrt{\frac{x^3}{x^5}} = 15 \sqrt{\frac{1}{x^2}} = 15 \sqrt{x^{-2}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{ab}$

c) $\sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{bc^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{bc}}$

7 Reduce.

a) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\frac{3^4}{3^3}} = \sqrt{3}$ b) $\sqrt[6]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $10 \sqrt{\frac{2^8}{2^5}} = 10 \sqrt{2^3} = 10 \sqrt{8}$ d) $\sqrt[4]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8 Suma y simplifica.

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$ f) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:
 $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 0$

Página 36

9 Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$ f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$ g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$ j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$ f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10 Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

d) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$

d) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \frac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \frac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(2-1) + 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 Logaritmos. Propiedades

Página 39

1 Halla.

a) $\log_2 16$

b) $\log_2 0,25$

c) $\log_9 1$

d) $\log_{10} 0,1$

e) $\log_4 64$

f) $\log_7 49$

g) $\ln e^4$

h) $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0,04$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216} \right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\ln e^4 = 4$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

i) $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216} \right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de...

a) $\log_2 60$.

b) $\log_5 700$.

c) $\log_{10} 43\,000$.

d) $\log_{10} 0,084$.

e) $\log_9 60$.

f) $\ln e$.

g) $\log_{20} 450\,000$.

h) $\log_{5,4} 900$.

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5, \dots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4, \dots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \dots$

d) $10^{-2} = 0,01$; $10^{-1} = 0,1$; $0,01 < 0,084 < 0,1$

$-2 < \log_{10} 0,084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0,084 = -1, \dots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1, \dots$

f) $\ln e = 1$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4,0337$

$5,4^4 = 850,31$; $5,4^5 = 4\,591,7$

Como $5,4^4 = 850,31 < 900 < 4\,591,7 = 5,4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

3 Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

- a) $\log_2 1500$ b) $\log_5 200$ c) $\log_{100} 200$ d) $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

- a) $\frac{\log 1500}{\log 2} = 10,55; 2^{10,55} \approx 1500$ b) $\frac{\log 200}{\log 5} = 3,29; 5^{3,29} \approx 200$
 c) $\frac{\log 200}{\log 100} = 1,15; 100^{1,15} \approx 200$ d) $\frac{\log 40}{\log 100} = 0,80; 100^{0,80} \approx 40$

4 Calcula sabiendo que $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$.

- a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$ b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

5 Averigua la relación que hay entre x e y , sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

$$\ln y = 2x - \ln 5 \rightarrow \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$$

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$$

5 Expresión decimal de los números reales. Números aproximados

Página 41

1 ¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

$$\text{I. E.R.} < \frac{10000}{390000} = 2,5641 \cdot 10^{-2} = 0,025641 \rightarrow \text{E.R.} < 2,6\%$$

$$\text{II. E.R.} < \frac{1}{12} = 8,3333 \cdot 10^{-2} = 0,08333 \rightarrow \text{E.R.} < 8,3\%$$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m².

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 19 000 € al año.

$$\text{a) E.A.} < 0,05 \text{ m}^2; \text{ E.R.} < \frac{0,05}{96,4} = 5,1867 \cdot 10^{-4} = 0,00051867 \rightarrow \text{E.R.} < 0,05\%$$

b) E.A. < 0,5 millones de horas = 500 000 horas

$$\text{E.R.} < \frac{0,5}{37} < 0,014 \rightarrow 1,4\%$$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil, redondeando a los “miles de euros”), entonces:

$$\text{E.A.} < 0,5 \text{ miles de } \text{€} = 500 \text{ €} \quad \text{E.R.} < \frac{0,5}{19} < 0,027 \rightarrow 2,7\%$$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

$$\text{E.A.} < 0,5 \text{ €} \quad \text{E.R.} < \frac{0,5}{19000} < 0,000027 \rightarrow 0,0027\%$$

Página 42

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

$$\text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$$

$$\text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} &= ((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})) \cdot 5 \cdot 10^{11} = \\ &= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} &= 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} = \\ &= 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

4 Opera con la calculadora:

$$\text{a) } (3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$$

$$\text{b) } 8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{a) } (3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$$

$$\text{b) } 8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$$

7 Fórmula del binomio de Newton

Página 45

1 Desarrolla:

a) $(x + 3)^5$

b) $(2x - x^2)^4$

c) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^6$

$$\begin{aligned} \text{a) } (x + 3)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 3 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4}x \cdot 3^4 + \binom{5}{5}3^5 = \\ &= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2x - x^2)^4 &= \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot x^2 + \binom{4}{2}(2x)^2 \cdot (x^2)^2 - \binom{4}{3}2x \cdot (x^2)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^4 = \\ &= x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^6 &= \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^5\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \\ &+ \binom{6}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^6 = \\ &= \frac{15}{4x^2} + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{x^4} + \frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{64}x^6 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{x}\right)^7$$

Obtenemos el término $k + 1$ de la expresión $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{x}\right)^7$:

$$\binom{7}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k$$

El grado de x en este término es $2(7 - k) - k$, que tiene que ser igual a 5:

$$2(7 - k) - k = 5 \Rightarrow k = 3$$

El término de grado 5 es $\binom{7}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\left(-\frac{3}{x}\right)^3 = -\frac{945}{16}x^5$.

El coeficiente pedido es $-\frac{945}{16}$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 46

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú. ¿Para qué valores de x se verifica $|3x - 7| < 5$?

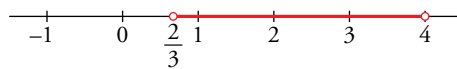
$$|3x - 7| < 5$$

Seguimos el razonamiento del apartado a) del ejercicio 1 de esta página:

$$3x - 7 < 5 \rightarrow x < 4$$

$$3x - 7 > -5; 3x > -2 \rightarrow x > \frac{2}{3}$$

Los valores que verifican la expresión son los del intervalo $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$.



3. Operaciones con radicales

Hazlo tú. Simplifica:

a) $\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{5}{6}\sqrt{2}$ b) $\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

a) Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \sqrt{2^5} + \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 5^2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \frac{17}{3}\sqrt{2}$$

b) Reducimos los radicales a índice común y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[6]{8^3 a^3 b^3} \cdot \sqrt[6]{(a^2)^2 b^2} = 2\sqrt{2} \sqrt[6]{a^3 b^3} \sqrt[6]{a^4 b^2} = 2\sqrt{2} \sqrt[6]{a^7 b^5} = 2\sqrt{2} a \sqrt[6]{ab^5}$$

Página 47

4. Racionalización de denominadores

Hazlo tú. Racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ b) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

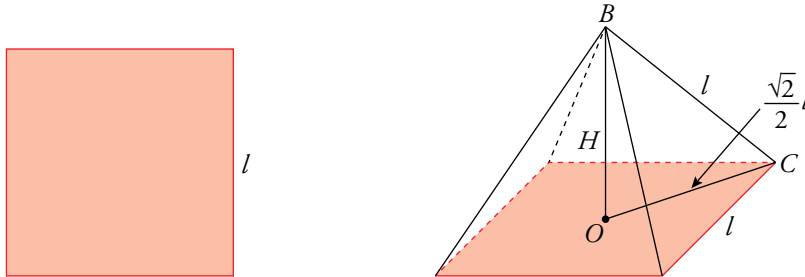
$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5} - 3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5} + 3} = \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)} = \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{4 \cdot 5 - 9} = 2\sqrt{5} - 3$$

5. Problemas con radicales

Hazlo tú. El volumen de una pirámide cuadrangular regular, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, es $\frac{256}{3}\sqrt{2}$. Halla la longitud de su arista.



La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} l^2 \cdot H = \frac{256}{3} \sqrt{2}$$

La distancia \overline{OC} es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos la altura H y el lado \overline{OC} .

$$\text{Por ser la arista igual al lado de la base, } H^2 = l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2 = \frac{1}{2} l^2$$

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{1}{6} \sqrt{2} l^3$$

$$\text{Por tanto, } \frac{1}{6} \sqrt{2} l^3 = \frac{256}{3} \sqrt{2} \Rightarrow l^3 = 256 \cdot 2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt[3]{512} = 8$$

Página 48

7. Logaritmos. Propiedades

Hazlo tú. Calcula x en estos casos:

a) $\log_7 x = -2$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

c) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

a) $\log_7 x = -2$

Usamos la definición de logaritmo: 2 es el exponente que tiene que tener la base 7, para que nos dé x :

$$x = 7^{-2}; x = \frac{1}{49}$$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $\log_a m^n = n \log_a m$.

$$(x-1) \ln 3 = 5 \rightarrow x-1 = \frac{5}{\ln 3} \rightarrow x = \frac{5}{\ln 3} + 1 \rightarrow x = 5,5512$$

c) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$\log x^2 - \log 4 = \log 3^2$$

$$\log \frac{x^2}{4} = \log 9; \frac{x^2}{4} = 9$$

Soluciones: $x = -6, x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

8. Logaritmos. Demostración de una propiedad

Hazlo tú. Demuestra que: $\log_a (P/Q) = \log_a P - \log_a Q$

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$$

Llamamos $\log_a P = x$; $\log_a Q = y$

Expresamos P y Q como potencias usando la definición de logaritmo:

$$P = a^x; \quad Q = a^y$$

Demostración:

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a P - \log_a Q$$

9. Factoriales y números combinatorios

Hazlo tú. Calcula m en esta expresión: $\binom{m}{2} = 3!$

$$\binom{m}{2} = 3!$$

$$\frac{m(m-1)}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\frac{m^2 - m}{2} = 6; \quad m^2 - m = 12; \quad m^2 - m - 12 = 0; \quad m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} \begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$$

Como m tiene que ser positivo, $m = 4$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 49

1. Simplificación de radicales

Simplificar esta expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 \cdot 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

2. Valor de un exponente

Calcular x para que se cumpla la igualdad:

$$3^{x-1} = 173$$

$$\log_3 3^{x-1} = \log_3 173; (x-1)\log_3 3 = \log_3 173$$

$$x-1 = \log_3 173 = 4,69; x = 4,69 + 1 = 5,69$$

3. Extracción de factores de un radical

Extraer fuera del radical los factores que sea posible.

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd}$$

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd} = \sqrt{cd(4a^2 + 8ab + 4b^2)} = \sqrt{cd(2a + 2b)^2} = (2a + 2b)\sqrt{cd} = 2(a + b)\sqrt{cd}$$

4. Propiedades de los logaritmos

Averiguar la relación que existe entre M , x e y si sabemos que:

$$\ln M = \frac{1}{4}(2 \ln x + 3 \ln y - 5 \ln 2)$$

$$\ln M = \frac{1}{4}(2 \ln x + 3 \ln y - 5 \ln 2) = \frac{1}{4}(\ln x^2 + \ln y^3 - \ln 2^5) = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 \cdot y^3}{2^5} = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

5. Cotas de error absoluto y relativo

Acotar el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro, ϕ .

$$\text{E.A.} < 0,005$$

$$\text{E.R.} < \frac{0,005}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 3,0902 \cdot 10^{-3} = 0,003$$

Corresponde a un error relativo menor que 0,3%.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 50

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} , pertenecen:

$$5; -7; \frac{5}{4}; \sqrt{\frac{18}{2}}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; 4,\widehat{7}; \frac{\pi}{2}$$

$$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N} \quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z} \quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q} \quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

2 ¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.

a) 3,181818... b) $\sqrt{1,\widehat{7}}$ c) $\sqrt{8}$

d) 1,020020002... e) $-4,0333...$ f) $\sqrt[3]{81}$

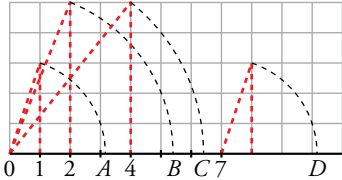
g) 1,3999... h) 2π

a) $3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$ b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional. d) 1,020020002... Irracional.

e) $-4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$ f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$ h) 2π Irracional.

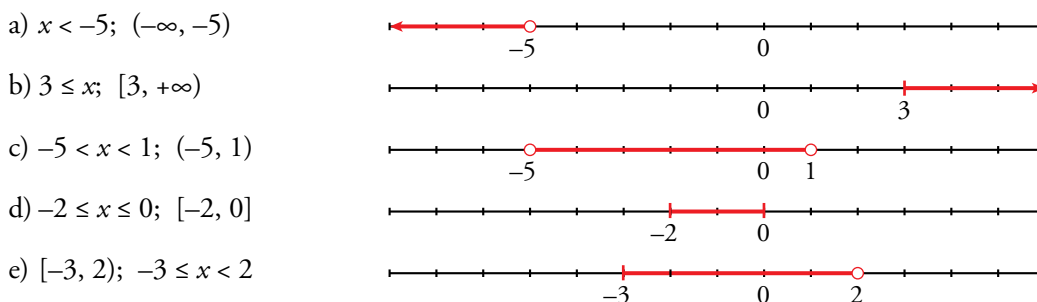
3  ¿Qué números irracionales representan los puntos: A, B, C y D? Justifica la respuesta.

$$A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad B = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \quad C = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \quad D = 7 + \sqrt{1^2 + 3^2} = 7 + \sqrt{10}$$

Intervalos y valor absoluto

4 Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.

- a) x es menor que -5 . b) 3 es menor o igual que x .
c) x está comprendido entre -5 y 1. d) x está entre -2 y 0, ambos incluidos.
e) x es mayor o igual que -3 y menor que 2.



5 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos o semirrectas:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|----------------------|
| a) $[-2, 7]$ | b) $[13, +\infty)$ | c) $(-\infty, 0)$ |
| d) $(-3, 0]$ | e) $[3/2, 6)$ | f) $(0, +\infty)$ |
| a) $-2 \leq x \leq 7$ | b) $x \geq 13$ | c) $x < 0$ |
| d) $-3 < x \leq 0$ | e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$ | f) $0 < x < +\infty$ |

6 Expresa como un único intervalo.

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ | b) $[2, +\infty) \cap (0, 10)$ |
| a) $[0, 2]$ | b) $[2, 10)$ |

7 Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:

- | | | |
|---------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ x < 7$ | b) $ x \geq 5$ | c) $ 2x < 8$ |
| d) $ x - 1 \leq 6$ | e) $ x + 2 > 9$ | f) $ x - 5 \geq 1$ |
| a) $(-7, 7)$ | b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$ | c) $(-4, 4)$ |
| d) $[-5, 7]$ | e) $(-11, 7)$ | f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$ |

8 Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.

- | | | |
|------------------|------------------|---------------------------|
| a) $\sqrt{x-4}$ | b) $\sqrt{2x+1}$ | c) $\sqrt{-x}$ |
| d) $\sqrt{3-2x}$ | e) $\sqrt{-x-1}$ | f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$ |

- a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4; [4, +\infty)$
 b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}; \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
 c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0; (-\infty, 0]$
 d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}; \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$
 e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x; (-\infty, -1]$
 f) $1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2; [-2, +\infty)$

9 Expresa como un único intervalo.

- | | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ | b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$ | c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ | d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$ |
| a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ | b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$ | c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ | d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$ |

10 Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) Centro -1 y radio 2 | b) Centro 2 y radio $1/3$ |
| a) $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$ | b) $\left(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ |

11 Describe como entornos los siguientes intervalos:

- | | | | |
|--------------|-----------------|------------------|-----------------|
| a) $(-1, 2)$ | b) $(1,3; 2,9)$ | c) $(-2,2; 0,2)$ | d) $(-4; -2,8)$ |
|--------------|-----------------|------------------|-----------------|

- a) $C = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}; R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow$ Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.
 b) $C = \frac{1,3+2,9}{2} = 2,1; R = 2,9 - 2,1 = 0,8 \rightarrow$ Entorno de centro $2,1$ y radio $0,8$.
 c) $C = \frac{-2,2+0,2}{2} = -1; R = 0,2 - (-1) = 1,2 \rightarrow$ Entorno de centro -1 y radio $1,2$.
 d) $C = \frac{-4+(-2,8)}{2} = -3,4; r = -2,8 - (-3,4) = 0,6 \rightarrow$ Entorno de centro $-3,4$ y radio $0,6$.

■ Radicales

12 Introduce los factores dentro de cada raíz.

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| a) $2\sqrt[3]{3}$ | b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ | c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$ |
| d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ | e) $2\sqrt[4]{4}$ | f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$ |
| a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$ | b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$ | |
| c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$ | d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ | |
| e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$ | f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$ | |

13 Sacas de la raíz el factor que puedas.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\sqrt[3]{16}$ | b) $4\sqrt{8}$ | c) $\sqrt{1000}$ |
| d) $\sqrt[3]{8a^5}$ | e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ | f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$ |
| g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ | h) $\sqrt{4a^2 + 4}$ | i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$ |
| a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$ | b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ | c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$ |
| d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$ | e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$ | f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$ |
| g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$ | h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$ | i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$ |

14 Simplifica los siguientes radicales:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\sqrt[3]{24}$ | b) $\sqrt[6]{27}$ | c) $\sqrt[3]{-108}$ |
| d) $12\sqrt[12]{64y^3}$ | e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ | f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$ |
| g) $\sqrt[6]{0,027}$ | h) $\sqrt[8]{0,0016}$ | i) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$ |
| a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$ | b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ | c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$ |
| d) $12\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = 4\sqrt[4]{2^2 \cdot y} = 4\sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$ | e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ | g) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3} \cdot 3^3} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$ |
| f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$ | i) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{2^4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ | |
| h) $\sqrt[8]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4} \cdot 2^4} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\frac{2}{10}}$ | | |

15 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.

- | | |
|--|---|
| a) $\sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ | b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$ |
| c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$ | d) $\sqrt[4]{20}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$ |
| a) $12\sqrt[12]{5^3}, 12\sqrt[12]{3^4}, 12\sqrt[12]{2^6}, 12\sqrt[12]{125}, 12\sqrt[12]{81}, 12\sqrt[12]{64} \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$ | |
| b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16} \rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$ | |
| c) $20\sqrt[20]{7776}, 20\sqrt[20]{10000} \rightarrow \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$ | |
| d) $12\sqrt[12]{20^3}, 12\sqrt[12]{9^4}, 12\sqrt[12]{100^2}$; tenemos $12\sqrt[12]{10000}, 12\sqrt[12]{6561}, 12\sqrt[12]{8000} \rightarrow \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{20}$ | |

16 Realiza la operación y simplifica, si es posible.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$

e) $(\sqrt[6]{32})^2$

f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 2} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $(\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[2]{2^5} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

17 Efectúa y simplifica, si es posible.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a}$

c) $(\sqrt[6]{32})^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}})^3 = (\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}})^3 = \sqrt[2]{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt[3]{\sqrt{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

18 Expresa con una única raíz.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$

b) $\sqrt[3]{2^4\sqrt{8}}$

c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $20\sqrt{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = 20\sqrt{a^{21}} = a^{20}\sqrt{a}$

Página 51

19 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6} = \frac{(\sqrt{2^3 \cdot 3^2} - \sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{12}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

20 Calcula y simplifica.

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \frac{21}{5} \cdot 5\sqrt[3]{2} = -15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2 \cdot 3^3} + 3\sqrt{2^3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7^2} = -3\sqrt{2 \cdot 3} + 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3} - 5\sqrt{2 \cdot 3} + 7\sqrt{2 \cdot 3} = 5\sqrt{6}$

21 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{72}$ b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$ c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} =$
 $= \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} = \left(1 - \frac{12}{5} + \frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4 a} - 2\sqrt[3]{3a^4} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \frac{7}{3}3\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{21}{3} - 2a - \frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a} = (4 - 2a)\sqrt[3]{3a}$

22 Efectúa y simplifica.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$ b) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$ c) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$ d) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $5 - 6 = -1$

c) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

d) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

23 Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{1}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$ e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} - 2}{3 \cdot 2} = \frac{2(\sqrt{6} - 1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6} - 1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2(3 - 5)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} = 3(\sqrt{5} + 2) = 3\sqrt{5} + 6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})} = \frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{5 - 9 \cdot 2} = \frac{65\sqrt{2} + 78\sqrt{5}}{-13} = -5\sqrt{2} - 6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} = \frac{9\sqrt{2 \cdot 3^2} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

24 Efectúa y simplifica.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \frac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}$

Logaritmos

25 Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 1024$

b) $\log 0,001$

c) $\log_2 \frac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$

e) $\log_3 \sqrt{3}$

f) $\log_2 \sqrt{8}$

g) $\log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$

h) $\log_{\pi} 1$

i) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $\log_2 2^{10} = 10$

b) $\log 10^{-3} = -3$

c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$

e) $\log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$

f) $\log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}$

h) 0

i) $\ln e^{-1/3} = -\frac{1}{3}$

26 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

c) $\log_x \frac{1}{4} = 2$

d) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$

e) $\log_x 0,04 = -2$

f) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

a) $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$

b) $x^{-2} = \frac{1}{9} \rightarrow x = 3$

c) $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$

e) $x^{-2} = 0,04 \rightarrow x = 5$

f) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$

27 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $\log 3^x = 2$

b) $\log x^2 = -2$

c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$

e) $\log_7 3x = 0,5$

f) $3^{2+x} = 172$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$

b) $2\log x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{10}$

c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$

e) $7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

f) $2 + x = \log_3 172 \rightarrow x = \log_3 172 - 2$

28 Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.

a) $\log \sqrt{148}$

b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$

c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42,9$

e) $\log_5 1,95$

f) $\log_2 0,034$

a) 1,085

b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11}) \approx 26,16 \rightarrow e^{26,161} \approx 2,3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5}) \approx -9,54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$

d) $3,42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42,9$

e) $0,41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1,95$

f) $-4,88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0,034$

29 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $\log a^2 \sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log \sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2\log a + \frac{3}{5}\log b - 2 - 4\log c$

b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3} e^5}{\sqrt{y}} = \ln \sqrt[4]{x^3} e^5 - \ln \sqrt{y} = \ln \sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln \sqrt{y} = \frac{3}{4} \ln x + 5 - \frac{1}{2} \ln y$

30 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$

b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$

d) $\log x = 3 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2; \ln x = \ln \frac{5^3}{10^2}; x = \frac{5^3}{5^2 \cdot 2^2}; x = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2}; \log x = \log 2^3 - \log 5; \log x = \log \frac{8}{5}; x = \frac{8}{5}$

31 Si $\log k = x$, escribe en función de x .

a) $\log 100k$

b) $\log \frac{k}{1000}$

c) $\log k^3$

d) $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \frac{1}{k}$

f) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$

b) $\log k - \log 1000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$

d) $\frac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \frac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$

f) \sqrt{x}

32 Averigua, en cada caso, la relación entre x , y , z .

a) $\log z = 2 \log x - \log y$

b) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2} \log y$

c) $\log z = 1 - \frac{1}{2} (\log x - \log y)$

d) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

a) $\log z = \log x^2 - \log y; \log z = \log \frac{x^2}{y}; z = \frac{x^2}{y}$

b) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y}; \log z = \log \frac{100}{x\sqrt{y}}; z = \frac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2} \log \frac{x}{y}; \log z = \log 10 - \log \sqrt{\frac{x}{y}}; \log z = \log \frac{10}{\sqrt{\frac{x}{y}}}; z = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2; \ln z = \ln \frac{e \cdot y^2}{x^2}; z = \frac{e \cdot y^2}{x^2}$

■ Notación científica y errores

33 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$

b) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \frac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

34 Expresa en notación científica y calcula: $\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

Página 52

35 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.

a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$

a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

36 Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D &= \left(\frac{3,24 \cdot 10^6}{5,1 \cdot 10^{-5}} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = \left(\frac{3,24}{5,1} 10^{11} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = \\ &= \left(\frac{3,24}{5,1} + 3,8\right) 10^{11} \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = 4,4353 \cdot 6,2 \cdot 10^5 = 2,7499 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Como queremos tres cifras significativas, la solución que damos es: $S = 2,75 \cdot 10^6$

E.A. $< 5\,000$

E.R. $< \frac{5\,000}{2,74 \cdot 10^6} = 1,8248 \cdot 10^{-3} = 0,0018248$, que corresponde a un 0,18 %.

Factoriales y números combinatorios

37 Calcula.

a) $\frac{8!}{5!}$ b) $\frac{10!}{9!}$ c) $\frac{5!+4!}{12}$

a) $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ b) 10

c) $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(5+1)}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} =$
 $= \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{1}{3326400}$

38 Calcula.

a) $\binom{8}{4}$ b) $\binom{12}{7}$ c) $\binom{37}{35}$ d) $\binom{84}{1}$

a) $\frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ b) $\frac{12!}{7!5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$

c) $\frac{37!}{35!2!} = \frac{37 \cdot 36}{2} = 666$ d) $\frac{84!}{83!1!} = \frac{84 \cdot 83!}{83!1!} = 84$

39 Aplica las propiedades de los números combinatorios para obtener n .

a) $\binom{6}{n+2} = 1$ b) $\binom{8}{n-3} = 8$ c) $\binom{9}{2} = \binom{9}{n}$

d) $\binom{13}{n-1} = \binom{13}{n+2}$ e) $\binom{10}{n} + \binom{10}{n+1} = \binom{11}{7}$ f) $\binom{n}{7} = \binom{n}{9}$

a) $n + 2 = 6 \rightarrow n = 4; n + 2 = 0 \rightarrow n = -2$ b) $n - 3 = 1 \rightarrow n = 4; n - 3 = 7 \rightarrow n = 10$

c) $n = 2$ o $n = 9 - 2 = 7$ d) $n - 1 + n + 2 = 13; 2n + 1 = 13 \rightarrow n = 6$

e) $n = 6$ f) $n = 7 + 9 = 16$

Binomio de Newton

40 Desarrolla.

a) $(a^2 - 3b)^7$ b) $\left(\frac{a}{3} + 2b\right)^5$

a) $\binom{7}{0}(a^2)^7 + \binom{7}{1}(a^2)^6(-3b) + \binom{7}{2}(a^2)^5(-3b)^2 + \binom{7}{3}(a^2)^4(-3b)^3 +$
 $+ \binom{7}{4}(a^2)^3(-3b)^4 + \binom{7}{5}(a^2)^2(-3b)^5 + \binom{7}{6}(a^2)(-3b)^6 + \binom{7}{7}(-3b)^7 =$
 $= a^{14} - 21a^{12}b + 189a^{10}b^2 - 945a^8b^3 + 2835a^6b^4 - 5103a^4b^5 + 5103a^2b^6 - 2187b^7$

b) $\binom{5}{0}\left(\frac{a}{3}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{a}{3}\right)^4 2b + \binom{5}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^3 (2b)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^2 (2b)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{a}{3}\right)(2b)^4 + \binom{5}{5}(2b)^5 =$
 $= \frac{1}{243}a^5 + \frac{10}{81}a^4b + \frac{40}{27}a^3b^2 + \frac{80}{9}a^2b^3 + \frac{80}{3}ab^4 + 32b^5$

41 Halla el noveno término del desarrollo de $(x^2 - y^2)^{12}$.

Término noveno: $\binom{12}{8}(x^2)^4(-y^2)^8 = 495x^8y^{16}$

42 Halla el término central del desarrollo de $\left(\sqrt{a} + \frac{b}{2}\right)^6$.

Término central: $\binom{6}{3}(\sqrt{a})^3\left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{20}{8}a^{3/2}b^3 = \frac{5}{2}a^{3/2}b^3$

43 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^7$.

El término $k + 1$ del desarrollo es: $\binom{7}{k} \left(\frac{2}{x}\right)^{7-k} (-x^3)^k$

La potencia de x en este término es: $x^{-(7-k) + 3k}$

Como queremos que el exponente de x sea 5: $-(7 - k) + 3k = 5$; $k = 4$

$\binom{7}{3} \left(\frac{2}{x}\right)^4 (-x^3)^3 = -560x^5$. El coeficiente de x^5 es -560 .

44 Calcula el quinto término del desarrollo de $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^8$.

Término quinto: $\binom{8}{4} \left(\frac{1}{x^2}\right)^4 (-2x)^4 = \frac{1120}{x^4}$

45 Calcula el coeficiente del sexto término del desarrollo de $\left(\frac{x}{2} + 3x^2\right)^8$.

Término sexto: $\binom{8}{5} \left(\frac{x}{2}\right)^3 (3x^2)^5 = 1701x^{13}$

El coeficiente sexto es 1701.

Para resolver

46 El volumen de un cubo es $6\sqrt{6} \text{ cm}^3$. Halla:

a) Su arista.

b) La diagonal de una cara.

c) La diagonal del cubo.

Da, en cada caso, el valor exacto.

a) $V_{Cubo} = a^3 = 6\sqrt{6} \rightarrow a = \sqrt[3]{6\sqrt{6}}$; $a = \sqrt[3]{\sqrt{6^2} \cdot 6} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6} \text{ cm}$

b) $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

c) $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{6}\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$

47 La superficie de un tetraedro es $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Calcula su arista y su volumen. Da el valor exacto.

Un tetraedro tiene 4 caras iguales. La superficie de cada cara es: $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

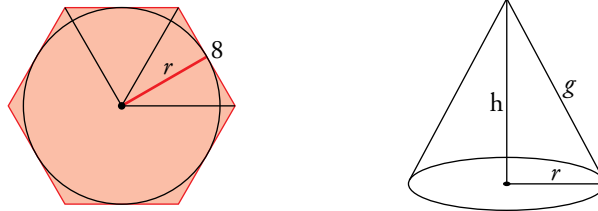
Cada cara es un triángulo equilátero, en el que $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$

$$A_{Cara} = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \text{ cm}$$

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a = \frac{9}{8}a \text{ cm}^3 = \frac{27}{8} \text{ cm}^3$$

- 48** En un prisma hexagonal de lado 8 dm, y altura 12 dm, se inscribe un cono. Calcula su área lateral con una cifra decimal y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.

Vamos a calcular el radio de la base del cono inscrito en el hexágono regular.



$$r = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ dm}$$

La altura del cono coincide con la del prisma hexagonal, $h = 12 \text{ dm}$

$$\text{La generatriz del cono es } g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = 8\sqrt{3} \text{ dm}$$

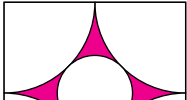
La superficie lateral del cono es:

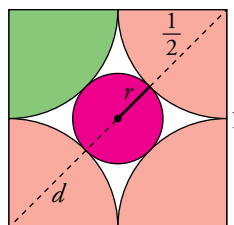
$$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96\pi = 301,59 \text{ dm}^2$$

$$A_{Lateral} = 301,6 \text{ dm}^2$$

$$\text{E.A.} < 0,05 \text{ dm}^2$$

$$\text{E.R.} < \frac{0,05}{301,59} = 1,6579 \cdot 10^{-4} = 0,00016579, \text{ que equivale a un } 0,02\%.$$

- 49**  Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el área en decímetros cuadrados con tres cifras significativas y acota el error cometido.



El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\text{Calculamos el radio: } r = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$$

El área roja es el área del círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$$A_{Roja} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

$$\begin{aligned} \text{Área pedida} &= A_{Cuadrado} - 4A_{Verde} - A_{Roja} = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi - \pi + 1 = 7,9849 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 7,98 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{E.A.} < 0,005 \text{ dm}^2$$

$$\text{E.R.} < \frac{0,005}{7,9849 \cdot 10^{-2}} = 6,2618 \cdot 10^{-2} = 0,062618, \text{ que equivale al } 6,26\%.$$

- 50** Un hilo de cobre, cuya resistividad es $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, mide 2 m de largo y tiene un diámetro de 0,2 mm. Calcula su resistencia aplicando la fórmula $R = \rho l/S$, donde l es la longitud del hilo y S el área de la sección del mismo.

$$S = \pi \cdot (0,2)^2 = 0,12566$$

$$\text{La resistencia es: } R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{0,12566} = 2,7057 \cdot 10^{-7} \Omega$$

- 51** Si conocemos la longitud de onda de una radiación luminosa, podemos calcular su frecuencia (número de vibraciones por minuto) mediante la fórmula $\nu = c/\lambda$ donde c es la velocidad de la luz y λ su longitud de onda. Calcula la frecuencia de una radiación roja ($\lambda = 7000 \text{ \AA}$; $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Acota el error cometido.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{7000 \cdot 10^{-10}} = 4,2857 \cdot 10^{14} \text{ vibraciones por segundo}$$

$$4,2857 \cdot 10^{14} \cdot 60 = 2,5714 \cdot 10^{16} \text{ vibraciones por minuto}$$

$$\text{E.A.} < 5 \cdot 10^{11} \text{ vibraciones por minuto}$$

$$\text{E.R.} < \frac{5 \cdot 10^{11}}{2,5714 \cdot 10^{16}} = 1,9445 \cdot 10^{-5} = 0,000019445, \text{ que equivale al } 0,002 \%$$

- 52** La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0°C , t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800°C , ¿cuál es su longitud a 200°C ? (En el plomo $k = 3 \cdot 10^{-5}$).

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800°C :

$$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right), \text{ luego } l_0 = \frac{125}{128}$$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200°C :

$$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0,98242 \text{ m}$$

- 53** La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.

Un año luz es aproximadamente $9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 1,5609 \cdot 10^{18} \text{ km}$

$$\text{E.A.} < 5 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

$$\text{E.R.} < \frac{5 \cdot 10^{13}}{1,5609 \cdot 10^{18}} = 3,2033 \cdot 10^{-5} = 0,000032, \text{ que equivale al } 0,0032 \%$$

La masa del Sol es, aproximadamente, $1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1,9891 \cdot 10^{30} = 5,2711 \cdot 10^{32} \text{ kg}$

$$\text{E.A.} < 5 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

$$\text{E.R.} < \frac{5 \cdot 10^{27}}{5,2711 \cdot 10^{32}} = 9,4857 \cdot 10^{-6} = 0,0000094857, \text{ que equivale al } 0,00095 \%$$

- 54** Calcula k en cada caso.

$$\text{a) } \frac{12(k-2)!}{k!} = 1 \quad \text{b) } \binom{k}{k-2} = 10 \quad \text{c) } 3\binom{k}{4} = 5\binom{k}{2} \quad \text{d) } \frac{(k+6)!}{(k+4)!} = 72$$

$$\text{a) } \frac{12(k-2)!}{k(k-1)(k-2)!} = 1; \frac{12}{k(k-1)} = 1; 12 = k^2 - k; k = 4, k = -3$$

Como k no puede ser negativo, $k = 4$.

$$\text{b) } \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} = 10; \frac{k(k-1)}{2} = 10; k^2 - k = 20; k = 5, k = -4$$

Como k no puede ser negativo, $k = 5$.

c) $k \geq 4$

$$3 \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}{4!(k-4)!} = 5 \frac{k(k-1)(k-2)!}{2!(k-2)!} \rightarrow 3 \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} = 5 \frac{k(k-1)}{2!} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} - 5 \frac{k(k-1)}{2} = 0$$

Simplificamos dividiendo entre $k(k-1)$, que nunca vale cero puesto que $k \geq 4$:

$$3 \frac{(k-2)(k-3)}{24} - \frac{5}{2} = 0 \rightarrow \frac{(k-2)(k-3) - 20}{8} = 0; \frac{k^2 - 5k - 14}{8} = 0 \begin{cases} k=7 \\ k=-2 \end{cases}$$

Como tiene que ser $k \geq 4$, la solución es $k = 7$.

$$d) \frac{(k+6)(k+5)(k+4)!}{(k+4)!} = 72 \rightarrow (k+6)(k+5) = 72 \begin{cases} k=3 \\ k=-14 \end{cases}$$

Como $k > 0$, la solución es $k = 3$.

Página 53

Cuestiones teóricas

55 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

- a) Hay números irracionales que son enteros.
- b) Todo número irracional es real.
- c) Todos los números decimales son racionales.
- d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) F b) V c) F d) V

56 Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) x^{-2} es negativo si lo es x .
 - b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x .
 - c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.
- a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x .
 b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.
 c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

57 ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

- a) $\log m + \log n = \log (m + n)$ b) $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$
 - c) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$ d) $\log x^2 = \log x + \log x$
 - e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$
- a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$
 b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\frac{m}{n} \right) \neq \frac{\log m}{\log n}$
 c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.
 d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$
 e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

Para profundizar

58 Halla el valor de esta expresión: $(8^{n+1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n-1})^3$

$$\frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3} = \frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3} = \frac{8^{2n} \cdot 9^2}{4^{3n-3} \cdot 3^3} = \frac{2^{3 \cdot 2n} \cdot 3^4}{2^{2(3n-3)} \cdot 3^3} = 2^{6n-6n+6} \cdot 3 = 2^6 \cdot 3 = 192$$

59 Determina el valor de p y q para que se verifique: $2^p \cdot 5^q = \frac{1}{125000}$

$$2^p \cdot 5^q = \frac{1}{125000} = \frac{1}{2^3 5^6} = 2^{-3} 5^{-6}$$

Luego $p = -3$ y $q = -6$.

60 ¿Cuál es el número de cifras de $4^{16} \cdot 5^{25}$?

$$4^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^{32-25} \cdot 10^{25} = 2^7 \cdot 10^{25}$$

$2^7 = 128$, luego tiene $3 + 25 = 28$ cifras.

61 Demuestra que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Desarrollamos $(1 + 1)^n$ por el binomio de Newton:

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Por otra parte, $(1 + 1)^n = 2^n$, luego $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

62 Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:

a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$

b) $|-a| = -|a|$

c) $|a + b| = |a| + |b|$

d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

a) Verdadera (siempre que $b > 0$).

b) Falsa; pues $|-a| \geq 0$ y $-|a| \leq 0$. (Solo sería cierta para $a = 0$).

c) Falsa. Solo es cierta cuando a y b tienen el mismo signo.

En general, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

d) Verdadera.

63 Si se resta una unidad al cuadrado de un número impar, ¿se obtiene siempre un múltiplo de 8?

$$(2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x = 4x(x + 1)$$

Esta expresión es múltiplo de 4 por ser 4 factor común.

Además, o x es par, o $x + 1$ es par, luego uno de los factores que aparecen en la expresión es múltiplo de 2.

El producto será, por tanto, múltiplo de $4 \cdot 2 = 8$.

64 Si $x > 0$, $y > 0$, demuestra que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{x+y}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} > \frac{1}{x+y}$$

Multiplicamos las dos fracciones por $x+y$ que es positivo por ser $x > 0$ e $y > 0$.

Tenemos que probar que $\frac{(x+y)^2}{xy} > 1$

$$\frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy} = 2 + \frac{x^2 + y^2}{xy} > 2 > 1$$

Luego es cierta la desigualdad.

Autoevaluación

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} pertenecen:

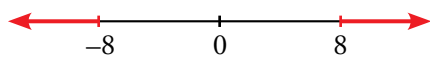
$$-\frac{58}{45}; \frac{51}{17}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[3]{-8}; \sqrt[5]{2^3}; 1,0\overline{7}$$

$$\mathbb{N}: \frac{51}{17} \quad \mathbb{Z}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8} \quad \mathbb{Q}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\overline{7} \quad \mathbb{R}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\overline{7}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[5]{2^3}$$

2 Expresa en forma de intervalo y haz la representación en cada caso.

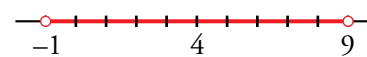
a) $|x| \geq 8$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $|x - 4| < 5$

b) $(-1, 9)$



3 Simplifica.

a) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$

b) $a\sqrt{a^{-1}} : \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

a) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

b) $a \cdot a^{-1/2} : a^{-2/3} = a^{1/2+2/3} = a^{7/6}$

4 Dos esferas metálicas de 1000 kg cada una se atraen con una fuerza de $8,35 \cdot 10^{-9}$ N. ¿A qué distancia se encuentran sus centros? Aplica la Ley de Gravitación Universal:

$$F = G \frac{M m}{r^2} \text{ donde } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$$

Acota el error cometido.

Sustituimos en la fórmula: $8,35 \cdot 10^{-9} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$$8,35 \cdot 10^{-9} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 1000}{r^2}$$

$$8,35 \cdot 10^{-9} r^2 = 6,67 \cdot 10^{-5}; \quad r^2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-5}}{8,35 \cdot 10^{-9}} = 7988;$$

$$r = \sqrt{7988} = 89,376 \text{ m}$$

Sus centros se encuentran aproximadamente a 89,376 m.

La cota del error absoluto es E.A. < 0,0005 m

$$\text{E.R.} < \frac{0,0005}{89,376} = 5,5943 \cdot 10^{-6} = 0,0000055943, \text{ que corresponde al } 0,00056\%.$$

5 Calcula m en esta expresión: $\frac{m!}{(m-1)!} = \binom{m}{2}$

$$\frac{m!}{(m-1)!} = \binom{m}{2} \rightarrow m \geq 2$$

$$\frac{m(m-1)!}{(m-1)!} = \frac{m(m-1)(m-2)!}{(m-2)!};$$

$$m = \frac{m(m-1)}{2}; \quad 2m = m^2 - m \begin{cases} m=3 \\ m=0 \end{cases}$$

Como $m \geq 2$, la solución es $m = 3$.

6 Efectúa, racionalizando previamente.

$$\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4 + \sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{18}}{6} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$$

$$\frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} - \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6}{6}$$

7 Aplica la definición de logaritmo y obtén x.

a) $\log_3 x = -\frac{1}{4}$ b) $\ln \frac{x}{3} = -1$ c) $\log_x 512 = 3$

a) $x = 3^{-(1/4)} \rightarrow x = 0,76$

b) $\frac{x}{3} = e^{-1} \rightarrow x = 3 \cdot e^{-1} = 1,10$

c) $x^3 = 512 \rightarrow x = 8$

8 Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A.

$$\log A = 2 \log 3 + 0,5 \log 4 - 3 \log 2$$

$$\log A = \log \frac{3^2 \cdot 4^{0,5}}{2^3} \rightarrow A = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$$

9 Calcula x en cada caso.

a) $2,5^x = 0,0087$

b) $e^{-x} = 425$

a) $x \log 2,5 = \log 0,0087 \rightarrow x = \frac{\log 0,0087}{\log 2,5} = -5,18$

b) $-x \ln e = \ln 425 \rightarrow x = -\ln 425 = -6,05$

10 En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4 - \sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7 + 2\sqrt{5}$ cm y la altura, $4(1 + \sqrt{5})$ cm. Comprueba que el perímetro del trapecio es $10(2 + \sqrt{5})$ cm.

$$x = (7 + 2\sqrt{5}) - (4 - \sqrt{5}) = 3 + 3\sqrt{5} = 3(1 + \sqrt{5})$$

$$l^2 = [4(1 + \sqrt{5})]^2 + [3(1 + \sqrt{5})]^2 = 16(1 + \sqrt{5})^2 + 9(1 + \sqrt{5})^2 = 25(1 + \sqrt{5})^2$$

$$l = \sqrt{25(1 + \sqrt{5})^2} = 5(1 + \sqrt{5}) \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 4 - \sqrt{5} + 7 + 2\sqrt{5} + 4(1 + \sqrt{5}) + 5(1 + \sqrt{5}) = \\ &= 4 - \sqrt{5} + 7 + 2\sqrt{5} + 4 + 4\sqrt{5} + 5 + 5\sqrt{5} = \\ &= 20 + 10\sqrt{5} = 10(2 + \sqrt{5}) \text{ cm} \end{aligned}$$

