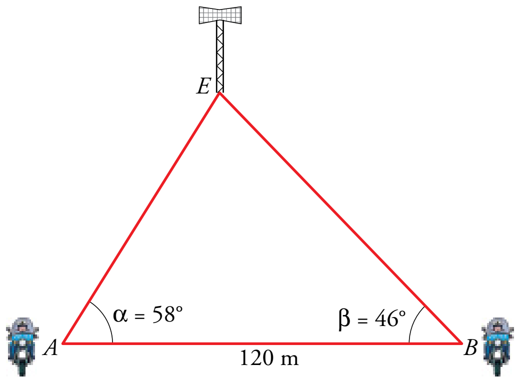
# Resuelve

## Página 105

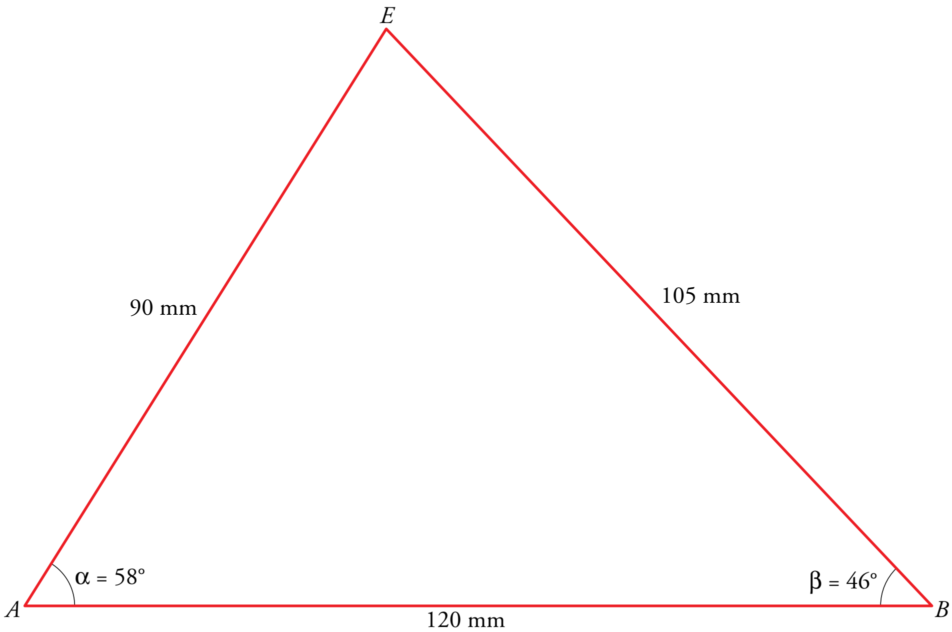
### Localización de una emisora clandestina

**Vamos a aplicar la técnica de la triangulación para resolver el siguiente problema:**

> **Una emisora de radio clandestina *E* se sintoniza desde dos controles policiales, *A* y *B*. En cada uno de ellos se detecta la dirección en la que se encuentra, no la distancia. Por tanto, se conocen los ángulos $\alpha = 58°$ y $\beta = 46°$, así como la distancia $AB = 120$ m. Para localizar sobre el terreno la emisora *E* hay que calcular la distancia $\overline{AE}$ o la distancia $\overline{BE}$.**




**Resuelve el problema planteado realizando un dibujo en tu cuaderno a escala 1:1 000 (1 m = 1 mm). Sobre el papel, mide los lados *AE* y *BE* e interpreta el resultado en la realidad.**




La emisora se encuentra a 90 m del control *A* y a 105 m del control *B*.

# 1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo (0° a 90°)

**Página 106**

**Hazlo tú. Sabiendo que *sen* β = 0,39 calcula *cos* β y *tg* β.**

$$cos\ \beta = \sqrt{1 - sen^2\ \beta} = \sqrt{1-(0,39)^2} = 0,92$$

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{0,39}{0,92} = 0,42$$

**Hazlo tú. Conociendo *tg* β = 1,28 calcula *sen* β y *cos* β.**

$s = sen\ \beta$; $c = cos\ \beta$

$$\begin{cases} s^2 + c^2 = 1 \;\rightarrow\; (1,28c)^2 + c^2 = 1 \;\rightarrow\; 2,6384c^2 = 1 \;\rightarrow\; c = 0,62 \\ \dfrac{s}{c} = 1,28 \;\rightarrow\; s = 1,28c \end{cases}$$

$cos\ \beta = 0,62$

$sen\ \beta = 1,28 \cdot 0,62 = 0,79$

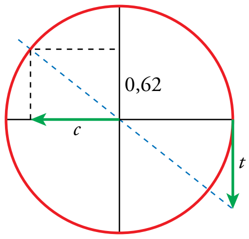
# 2 Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera (0° a 360°)

## Página 107

**1** **Sabiendo que el ángulo $\alpha$ está en el segundo cuadrante (90° < $\alpha$ < 180°) y *sen* $\alpha$ = 0,62; calcula *cos* $\alpha$ y *tg* $\alpha$.**

$$cos\ \alpha = -\sqrt{1-0,62^2} = -0,78$$

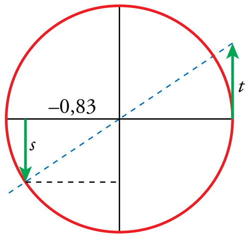
$$tg\ \alpha = \frac{0,62}{-0,78} = -0,79$$



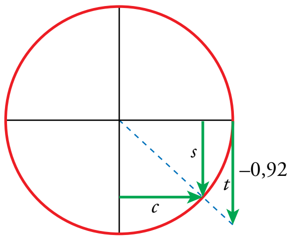

**2** **Sabiendo que el ángulo $\alpha$ está en el tercer cuadrante (180° < $\alpha$ < 270°) y *cos* $\alpha$ = –0,83; calcula *sen* $\alpha$ y *tg* $\alpha$.**

$$sen\ \alpha = -\sqrt{1-(0,83)^2} = -0,56$$

$$tg\ \alpha = \frac{-0,56}{-0,83} = 0,67$$




**3** **Sabiendo que el ángulo $\alpha$ está en el cuarto cuadrante (270° < $\alpha$ < 360°) y *tg* $\alpha$ = –0,92; calcula *sen* $\alpha$ y *cos* $\alpha$.**




$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s}{c} = -0,92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\}$$ El sistema tiene dos soluciones: $\left\langle \begin{array}{l} sen\ \alpha = -0,68;\ cos\ \alpha = 0,74 \\ s = 0,68;\ c = -0,74 \end{array}\right.$

Teniendo en cuenta dónde está el ángulo, la solución es la primera: *sen* $\alpha$ = –0,68; *cos* $\alpha$ = 0,74.

**4** **Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360°.**

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | | | | |
| cos | 1 | $\sqrt{3}/2$ | | | 0 | | | | |
| tg | 0 | $\sqrt{3}/3$ | | | – | | | | |

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |
| cos | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 | –1/2 | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | –1 |
| tg | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | –1 | $-\sqrt{3}/3$ | 0 |

| | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen | –1/2 | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | –1 | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | –1/2 | 0 |
| cos | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | –1/2 | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| tg | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | –1 | $-\sqrt{3}/3$ | 0 |

# 3 Ángulos fuera del intervalo 0° a 360°

## Página 108

**1 Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo [0°, 360°) y al intervalo (–180°, 180°]:**

| | | |
|---|---|---|
| **a) 396°** | **b) 492°** | **c) 645°** |
| **d) 3 895°** | **e) 7 612°** | **f) 1 980°** |

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \le 180°$$

a) 396° = 396° – 360° = 36°

b) 492° = 492° – 360° = 132°

c) 645° = 645° – 360° = 285° = 285° – 360° = –75°

d) 3 895° = 3 895° – 10 · 360° = 295° = 295° – 360° = –65°

e) 7 612° = 7 612° – 21 · 360° = 52°

f) 1 980° = 1 980° – 5 · 360° = 180°

Cuando hacemos, por ejemplo, 7 612° = 7 612° – 21 · 360°, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división 7 612 ÷ 360 = 21.44... . Es el cociente entero.

**2 Determina el valor de estas razones trigonométricas:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a) *sen* 13 290°** | **b) *cos* (–1 680°)** | **c) *tg* 3 825°** | **d) *cos* 4 995°** |
| **e) *sen* (–1 710°)** | **f) *tg* 3 630°** | **g) *cos* (–36 000°)** | **h) *sen* (–330°)** |

a) 13 290° = 360° · 36 + 330°

$$sen\ 13\,290° = sen\ 330° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$$

b) –1 680° = –360° · 4 – 240°

$$cos\ (-1\,680°) = cos\ (-240°) = cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$$

c) 3 825° = 360° · 10 + 225°

$$tg\ 3\,825° = tg\ 225° = tg\ 45° = 1$$

d) 4 995° = 360° · 13 + 315°

$$cos\ 4\,995° = cos\ 315° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) –1 710° = –360° · 4 – 270°

$$sen\ (-1\,710°) = sen\ (-270°) = sen\ (90°) = 1$$

f) 3 630° = 360° · 10 + 30°

$$tg\ 3\,630° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g) –36 000° = –360° · 100

$$cos\ (-36\,000°) = cos\ 0° = 1$$

h) $sen\ (-330°) = sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$

# 4 Trigonometría con calculadora

## Página 109

**Hazlo tú. Sabiendo que $sen\ \beta = 0{,}87$ y $90° < \beta < 180°$, calcula $cos\ \beta$ y $tg\ \beta$.**

$cos\ \beta = -0{,}493$

$tg\ \beta = -1{,}765$

**1** **A partir de los datos que se ofrecen en cada apartado relativos al ángulo $\alpha$, halla, con ayuda de la calculadora, las razones trigonométricas de $\alpha$.**

**a)** $sen\ \alpha = 0{,}573$; $\alpha > 90°$

**b)** $cos\ \alpha = 0{,}309$; $sen\ \alpha < 0$

**c)** $tg\ \alpha = 1{,}327$; $180° < \alpha < 270°$

**d)** $cos\ \alpha = -0{,}819$; $tg\ \alpha < 0$

a) $cos\ \alpha = -0{,}82$

$tg\ \alpha = -0{,}699$

b) $sen\ \alpha = -0{,}951$

$tg\ \alpha = -3{,}078$

c) $sen\ \alpha = -0{,}799$

$cos\ \alpha = -0{,}602$

d) $sen\ \alpha = 0{,}574$

$tg\ \alpha = -0{,}7$

# 5 Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

## Página 111

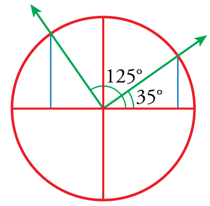
**1 Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:**

$$\textbf{\textit{sen}}\ \mathbf{35° = 0{,}57;}\quad \textbf{\textit{cos}}\ \mathbf{35° = 0{,}82;}\quad \textbf{\textit{tg}}\ \mathbf{35° = 0{,}70}$$

- 55° = 90° – 35° → 55° y 35° son complementarios.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 55° = cos\ 35° = 0{,}82 \\ cos\ 55° = sen\ 55° = 0{,}57 \end{array}\right\} \ tg\ 55° = \frac{sen\ 55°}{cos\ 55°} = \frac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}43 \quad \left(\text{También } tg\ 55° = \frac{1}{tg\ 35°} = \frac{1}{0{,}70} \approx 1{,}43\right)$$

- 125° = 90° + 35°

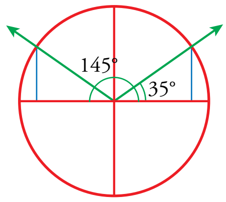



$sen\ 125° = cos\ 35° = 0{,}82$

$cos\ 125° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$tg\ 125° = \dfrac{-1}{tg\ 35°} = \dfrac{-1}{0{,}70} = -1{,}43$

- 145° = 180° – 35° → 145° y 35° son suplementarios.

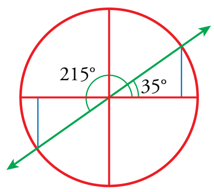



$sen\ 145° = sen\ 35° = 0{,}57$

$cos\ 145° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$tg\ 145° = -tg\ 35° = -0{,}70$

- 215° = 180° + 35°

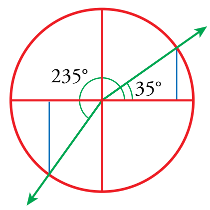



$sen\ 215° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$cos\ 215° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$tg\ 215° = tg\ 35° = 0{,}70$

- 235° = 270° – 35°

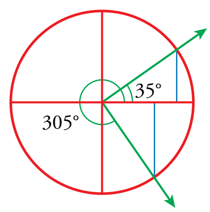



$sen\ 235° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$cos\ 235° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$tg\ 235° = \dfrac{sen\ 235°}{cos\ 235°} = \dfrac{-cos\ 35°}{-sen\ 35°} = \dfrac{1}{tg\ 35°} = \dfrac{1}{0{,}70} = 1{,}43$

- 305° = 270° + 35°

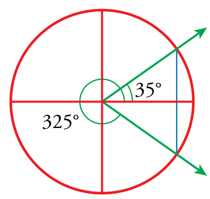



$sen\ 305° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$cos\ 305° = sen\ 35° = 0{,}57$

$tg\ 305° = \dfrac{sen\ 305°}{cos\ 305°} = \dfrac{-cos\ 35°}{sen\ 35°} = -\dfrac{1}{tg\ 35°} = -1{,}43$

- 325° = 360° – 35° (= –35°)




$sen\ 325° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$cos\ 325° = cos\ 35° = 0{,}82$

$tg\ 325° = \dfrac{sen\ 325°}{cos\ 325°} = \dfrac{-sen\ 35°}{cos\ 35°} = -tg\ 35° = -0{,}70$

**2** **Averigua las razones trigonométricas de 358°, 156° y 342°, utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90°.**

- 358° = 360° – 2°

  $sen\ 358° = -sen\ 2° = -0{,}0349$

  $cos\ 358° = cos\ 2° = 0{,}9994$

  $tg\ 358° \overset{(*)}{=} -tg\ 2° = -0{,}03492$

  (*) $tg\ 358° = \dfrac{sen\ 358°}{cos\ 358°} = \dfrac{-sen\ 2°}{cos\ 2°} = -tg\ 2°$

- 156° = 180° – 24°

  $sen\ 156° = sen\ 24° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -cos\ 24° = -0{,}9135$

  $tg\ 156° = -tg\ 24° = -0{,}4452$

  OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

  156° = 90° + 66°

  $sen\ 156° = cos\ 66° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -sen\ 66° = -0{,}9135$

  $tg\ 156° = \dfrac{-1}{tg\ 66°} = \dfrac{-1}{2{,}2460} = -0{,}4452$

- 342° = 360° – 18°

  $sen\ 342° = -sen\ 18° = -0{,}3090$

  $cos\ 342° = cos\ 18° = 0{,}9511$

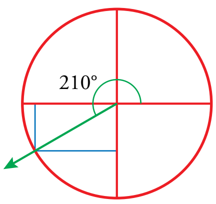
  $tg\ 342° = -tg\ 18° = -0{,}3249$

**3** **Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:**

**a)** $sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2},\ tg\ \alpha > 0$ **b)** $cos\ \alpha = \dfrac{3}{4},\ \alpha > 90°$ **c)** $tg\ \alpha = -1,\ cos\ \alpha < 0$

**d)** $tg\ \alpha = 2,\ cos\ \alpha < 0$ **e)** $sen\ \alpha = -1$ **f)** $cos\ \alpha = 0,\ sen\ \alpha > 0$

a)

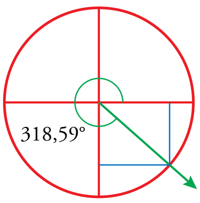



$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \to cos\ \alpha < 0 \to \alpha \in$ 3.er cuadrante

$cos\ 210° \approx -0{,}86$

$tg\ 210° \approx 0{,}58$

b)

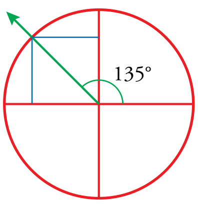



$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90° \end{array}\right\} \to \alpha \in$ 4.° cuadrante

$sen\ 318{,}59° \approx -0{,}66$

$tg\ 318{,}59° \approx -0{,}88$

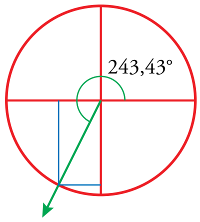
c)




$\left.\begin{array}{l} tg\ \beta = -1 < 0 \\ cos\ \beta < 0 \end{array}\right\} \to sen\ \beta > 0 \to \beta \in$ 2.° cuadrante

$sen\ 135° \approx 0{,}7$

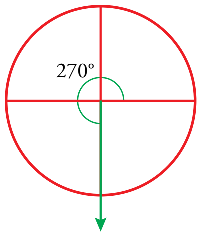
$cos\ 135° \approx -0{,}7$

d) 


$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 2 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er} \text{ cuadrante}$$

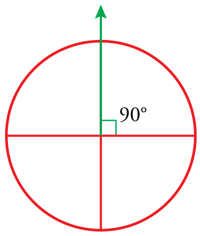
$sen\ 243,43° \approx -0,9$

$cos\ 243,43° \approx -0,45$

e) 


$cos\ 270° = cos\ 90° = 0$

$tg\ 270°$ no existe

f) 


$sen\ 90° = 1$

$tg\ 90°$ no existe

# 6 Resolución de triángulos rectángulos

## Página 112

**Hazlo tú. Los catetos de un triángulo rectángulo son $a = 47$ cm y $b = 62$ cm. Halla la hipotenusa y los ángulos.**

Por el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{47^2 + 62^2} = 77,8$ cm

$tan\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{47}{62} \rightarrow \hat{A} = 37°\ 9'\ 52''$

$\hat{B} = 90º - \hat{A} = 90° - 37°\ 14'\ 5'' = 52°\ 50'\ 8''$

**Hazlo tú. En un triángulo rectángulo conocemos $\hat{B} = 62°$ y $b = 152$ m. Halla los demás elementos.**

$sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{152}{sen\,62°} = 172,15\,\text{cm}$

$tg\,\hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{tg\,\widehat{B}} = \frac{152}{tg\,62°} = 80,82\,\text{cm}$

$\hat{A} = 90° - 62° = 28°$

**Hazlo tú. Conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y el ángulo $\hat{A} = 23°$ de un triángulo rectángulo. Calcula $b$.**

$cos\,\hat{A} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot cos\,\hat{A} = 72 \cdot cos\,23° = 66,28$ cm

## Página 113

**1 Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por $ABC$, siendo $C$ el ángulo recto.**

**a) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula $a$.**

**b) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula $b$.**

**c) Datos: $a = 250$ m, $b = 308$ m. Calcula $c$ y $\hat{A}$.**

**d) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula $b$.**

**e) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula $c$.**

a) $cos\,\hat{B} = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\,cos\,\hat{B} = 17,43$ cm

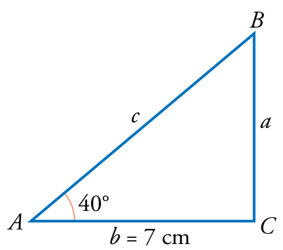
b) $sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\,sen\,\hat{B} = 26,84$ cm

c) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396,69$ m; $tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} = 0,81 \rightarrow \hat{A} = 39°\ 3'\ 57''$

d) $tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{tg\,\widehat{A}} = 56,01$ cm

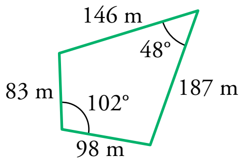
e) $sen\,\hat{A} = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} = 66,05$ cm

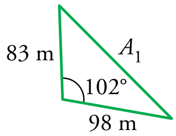
**2 Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40°. ¿Cuánto mide el poste?**




$tg\,40° = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7\,tg\,40° = 5,87$ m

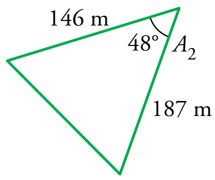
**3** **Halla el área del siguiente cuadrilátero. Sugerencia: pártelo en dos triángulos.**




$A_1 = \frac{1}{2} 98 \cdot 83 \; sen \; 102° = 3\,978,13 \text{ m}^2$

$A_2 = \frac{1}{2} 187 \cdot 146 \; sen \; 48° = 10\,144,67 \text{ m}^2$




El área es la suma de $A_1$ y $A_2$: $14\,122,80 \text{ m}^2$

# 7 Estrategia de la altura para resolver triángulos oblicuángulos

## Página 115

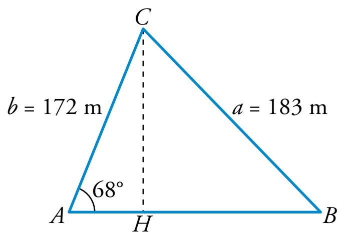
**1** **En un triángulo *ABC* conocemos $\hat{A} = 68°$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado *c*.**

$\overline{AH} = 172 \; cos \; 68° = 64{,}43$ m

$\overline{CH} = 172 \; sen \; 68° = 159{,}48$ m

$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89{,}75$ m

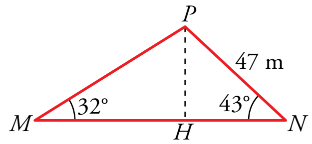
$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64{,}43 \text{ m} + 89{,}75 \text{ m} = 154{,}18$ m



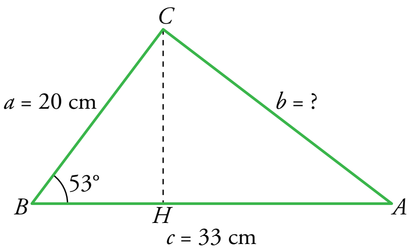

**2** **En un triángulo *MNP* conocemos $\hat{M} = 32°$, $\hat{N} = 43°$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.**

$sen \; 43° = \dfrac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \; sen \; 43° = 32{,}05$ m

$sen \; 32° = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \dfrac{\overline{PH}}{sen \; 32°} = \dfrac{32{,}05}{sen \; 32°} = 60{,}49$ m




**3** **En un triángulo *ABC* conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53°$. Calcula la longitud del lado *b*.**



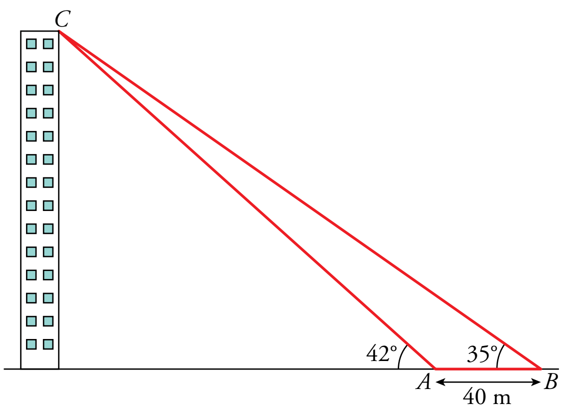

$\overline{BH} = a \; cos \; 53° = 12{,}04$ cm

$\overline{CH} = a \; sen \; 53° = 15{,}97$ cm

$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20{,}96$ cm

$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26{,}35$ cm

**4** **Observa el gráfico de la derecha. Estamos en *A*, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?**




$$\left.\begin{array}{l} tg \; 42° = \dfrac{\text{h}}{d} \rightarrow \text{h} = d \; tg \; 42° \\ tg \; 35° = \dfrac{\text{h}}{d + 40} \rightarrow \text{h} = (d + 40) \; tg \; 35° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow d \; tg \; 42° = (d + 40) tg \; 35° \rightarrow d = \frac{40 \; tg \; 35°}{tg \; 42° - tg \; 35°} = 139{,}90 \text{ m}$$

$\text{h} = d \; tg \; 42° = 125{,}97$ m

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

# 8 Dos importantes teoremas para resolver triángulos cualesquiera

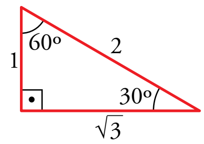
## Página 116

**1 ¿Verdadero o falso?**

**a) El teorema de los senos confirma que en un triángulo, "a mayor lado se opone mayor ángulo".**

**b) Este triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero.**

**Dividimos el seno de cada ángulo entre el lado opuesto:**




- $\dfrac{\textit{sen}\ 60°}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\textit{sen}\ 90°}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\textit{sen}\ 30°}{1} = \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}$

**Con estas igualdades se comprueba que se cumple el teorema de los senos.**

a) Verdadero.

Como la razón entre el lado y el seno del ángulo opuesto es constante, cuanto mayor es el lado, mayor es el seno del ángulo opuesto y, por tanto, mayor es el ángulo opuesto (al tratarse de ángulos de un triángulo).

b) Verdadero.

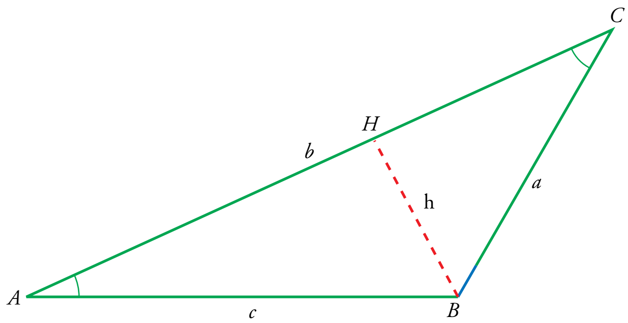
Con estas igualdades se comprueba el teorema de los senos en el caso particular de un triángulo equilátero. Sin embargo, el teorema es mucho más general porque se pueda aplicar a triángulos cualesquiera.

**2 Demuestra detalladamente, basándote en la demostración del teorema de los senos, la siguiente relación:**

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice *B*. Así, los triángulos obtenidos *AHB* y *CHB* son rectángulos.




Por tanto, tenemos

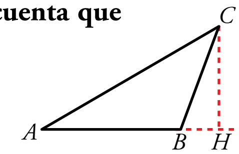
$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c\ sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \hat{C}$$

$$c\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{C}$$

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

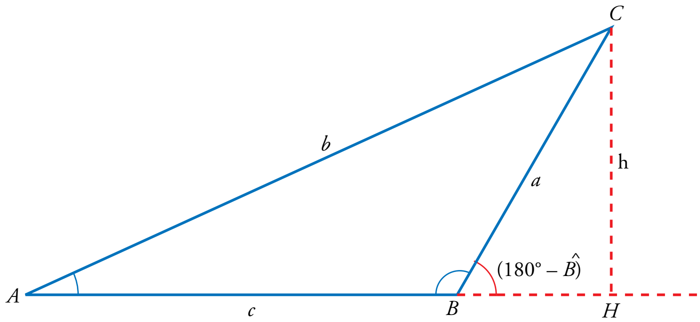
**3** **Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso. Ten en cuenta que $sen\ (180° - \hat{B}) = sen\ \hat{B}$.**




$sen\ \hat{A} = \dfrac{h}{b} \rightarrow h = b\ sen\ \hat{A}$

$sen\ \hat{B} = sen\ (180° - \hat{B}) = \dfrac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \hat{B}$

$b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B} \rightarrow \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$




## Página 117

**Hazlo tú. Halla $b$ y $c$ conociendo $a = 56$ m, $\hat{B} = 52°$ y $\hat{C} = 112°$.**

$\hat{A} = 180° - 52° - 112° = 26°$

Ahora usamos el teorema de los senos.

$\dfrac{56}{sen\ 26°} = \dfrac{b}{sen\ 52°} \rightarrow b = \dfrac{56 \cdot sen\ 52°}{sen\ 26°} = 100,66$ m

$\dfrac{56}{sen\ 26°} = \dfrac{c}{sen\ 112°} \rightarrow c = \dfrac{56 \cdot sen\ 112°}{sen\ 26°} = 118,44$ m

**Hazlo tú. Calcula $\hat{A}$ conociendo $a = 6$ cm, $b = 4$ cm y $\hat{B} = 30°$.**

Por el teorema de los senos:

$$\frac{6}{sen\ \hat{A}} = \frac{4}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{6 \cdot sen\ 30°}{4} = 0,75 \rightarrow \hat{A}_1 = 48°\ 35'\ 25'' \quad \hat{A}_2 = 131°\ 24'\ 35''$$

En este caso ambas soluciones son posibles porque $\hat{A} + \hat{B} < 180°$.

Por tanto, tenemos dos posibles triángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo.

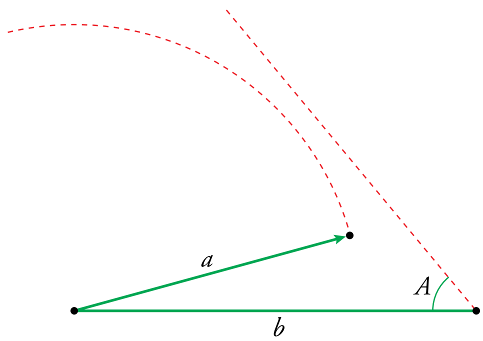
**4** **¿Verdadero o falso?**

**a) Si nos dan dos lados de un triángulo, $a$ y $b$, y el ángulo opuesto a uno de ellos, $\hat{A}$, y deseamos hallar el ángulo $\hat{B}$, con el teorema de los senos seguro que llegaremos a una solución.**

**b) Si nos dan dos lados y un ángulo de un triángulo y deseamos hallar otro lado, el teorema de los senos seguro que nos permite llegar a una solución.**

a) Falso.

Si el lado $a$ no es suficientemente grande, el problema no tendrá solución como muestra el siguiente dibujo:




b) Falso.

Si nos dan el ángulo comprendido entre los dos lados, no podemos plantear el problema usando el teorema de los senos.

**5** **En un triángulo $ABC$, conocemos $a = 4$ cm y $\hat{B} = 30°$. Halla $\hat{A}$ en los siguientes casos:**

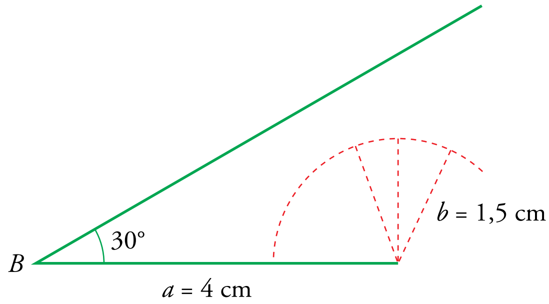
**a) $b = 1,5$ cm** **b) $b = 2$ cm** **c) $b = 3$ cm** **d) $b = 4$ cm**

a) $b = 1,5$ cm

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \to \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{1,5}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,\hat{3}$$

¡Imposible, pues $sen\,\hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

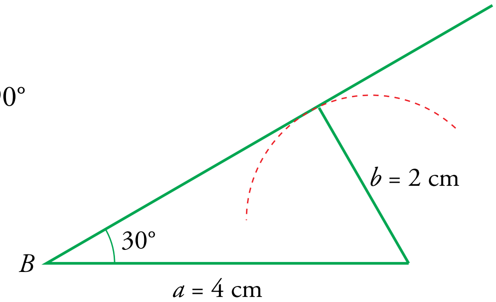
No tiene solución. Con esta medida, $b = 1,5$ cm, el lado $b$ nunca podría tocar al lado $c$.




b) $b = 2$ cm

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \to \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{2}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \to \hat{A} = 90°$$

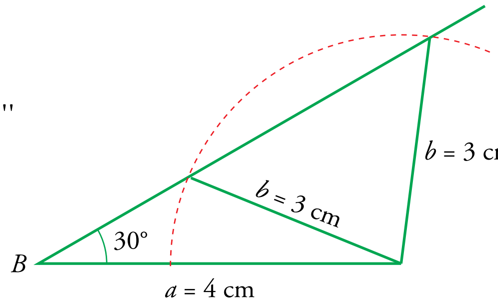
Se obtiene una única solución.




c) $b = 3$ cm

$$\frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{2}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,\hat{6} \to \begin{cases} \hat{A}_1 = 41°\ 48'\ 37,1'' \\ \hat{A}_2 = 138°\ 11'\ 22,9'' \end{cases}$$

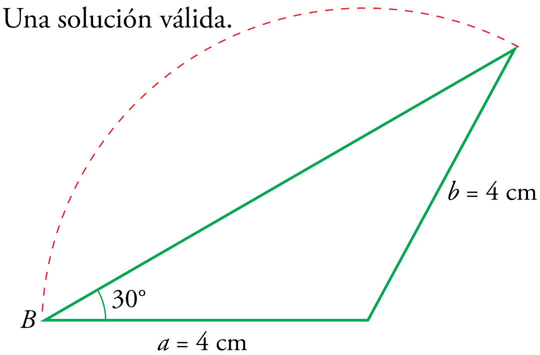
Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180°$.



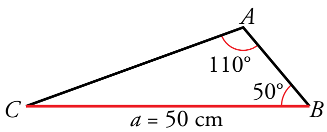

d) $b = 4$ cm

$$\frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{4}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \to \begin{cases} \hat{A}_1 = 30° \to \text{Una solución válida.} \\ \hat{A}_2 = 150° \end{cases}$$

La solución $\hat{A}_2 = 150°$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. ¡Imposible!




**6** **Calcula los lados $b$ y $c$ del triángulo de la derecha.**




Hallamos el ángulo $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - 160° = 20°$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{b}{sen\,50°} \to b = \frac{50 \cdot sen\,50°}{sen\,110°} = 40,76 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{c}{sen\,20°} \to c = \frac{50 \cdot sen\,20°}{sen\,110°} = 18,2 \text{ cm}$$

## Página 118

**7** **¿Verdadero o falso?**

**a) Si de un triángulo conocemos dos lados y el ángulo que forman, el teorema del coseno nos permite obtener el otro lado.**

**b) Si aplicamos el teorema del coseno a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces obtenemos el teorema de Pitágoras.**

a) Verdadero. Esta es la situación en la que se usa el teroema del coseno para calcular el tercer lado de un triángulo.

b) Verdadero. El ángulo opuesto a la hipotenusa es el ángulo recto y, por tanto, su coseno vale cero.

Si $a$ es la hipotenusa, el ángulo opuesto es $\hat{A} = 90°$ y se obtiene el teorema de Pitágoras a partir del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90° \;\rightarrow\; a^2 = b^2 + c^2$$

## Página 119

**Hazlo tú. Calcula $c$ conociendo $a = 7$ m, $b = 22$ m y $\hat{C} = 40°$.**

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \;\rightarrow\; c = \sqrt{7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cdot \cos 40°} = 17{,}24 \text{ m}$$

**8** **Resuelve los siguientes triángulos:**

**a)** $a = 12$ **cm;** $b = 16$ **cm;** $c = 10$ **cm**

**b)** $b = 22$ **cm;** $a = 7$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

**c)** $b = 4$ **cm;** $c = 3$ **cm;** $\hat{A} = 105°$

**d)** $a = 4$ **m;** $\hat{B} = 45°$; $\hat{C} = 60°$

**e)** $b = 5$ **m;** $\hat{A} = \hat{C} = 35°$

**f)** $a = b = 10$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

**g)** $a = 5$ **cm;** $\hat{A} = 75°$; $\hat{B} = 45°$

**h)** $a = 16$ **cm;** $\hat{A} = 90°$; $\hat{C} = 30°$

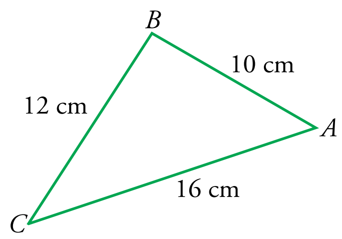
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0{,}6625$

$\hat{A} = 48°\ 30'\ 33''$




• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$

$\cos \hat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0{,}05$

$\hat{B} = 92°\ 51'\ 57{,}5''$

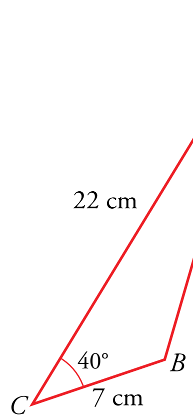
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \;\rightarrow\; \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\hat{C} = 38°\ 37'\ 29{,}5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \hat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22\ cos\ 40° = 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

$c = 17{,}24$ cm




• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{c}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow \dfrac{7}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{17,24}{sen\ 40°}$

$sen\ \hat{A} = \dfrac{7\ sen\ 40°}{17,24} = 0,26$

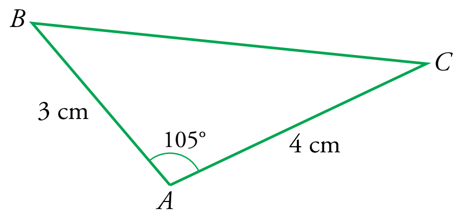
$\hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15°\ 7'\ 44{,}3'' \\ \hat{A}_2 = 164°\ 52'\ 15{,}7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{A}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124°\ 52'\ 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A} = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3\ cos\ 105° = 31{,}21$

$a = 5{,}59$ m




• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \rightarrow \dfrac{5,59}{sen\,105°} = \dfrac{4}{sen\ \widehat{B}}$

$sen\ \hat{B} = \dfrac{4 \cdot sen\,105°}{5,59} = 0,6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43°\ 43'\ 25{,}3'' \\ \hat{B}_2 = 136°\ 16'\ 34{,}7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31°\ 16'\ 34{,}7''$

d) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \rightarrow \dfrac{4}{sen\,75°} = \dfrac{b}{sen\,45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot sen\,45°}{sen\,75°} = 2,93\ \text{m}$

• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{c}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow \dfrac{4}{sen\,75°} = \dfrac{c}{sen\,60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot sen\,60°}{sen\,75°} = 3,59\ \text{m}$

e) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} = \dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} \rightarrow \dfrac{5}{sen\,110°} = \dfrac{a}{sen\,35°}$

$a = \dfrac{5 \cdot sen\,35°}{sen\,110°} = 3,05\ \text{m}$

• Como $\hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3{,}05$ m

f) • Como los lados $a$ y $b$ son iguales, el triángulo es isósceles:

$\hat{A} + \hat{B} = 180° - 40° \rightarrow 2\hat{A} = 140° \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 70°$

• $\dfrac{10}{sen\,70°} = \dfrac{c}{sen\,40°} \rightarrow c = \dfrac{10 \cdot sen\,40°}{sen\,70°} = 6,84\ \text{cm}$

g) • $\hat{C} = 180° - 75° - 45° = 60°$

• $\dfrac{5}{sen\,75°} = \dfrac{b}{sen\,45°} \rightarrow b = \dfrac{5 \cdot sen\,45°}{sen\,75°} = 3,66 \text{ cm}$

• $\dfrac{5}{sen\,75°} = \dfrac{c}{sen\,60°} \rightarrow c = \dfrac{5 \cdot sen\,60°}{sen\,75°} = 4,48 \text{ cm}$

h) • $\hat{B} = 180° - 90° - 30° = 60°$

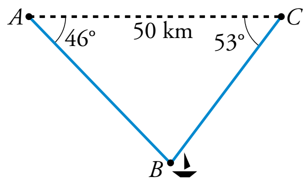
• $sen\,30° = \dfrac{c}{16} \rightarrow c = 16 \cdot sen\,30° = 8 \text{ cm}$

• $cos\,30° = \dfrac{b}{16} \rightarrow b = 16 \cdot cos\,30° = 13,86 \text{ cm}$

**9** **Un barco $B$ pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, $A$ y $C$, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos:**

$$\widehat{BAC} = 46° \text{ y } \widehat{BCA} = 53°$$

**¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?**




$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$

• $\dfrac{a}{sen\,\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\,\hat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\,sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\,46°}{sen\,81°} = 36,4 \text{ km}$

• $\dfrac{c}{sen\,\hat{C}} = \dfrac{b}{sen\,\hat{B}} \rightarrow c = \dfrac{b\,sen\,\hat{C}}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\,53°}{sen\,81°} = 40,4 \text{ km}$

# Ejercicios y problemas resueltos

## Página 120

### 1. Relaciones entre las razones trigonométricas

**Hazlo tú. Si $cos\ \alpha = -3/4$ y $180° < \alpha < 270°$, calcula: $sen\ \alpha$; $tg\ \alpha$; $cos\ (90° - \alpha)$; $sen\ (180° + \alpha)$; $tg\ (180° - \alpha)$; $sen\ (360° - \alpha)$, sin hallar el ángulo $\alpha$.**

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \to\ sen^2\ \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \ \to\ sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

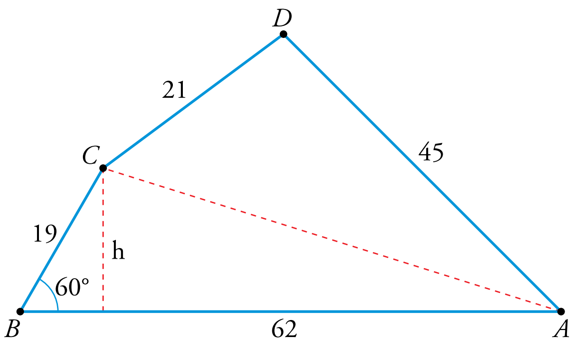
Como $\alpha$ pertenece al tercer cuadrante, su seno es negativo $\to$ $sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3} \qquad sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

### 2. Cálculo del área de una parcela descomponiéndola en triángulos

**Hazlo tú. Halla el área del cuadrilátero irregular $ABCD$ sabiendo que $\overline{AB} = 62$ m; $\overline{BC} = 19$ m; $\overline{CD} = 21$ m; $\overline{AD} = 45$ m; $\hat{B} = 60°$.**




Trazando la diagonal $\overline{AC}$ descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo $ABC$:

  $$sen\ 60° = \frac{h}{19} \ \to\ h = 19 \cdot sen\ 60° = 16{,}45 \text{ m}$$

  $$S_{ABC} = \frac{62 \cdot 16{,}45}{2} = 509{,}95 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo $ACD$:

  Para poder usar la fórmula de Herón necesitamos el lado $\overline{AC}$. Por el teorema del coseno:

  $\overline{AC}^2 = 19^2 + 62^2 - 2 \cdot 19 \cdot 62\ cos\ 60° = 3\,027 \ \to\ \overline{AC} = \sqrt{3\,027} = 55{,}02$ m

  Ahora, aplicamos la fórmula de Herón:

  $$p = \frac{21 + 45 + 55{,}02}{2} = 60{,}51$$

  $$S_{ACD} = \sqrt{60{,}51\,(60{,}51 - 21)\,(60{,}51 - 45)\,(60{,}51 - 55{,}02)} = 451{,}19 \text{ m}^2$$

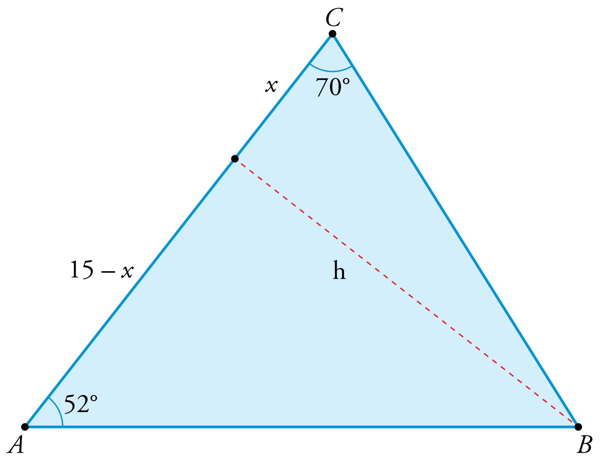
- El área del cuadrilátero es:

  $S_{ABCD} = 509{,}95 + 451{,}19 = 961{,}14 \text{ m}^2$

## Página 121

### 3. Cálculo de una distancia mediante la estrategia de la altura

**Hazlo tú. De un triángulo $ABC$ conocemos $\overline{AC}$ = 15 m, $\hat{A}$ = 52° y $\hat{C}$ = 70°. Calcula la altura sobre $AC$.**




Llamamos h a la altura trazada sobre el lado $\overline{AC}$. Dividimos este lado en dos partes, que medirán $x$ y $15 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\,52° = \dfrac{h}{15-x} \to h = (15-x)\cdot tg\,52° \\ tg\,70° = \dfrac{h}{x} \to h = x \cdot tg\,70° \end{array}\right\} \to (15-x)\cdot tg\,52° = x \cdot tg\,70° \to x = 4{,}77 \text{ m}$$

Finalmente, $h = x \cdot tg\,70° = 4{,}77 \cdot tg\,70° = 13{,}11$ m.

### 4. Resolución de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

**Hazlo tú. Resuelve el triángulo $ABC$ en el que conocemos $a$ = 12 cm, $b$ = 8,3 cm y $\hat{A}$ = 110°.**

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\,110°} = \frac{8{,}3}{sen\,\hat{B}} \to sen\,\hat{B} = \frac{8{,}3 \cdot sen\,110°}{12} = 0{,}65 \to \hat{B} \text{ puede ser } 40°\,32'\,30'' \text{ o bien } 139°\,27'\,30''$$

Este segundo valor no es posible porque la suma de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sería superior a 180°.

Por tanto, $\hat{B} = 40°\,32'\,30''$.

$\hat{C} = 180° - (110° + 40°\,32'\,30'') = 29°\,27'\,30''$

Hallamos el lado $c$ usando, de nuevo, el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\,110°} = \frac{c}{sen\,(29°\,27'\,30'')} \to c = \frac{12 \cdot sen\,(29°\,27'\,30'')}{sen\,110°} = 6{,}28 \text{ cm}$$

## Página 122

### 5. Cálculo de los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados

**Hazlo tú. Halla los ángulos del triángulo $ABC$ en el que $a$ = 15 cm, $b$ = 27 cm y $c$ = 38 cm.**

Usando el teorema del coseno, tenemos:

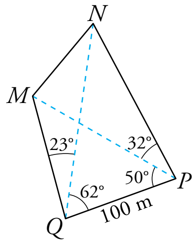
$$38^2 = 15^2 + 27^2 - 2 \cdot 15 \cdot 27 cos\,\hat{C} \to cos\,\hat{C} = \frac{490}{-810} \to \hat{C} = 127°\,13'\,28''$$

$$27^2 = 38^2 + 15^2 - 2 \cdot 38 \cdot 15 cos\,\hat{B} \to cos\,\hat{B} = \frac{-940}{-1140} \to \hat{B} = 34°\,27'\,21''$$

$$\hat{A} = 180° - (127°\,13'\,28'' + 34°\,27'\,21'') = 18°\,19'\,11''$$

## 6. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

**Hazlo tú. Calcula la distancia $\overline{MN}$.**




- Usando el triángulo $PQM$ podemos calcular el lado $\overline{QM}$:

  El ángulo $\widehat{QMP} = 180° - 50° - 85° = 45°$

  $$\frac{\overline{QM}}{sen\, 50°} = \frac{100}{sen\, 45°} \rightarrow \overline{QM} = \frac{100 \cdot sen\, 50°}{sen\, 45°} = 108,34 \text{ m}$$

- Usando el triángulo $PQN$ podemos calcular la diagonal $\overline{QN}$:

  El ángulo $\widehat{QNP} = 180° - 62° - 82° = 36°$

  $$\frac{\overline{QN}}{sen\, 82°} = \frac{100}{sen\, 36°} \rightarrow \overline{QN} = \frac{100 \cdot sen\, 82°}{sen\, 36°} = 168,47 \text{ m}$$

- Ahora usamos el teorema del coseno para hallar $\overline{MN}$:

  $$\overline{MN}^2 = 108,34^2 + 168,47^2 - 2 \cdot 108,34 \cdot 168,47 \cos 23° = 6\,517,5$$

  $$\overline{MN} = \sqrt{6\,517,5} = 80,73 \text{ m}$$

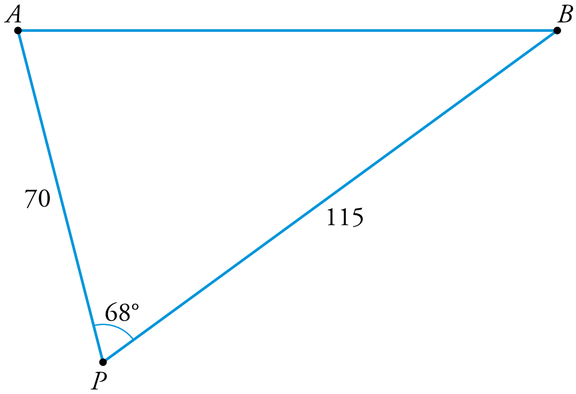
# Ejercicios y problemas guiados

## Página 123

### 1. Cálculo de los lados y los ángulos de un triángulo

***Desde un punto P observamos los puntos A y B, situados en las orillas opuestas de una laguna, bajo un ángulo de 68°. Sabemos que $\overline{PA}$ = 70 m y $\overline{PB}$ = 115 m.***

***Calcular la distancia AB y los ángulos $\widehat{PAB}$ y $\widehat{PBA}$.***




$\overline{AB}^2 = 70^2 + 115^2 - 2 \cdot 70 \cdot 115 \cos 68° = 12\,093,8$

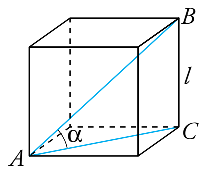
$\overline{AB} = \sqrt{12\,093,8} = 110$ m

$\dfrac{115}{sen\,\widehat{PAB}} = \dfrac{110}{sen\,68°} \rightarrow sen\,\widehat{PAB} = \dfrac{115 \cdot sen\,68°}{110} = 0,9693 \rightarrow \widehat{PAB} = 75°\,46'\,22''$

$\widehat{PBA} = 180° - 68° - 75°\,46'\,22'' = 36°\,13'\,38''$

### 2. Ángulos en un cubo

***Hallar el ángulo que forma la diagonal de la cara de un cubo con la diagonal del cubo.***



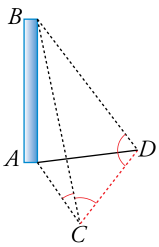

Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 2l^2 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

$tg\,\alpha = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 35°\,15'\,52''$

### 3. Resolución de triángulos: altura de una torre

***Para medir la altura de la torre AB, nos situamos en los puntos C y D y tomamos estas medidas:***




***$\overline{CD}$ = 15 m; $\widehat{ACB}$ = 40°***

***$\widehat{BCD}$ = 58°; $\widehat{BDC}$ = 70°***

***¿Qué altura tiene la torre?***

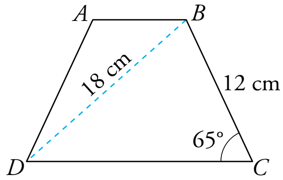
$\hat{B} = 180° - 58° - 70° = 52°$

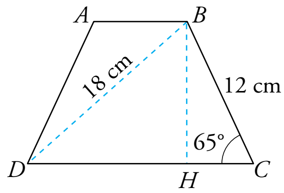
$\dfrac{\overline{BC}}{sen\,70°} = \dfrac{15}{sen\,52°} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{15 \cdot sen\,70°}{sen\,52°} = 17,89$ m

$sen\,40° = \dfrac{\overline{AB}}{17,89} \rightarrow \overline{AB} = 17,89 \cdot sen\,40° = 11,5$ m

## 4. Área y perímetro de un trapecio

***Hallar el perímetro y el área de este trapecio isósceles:***




$\overline{BH} = 12 \cdot sen\, 65° = 10,88$

$\overline{HC} = 12 \cdot cos\, 65° = 5,07$

Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{DH}^2 = 18^2 - 10,88^2 = 205,63 \rightarrow \overline{DH} = \sqrt{205,63} = 14,34$

$\overline{DC} = 14,34 + 5,07 = 19,41$

$\overline{AB} = 19,41 - 2 \cdot 5,07 = 9,27$ ya que el trapecio es isósceles.

Perímetro = $\overline{AB} + \overline{DC} + 2 \cdot \overline{BC} = 9,27 + 19,41 + 24 = 52,68$ cm

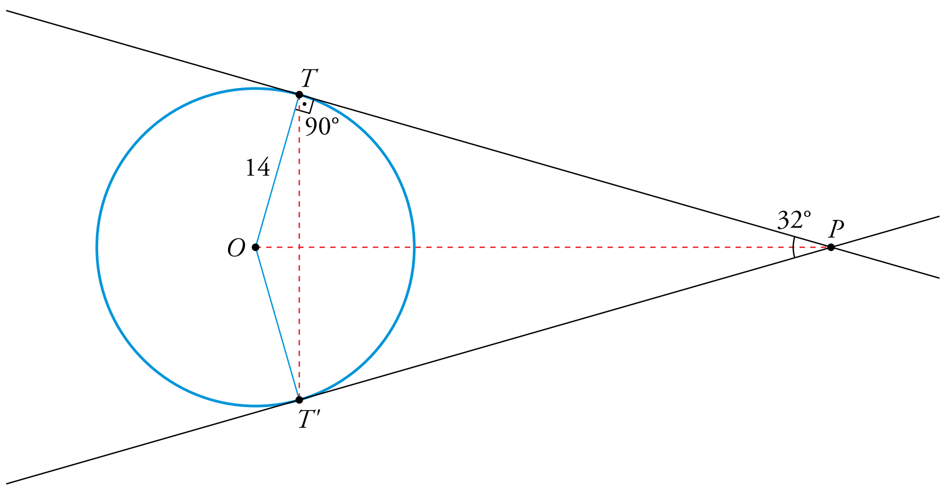
Finalmente, $S_{ABCD} = \dfrac{19,41 + 9,27}{2} \cdot 10,88 = 156,02 \text{ cm}^2$

## 5. Tangentes a una circunferencia: distancias

***Las tangentes trazadas desde el punto P a una circunferencia de centro O y de 14 cm de radio forman un ángulo de 32°. Calcular:***

***a) La distancia de P al centro de la circunferencia.***

***b) La longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.***




a) $sen\, 16° = \dfrac{14}{\overline{OP}} \rightarrow \overline{OP} = \dfrac{14}{sen\, 16°} = 50,8$ cm

b) $\widehat{TOT'} = 360° - 32° - 2 \cdot 90° = 148°$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo $OTT'$:

$\overline{TT'}^2 = 14^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 14 cos\, 148° = 724,43 \rightarrow \overline{TT'} = \sqrt{724,43} = 26,9$ cm

# Ejercicios y problemas propuestos

**Página 124**

## Para practicar

### Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

**1** **Utiliza las relaciones fundamentales para hallar las demás razones trigonométricas de los ángulos agudos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$.**

**a)** $\boldsymbol{\cos \alpha = \sqrt{5}/3}$ **b)** $\boldsymbol{\text{sen}\, \beta = 3/5}$ **c)** $\boldsymbol{tg\, \gamma = 3}$

a) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \to \text{sen}^2 \alpha + \dfrac{5}{9} = 1 \to \text{sen}^2 \alpha = \dfrac{4}{9} \to \text{sen}\, \alpha = \pm\dfrac{2}{3}$

- Si $\text{sen}\, \alpha = \dfrac{2}{3} \to tg\, \alpha = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- Si $\text{sen}\, \alpha = -\dfrac{2}{3} \to tg\, \alpha = \dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

b) $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \to \dfrac{9}{25} + \cos^2 \beta = 1 \to \cos^2 \beta = \dfrac{16}{25} \to \cos \beta = \pm\dfrac{4}{5}$

- Si $\cos \beta = \dfrac{4}{5} \to tg\, \beta = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$

- Si $\cos \beta = -\dfrac{4}{5} \to tg\, \beta = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{\text{sen}\, \gamma}{\cos \gamma} = 3 \to \text{sen}\, \gamma = 3 \cos \gamma$

$\text{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \to (3\cos \gamma)^2 + \cos^2 \gamma = 1 \to 10\cos^2 \gamma = 1 \to \cos \gamma = \pm\sqrt{\dfrac{1}{10}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

- Si $\cos \gamma = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \to \text{sen}\, \gamma = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

- Si $\cos \gamma = -\dfrac{\sqrt{10}}{10} \to \text{sen}\, \gamma = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

**2** **Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala calculando las razones trigonométricas que faltan en cada caso:**

| | *sen* $\alpha$ | *cos* $\alpha$ | *tg* $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| **0° < $\alpha$ < 90°** | **0,3** | | |
| **90° < $\alpha$ < 180°** | | **–0,6** | |
| **180° < $\alpha$ < 270°** | | | **2** |
| **270° < $\alpha$ < 360°** | | | **$-\sqrt{5}$** |

- 1.ª fila:

  Como el ángulo está en el primer cuadrante, su coseno es positivo.

  $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \to 0{,}09 + \cos^2 \alpha = 1 \to \cos^2 \alpha = 0{,}91 \to \cos \alpha = 0{,}954$

  $tg\, \alpha = \dfrac{0{,}3}{0{,}954} = 0{,}314$

- 2.ª fila:

  Como el ángulo está en el segundo cuadrante, su seno es positivo.

  $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \to \text{sen}^2 \alpha + 0{,}36 = 1 \to \text{sen}^2 \alpha = 0{,}64 \to \text{sen}\, \alpha = 0{,}8$

  $tg\, \alpha = \dfrac{0{,}8}{-0{,}6} = -\dfrac{4}{3}$

- 3.ª fila:

  Como el ángulo está en el tercer cuadrante, su seno y su coseno son negativos.

  $$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = 2cos\ \alpha$$

  $$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 4cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 5cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

  $$sen\ \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- 4.ª fila:

  Como el ángulo está en el cuarto cuadrante, su seno es negativo y su coseno es positivo.

  $$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\sqrt{5} \rightarrow sen\ \alpha = -\sqrt{5}\ cos\ \alpha$$

  $$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 5cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 6cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{6} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

  $$sen\ \alpha = -\sqrt{5}\frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{30}}{6}$$

| | ***sen*** **α** | ***cos*** **α** | ***tg*** **α** |
|---|---|---|---|
| **0° < α < 90°** | 0,3 | 0,95 | 0,31 |
| **90° < α < 180°** | 0,8 | –0,6 | –4/3 |
| **180° < α < 270°** | $-2\sqrt{5}/5$ | $-\sqrt{5}/5$ | 2 |
| **270° < α < 360°** | $-\sqrt{30}/6$ | $\sqrt{6}/6$ | $-\sqrt{5}$ |

**3 Halla, en cada caso, las razones trigonométricas de α:**

**a)** ***sen*** **α = –2/3;** ***cos*** **α < 0**

**b)** ***cos*** **α = 5/6;** ***tg*** **α < 0**

**c)** ***tg*** **α = 2,25;** ***sen*** **α < 0**

**d)** ***cos*** **α = $-\sqrt{5}/4$;** ***sen*** **α < 0**

a) Como $cos\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow \frac{4}{9} + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{5}{9} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$tg\ \alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Como $tg\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \frac{25}{36} = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{11}{36} \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

$$tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$$

c) $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2,25 \rightarrow sen\ \alpha = 2,25\ cos\ \alpha$

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow (2,25cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 6,0625cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\ \alpha = -\sqrt{\frac{1}{6,0625}} = -0,4061$$ (tiene el mismo signo que $sen\ \alpha$ por ser $tg\ \alpha > 0$)

$$sen\ \alpha = 2,25cos\ \alpha = 2,25 \cdot (-0,4061) = -0,9137$$

d) Como $sen\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \frac{5}{16} = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{11}{6} \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{4}$

$$tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{4}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{55}}{5}$$

**4** **Sabiendo que** $\cos\alpha = 0{,}8$ **y** $\sen\alpha = 0{,}6$ **calcula:**

**a)** $\cos(180° + \alpha)$ **b)** $\sen(180° - \alpha)$ **c)** $\tg(-\alpha)$

**d)** $\sen(90° - \alpha)$ **e)** $\cos(90° + \alpha)$ **f)** $\tg(90° - \alpha)$

a) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha = -0{,}8$

b) $\sen(180° - \alpha) = \sen\alpha = 0{,}6$

c) $\tg(-\alpha) = -\tg\alpha = -\dfrac{0{,}6}{0{,}8} = -\dfrac{3}{4}$

d) $\sen(90° - \alpha) = \cos\alpha = 0{,}8$

e) $\cos(90° + \alpha) = -\sen\alpha = -0{,}6$

f) $\tg(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\tg\alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$

**5** **Si sabemos que** $\sen 42° = 0{,}67$, $\cos 42° = 0{,}74$ **y** $\tg 42° = 0{,}9$, **di el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:**

**a)** $\cos 48°$ **b)** $\sen(-48°)$ **c)** $\sen 138°$

**d)** $\tg 318°$ **e)** $\cos 222°$ **f)** $\tg 858°$

a) $\cos 48° = \cos(90° - 42°) = \sen 42° = 0{,}67$

b) $\sen(-48°) = -\sen 48° = -\sen(90° - 42°) = -\cos 42° = -0{,}74$

c) $\sen 138° = \sen(180° - 42°) = \sen 42° = 0{,}67$

d) $\tg 318° = \tg(360° - 42°) = \tg(-42°) = -\tg 42° = -0{,}9$

e) $\cos 222° = \cos(180° + 42°) = -\cos 42° = -0{,}74$

f) $\tg 858° = \tg(360° \cdot 2 + 138°) = \tg 138° = \tg(180° - 42°) = -\tg 42° = -0{,}9$

**6** **Expresa con un ángulo del primer cuadrante las siguientes razones trigonométricas y di su valor exacto sin usar la calculadora:**

**a)** $\sen 135°$ **b)** $\cos 240°$ **c)** $\tg 120°$

**d)** $\cos 1\,845°$ **e)** $\tg 1\,125°$ **f)** $\sen(-120°)$

a) $\sen 135° = \sen(90° + 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $\tg 120° = \tg(180° - 60°) = -\tg 60° = -\sqrt{3}$

d) $\cos 1\,845° = \cos(360° \cdot 5 + 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tg 1\,125° = \tg(360° \cdot 3 + 45°) = \tg 45° = 1$

f) $\sen(-120°) = -\sen 120° = -\sen(180° - 60°) = -\sen 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**7** **Halla con la calculadora el valor del ángulo** $\alpha$**:**

**a)** $\sen\alpha = -0{,}75$; $\alpha < 270°$

**b)** $\cos\alpha = -0{,}37$; $\alpha > 180°$

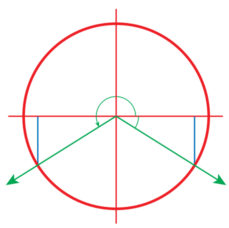
**c)** $\tg\alpha = 1{,}38$; $\sen\alpha < 0$

**d)** $\cos\alpha = 0{,}23$; $\sen\alpha < 0$

a) Con la calculadora $\rightarrow$ $\alpha = -48°\ 35'\ 25'' \in 4.°$ cuadrante

Como debe ser $\left\{\begin{array}{l} \sen\alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}}$ cuadrante

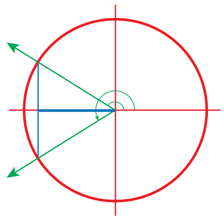
Luego $\alpha = 180° + 48°\ 35'\ 25'' = 228°\ 35'\ 25''$



b) Con la calculadora: 111° 42' 56,3''

$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha < 0 \\ \alpha > 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

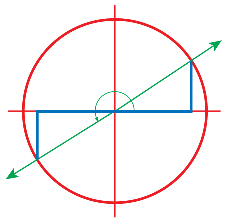
Luego $\alpha$ = 360° – 111° 42' 56,3' = 248° 17' 3,7''



c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 1,38 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\}\ \cos < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

Con la calculadora: $tg^{-1}$ 1,38 = 54° 4' 17,39''

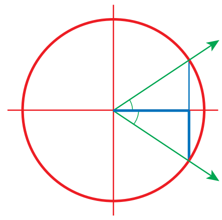
$\alpha$ = 180° + 54° 4' 17,39'' = 234° 4' 17,4''



d) $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = 0,23 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 4.^{o}$ cuadrante

Con la calculadora: $\cos^{-1}$ 0,23 = 76° 42' 10,5''

$\alpha$ = –76° 42' 10,5'' = 283° 17' 49,6''



**8** **a) Representa un ángulo $\alpha$ tal que $\cos\alpha = -\dfrac{3}{8}$ y $sen\ \alpha < 0$. Halla $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.**

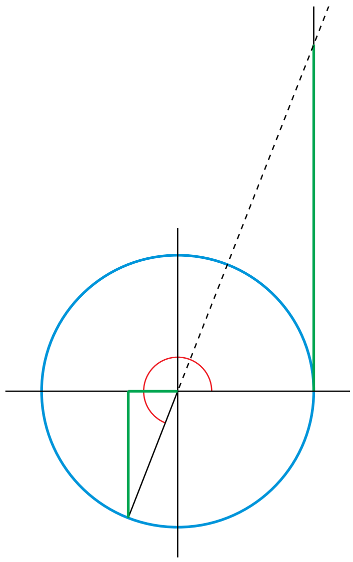
**b) Di el valor de las razones siguientes:**

**$tg\ (180° - \alpha)$; $\cos\ (90° - \alpha)$; $sen\ (180° + \alpha)$  $sen\ (-\alpha)$; $tg\ (90° + \alpha)$; $\cos\ (360° - \alpha)$**

a) $sen^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \dfrac{9}{64} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow sen^2\ \alpha = \dfrac{55}{64} \rightarrow sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{55}}{8}$

$tg\ \alpha = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{55}}{8}}{-\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{55}}{3}$



b) $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{55}}{3}$  $\cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{55}}{8}$

$sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{55}}{8}$  $sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{55}}{8}$

$tg\ (90° + \alpha) = \dfrac{-1}{tg\ \alpha} = -\dfrac{3}{\sqrt{55}} = -\dfrac{3\sqrt{55}}{55}$  $\cos\ (360° - \alpha) = \cos\alpha = -\dfrac{3}{8}$

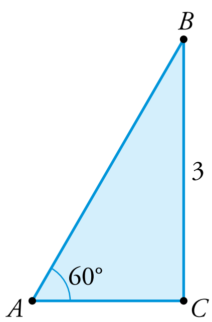
## Resolución de triángulos rectángulos

**9** **Para llegar a una altura de 3 m, apoyamos una escalera formando un ángulo de 60° con el suelo. Halla la longitud de la escalera y la distancia desde su base hasta la pared.**

El suelo, la escalera y la pared forman un triángulo rectángulo.

$sen\ 60° = \dfrac{3}{c} \rightarrow$ Longitud de la escalera $= c = \dfrac{3}{sen\ 60°} = \dfrac{3}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 3,46$ m

$tg\ 60° = \dfrac{3}{b} \rightarrow$ Distancia desde la base a la pared $= b = \dfrac{3}{tg\ 60°} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = 1,73$ m



**10 Una persona que mide 1,78 m proyecta una sombra de 85 cm. ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la horizontal?**

El cociente entre la altura y la sombra es la tangente del ángulo $\alpha$ que forma el sol con la horizontal.

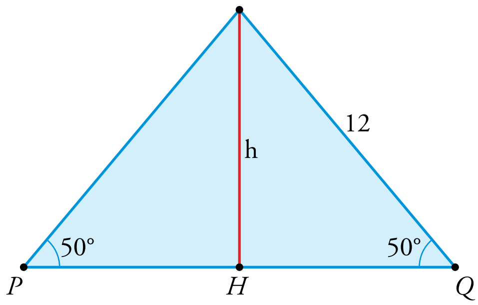
$tg\ \alpha = \dfrac{1,78}{0,85} = 2,094 \rightarrow \alpha = 64°\ 28'\ 27''$

**11 Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujección.**

Altura del poste = h = 12 · *sen* 50° = 9,19 m

La distancia de la base al punto de sujección es:

$\overline{HQ} = 12 \cdot cos\ 50° = 7,71$ m




**12 En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 m y el ángulo opuesto es de 40°. Halla el perímetro y el área del triángulo.**

La medida de los ángulos iguales es $\dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.

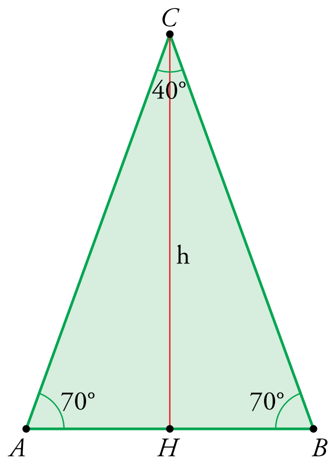
$tg\ 70° = \dfrac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot tg\ 70° = 13,74$ m

$S_{TRIÁNGULO} = \dfrac{10 \cdot 13,74}{2} = 68,7\ m^2$

$cos\ 70° = \dfrac{5}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{5}{cos\ 70°} = 14,62$ m

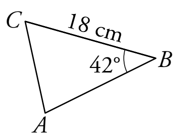
El perímetro del triángulo *ABC* es:

$P = 2 \cdot 14,62 + 10 = 39,24$ m

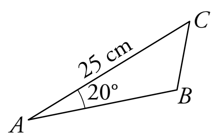



**13 Calcula la altura trazada desde *C* en cada uno de los triángulos siguientes:**

**a)**




**b)**

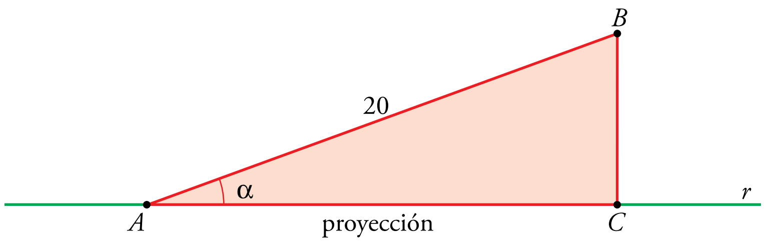



a) h = 18 · *sen* 42° = 12,04 cm

b) h = 25 · *sen* 20° = 8,55 cm

**14 Halla, en cada caso, la proyección de un segmento de 20 cm de longitud sobre una recta *r* con la que forma un ángulo $\alpha$:**

**a) $\alpha$ = 20°** **b) $\alpha$ = 45°** **c) $\alpha$ = 80°**



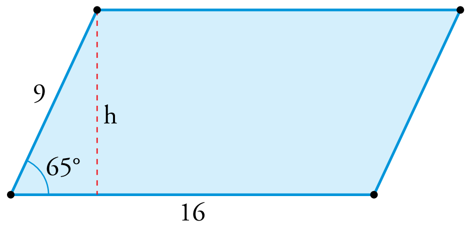

Podemos obtener la proyección usando el coseno del ángulo $\alpha$.

a) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 20° = 18,79$ cm b) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 45° = 14,14$ cm c) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 80° = 3,47$ cm

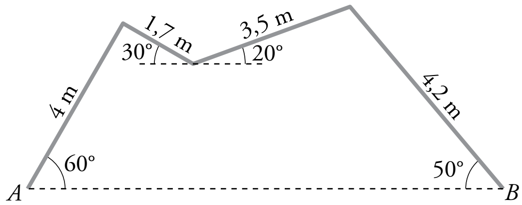
**15** **Calcula el área de un paralelogramo cuyos lados, de 9 cm y 16 cm, forman un ángulo de 65°.**

$h = 9 \cdot sen\ 65° = 8{,}16$ cm

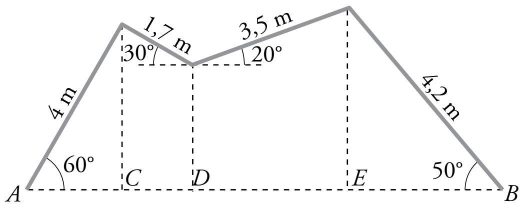
La superficie es $S = 16 \cdot 8{,}16 = 130{,}56$ cm$^2$




**16** **El tejado de una casa tiene la forma y las medidas que se indican en la figura. Calcula la distancia $\overline{AB}$.**




Trazamos perpendiculares del segmento $\overline{AB}$ que pasen por los tres vértices superiores. Esas rectas dividen al segmento $\overline{AB}$ en 4 partes. Las longitudes de estos segmentos, de izquierda a derecha son:




$\overline{AC} = 4 \cdot cos\ 60° = 2$ m

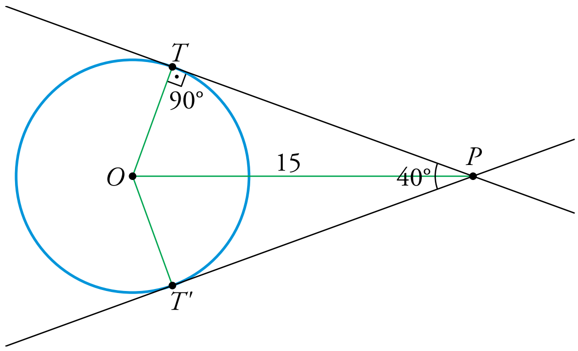
$\overline{CD} = 1{,}7 \cdot cos\ 30° = 1{,}47$ m

$\overline{DE} = 3{,}5 \cdot cos\ 20° = 3{,}29$ m

$\overline{EB} = 4{,}2 \cdot cos\ 50° = 2{,}7$ m

La longitud total es: $\overline{AB} = 2 + 1{,}47 + 3{,}29 + 2{,}7 = 9{,}46$ m

**17** **Desde un punto $P$ exterior a una circunferencia se trazan las tangentes que forman entre sí un ángulo de 40°. Si la distancia de $P$ al centro de la circunferencia es de 15 cm, ¿cuál es su radio?**




El radio $\overline{OT}$ es el cateto opuesto al ángulo de $20° = \dfrac{40°}{2}$, luego $\overline{OT} = 15 \cdot sen\ 20° = 5{,}13$ cm.

**18** **En un triángulo $ABC$, rectángulo en $A$, se conocen un cateto y la altura sobre la hipotenusa:**

$$\overline{AC} = 15 \text{ m} \qquad \overline{AD} = 12 \text{ m}$$

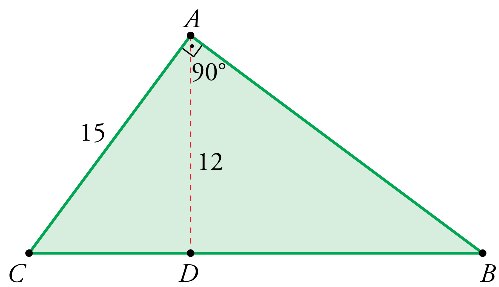
**Halla los lados y los ángulos del triángulo.**

$sen\ \hat{C} = \dfrac{12}{15} = 0{,}8 \ \rightarrow\ \hat{C} = 53°\ 7'\ 48''$

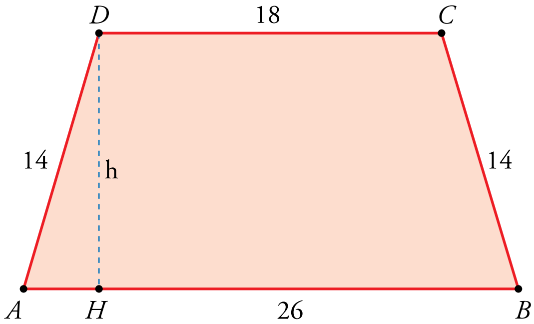
$\hat{B} = 90° - 53°\ 7'\ 48'' = 36°\ 52'\ 12''$

$sen\ \hat{B} = \dfrac{12}{\overline{AB}} \ \rightarrow\ \overline{AB} = \dfrac{12}{sen\ \hat{B}} = 20$ m

Por el teorema de Pitágoras, $\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ m.



**19** **Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.**




$\overline{AH} = \dfrac{26-18}{2} = 4$ cm por ser isósceles.

$cos\,\hat{A} = \dfrac{4}{14} = 0,2857 \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 73°\ 23'\ 54''$

Como los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°:

$$\hat{C} = \hat{D} = \frac{360° - 2 \cdot (73°\ 23'\ 54'')}{2} = 180° - 73°\ 23'\ 54'' = 106°\ 36'\ 6''$$

Para calcular la superficie necesitamos la altura: $h = 14 \cdot sen\,\hat{A} = 13,42$ cm

$$S_{ABCD} = \frac{26+18}{2} \cdot 13,42 = 295,24 \text{ cm}^2$$

## Página 125

## Resolución de triángulos cualesquiera

**20** **Aplica el teorema de los senos para resolver el triángulo *ABC* en los siguientes casos:**

**a)** $\hat{A} = 55°,\ \hat{B} = 40°,\ c = 15$ **m**

**b)** $\hat{A} = 50°,\ a = 23$ **m**, $c = 18$ **m**

**c)** $\hat{A} = 35°,\ \hat{C} = 42°,\ b = 17$ **m**

**d)** $\hat{B} = 105°,\ b = 30$ **m**, $a = 18$ **m**

a) $\hat{C} = 180° - 55° - 40° = 85°;\ \dfrac{a}{sen\,55°} = \dfrac{b}{sen\,40°} = \dfrac{15}{sen\,85°}$

$$a = \frac{15 \cdot sen\,55°}{sen\,85°} = 12,33 \text{ cm}; \qquad b = \frac{15 \cdot sen\,40°}{sen\,85°} = 9,68 \text{ cm}$$

b) $\dfrac{23}{sen\,50°} = \dfrac{18}{sen\,\hat{C}} \rightarrow sen\,\hat{C} = \dfrac{18 \cdot sen\,50°}{23} = 0,6 \rightarrow \hat{C} = 36°\ 52'\ 12''$

$$\hat{B} = 180° - 50° - 36°\ 52'\ 12'' = 93°\ 7'\ 48''$$

$$\frac{23}{sen\,50°} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \rightarrow b = \frac{23 \cdot sen\,\hat{B}}{sen\,50°} = 30 \text{ cm}$$

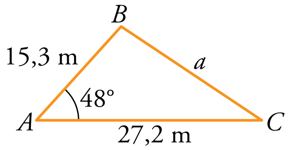
c) $\hat{B} = 180° - (35° + 42°) = 103°;\ \dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{a}{sen\,\hat{A}} \rightarrow a = \dfrac{17 \cdot sen\,35°}{sen\,103°} = 10 \text{ m}$

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \rightarrow c = \frac{17 \cdot sen\,42°}{sen\,103°} \rightarrow c = 11,67 \text{ m}$$

d) $\dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{a}{sen\,\hat{A}} \rightarrow sen\,\hat{A} = \dfrac{18 \cdot sen\,105°}{30} \rightarrow \hat{A} = 35°\ 25'\ 9'';\ \hat{C} = 39°\ 34'\ 51''$

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \rightarrow c = \frac{30 \cdot sen\,39°\ 34'\ 51''}{sen\,105°} \rightarrow c = 19,79 \text{ m}$$

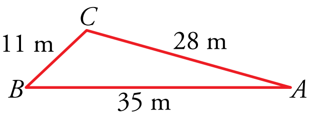
**21** **Aplica el teorema del coseno para hallar el lado *a* del triángulo *ABC*, en el que $\hat{A}$ = 48°, *b* = 27,2 m y *c* = 15,3 m.**




$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos \hat{A}$

$a^2 = 27{,}2^2 + 15{,}3^2 - 2 \cdot 27{,}2 \cdot 15{,}3\ \cos 48° \ \rightarrow\ a = 20{,}42$ m

**22** **Halla los ángulos del triángulo *ABC* en el que *a* = 11 m, *b* = 28 m y *c* = 35 m.**




$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35\ \cos \hat{A} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ \cos \hat{A} = \dfrac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \ \rightarrow\ \hat{A} = 15°\ 34'\ 41''$

$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35\ \cos \hat{B} \ \rightarrow\ \cos \hat{B} = \dfrac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \ \rightarrow\ \hat{B} = 43°\ 7'\ 28''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \ \rightarrow\ \hat{C} = 121°\ 17'\ 51''$

**23** **Resuelve los siguientes triángulos:**

**a)** ***b*** **= 32 cm,** ***a*** **= 17 cm,** $\hat{C}$ **= 40°**

**b)** ***a*** **= 85 cm,** ***c*** **= 57 cm,** $\hat{B}$ **= 65°**

**c)** ***a*** **= 23 cm,** ***b*** **= 14 cm,** ***c*** **= 34 cm**

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17\ \cos 40° \ \rightarrow\ c = 21{,}9$ cm

$17^2 = 32^2 + 21{,}9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21{,}9\ \cos \hat{A} \ \rightarrow\ \hat{A} = 29°\ 56'\ 8''$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \ \rightarrow\ \hat{B} = 110°\ 3'\ 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57\ \cos 65° \ \rightarrow\ b = 79{,}87$ cm

$57^2 = 85^2 + 79{,}87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79{,}87\ \cos \hat{C} \ \rightarrow\ \hat{C} = 40°\ 18'\ 5''$

$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) \ \rightarrow\ \hat{A} = 74°\ 41'\ 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34\ \cos \hat{A} \ \rightarrow\ \hat{A} = 30°\ 10'\ 29''$

$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34\ \cos \hat{B} \ \rightarrow\ \hat{B} = 17°\ 48'\ 56''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \ \rightarrow\ \hat{C} = 133°\ 0'\ 35''$

**24** **Resuelve los siguientes triángulos:**

**a)** ***a*** **= 100 m,** $\hat{B}$ **= 47°,** $\hat{C}$ **= 63°**

**b)** ***b*** **= 17 m,** $\hat{A}$ **= 70°,** $\hat{C}$ **= 35°**

**c)** ***a*** **= 70 m,** ***b*** **= 55 m,** $\hat{C}$ **= 73°**

**d)** ***a*** **= 122 m,** ***c*** **= 200 m,** $\hat{B}$ **= 120°**

**e)** ***a*** **= 25 m,** ***b*** **= 30 m,** ***c*** **= 40 m**

**f)** ***a*** **= 100 m,** ***b*** **= 185 m,** ***c*** **= 150 m**

**g)** ***a*** **= 15 m,** ***b*** **= 9 m,** $\hat{A}$ **= 130°**

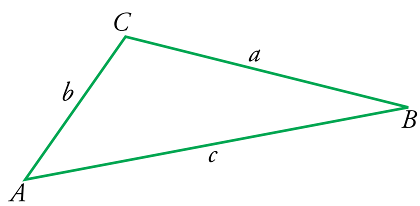
**h)** ***b*** **= 6 m,** ***c*** **= 8 m,** $\hat{C}$ **= 57°**

a) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 70°$

• $\dfrac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} \ \rightarrow\ \dfrac{100}{\text{sen}\ 70°} = \dfrac{b}{\text{sen}\ 47°} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ b = \dfrac{100 \cdot \text{sen}\ 47°}{\text{sen}\ 70°} = 77{,}83$ m

• $\dfrac{100}{\text{sen}\ 70°} = \dfrac{c}{\text{sen}\ 63°} \ \rightarrow\ c = \dfrac{100 \cdot \text{sen}\ 63°}{\text{sen}\ 70°} = 94{,}82$ m



b) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

• $\dfrac{17}{sen\,75°} = \dfrac{a}{sen\,70°} \to a = \dfrac{17 \cdot sen\,70°}{sen\,75°} = 16{,}54$ m

• $\dfrac{17}{sen\,75°} = \dfrac{c}{sen\,35°} \to c = \dfrac{17 \cdot sen\,35°}{sen\,75°} = 10{,}09$ m

c) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot cos\,73° = 5\,673{,}74 \to c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot cos\,\hat{A} \to$

$\to cos\,\hat{A} = \dfrac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \to \hat{A} = 62°\ 43'\ 49{,}4''$

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 44°\ 16'\ 10{,}6''$

d) • $b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 cos\,120° = 79\,284 \to b = 281{,}6$ m

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\hat{A} \to cos\,\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \to$

$\to cos\,\hat{A} = \dfrac{281{,}6^2 + 200^2 - 12^2}{2 \cdot 281{,}6 \cdot 200} = 0{,}92698 \to \hat{A} = 22°\ 1'\ 54{,}45''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 37°\ 58'\ 55{,}5''$

e) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\hat{A} \to$

$\to cos\,\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \to \hat{A} = 38°\ 37'\ 29{,}4''$

• $cos\,\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \to \hat{B} = 48°\ 30'\ 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 92°\ 51'\ 57{,}6''$

f) • $cos\,\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0{,}84189 \to \hat{A} = 32°\ 39'\ 34{,}4''$

• $cos\,\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0{,}0575 \to \hat{B} = 93°\ 17'\ 46{,}7''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 54°\ 2'\ 38{,}9''$

g) • $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{9}{sen\,\hat{B}} \to sen\,\hat{B} = \dfrac{9 \cdot sen\,130°}{15} = 0{,}4596 \to$

$\to \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46{,}8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13{,}2'' \to \text{No válida} \end{cases}$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13{,}2''$

• $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}} \to c = \dfrac{15 \cdot sen\,\widehat{C}}{sen\,130°} = 7{,}54$ m

h) • $\dfrac{8}{sen\,57°} = \dfrac{6}{sen\,\hat{B}} \to sen\,\hat{B} = \dfrac{6 \cdot sen\,57°}{8} = 0{,}6290 \to$

$\to \begin{cases} \hat{B}_1 = 38°\ 58'\ 35{,}7'' \\ \hat{B}_2 = 141°\ 1'\ 24{,}3'' \to \text{No válida} \end{cases}$

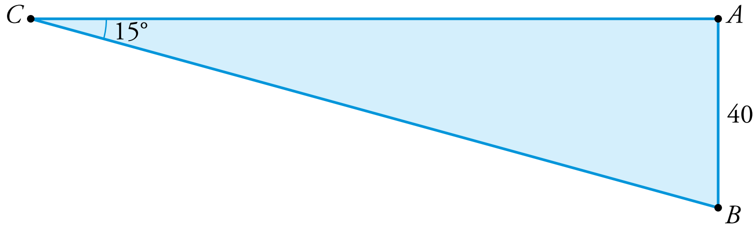
La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 84°\ 1'\ 24{,}3''$

• $\dfrac{8}{sen\,57°} = \dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} \to a = \dfrac{8 \cdot sen\,\widehat{A}}{sen\,57°} = 9{,}5$ m

# Para resolver

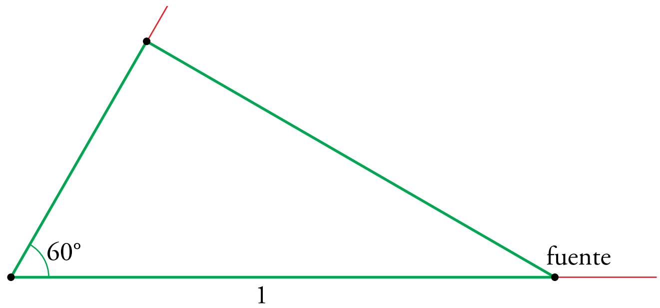
**25** **El radar de un barco detecta un objeto no identificado a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?**




El buzo tiene que recorrer la distancia $\overline{BC}$.

$sen\ 15° = \dfrac{40}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{40}{sen\ 15°} = 145{,}55$ m

**26** **Dos senderos rectos se cruzan formando un ángulo de 60°. En uno de ellos, a un kilómetro del cruce, hay una fuente. ¿Cuál es la distancia más corta que hay desde la fuente al otro sendero si vamos campo a través?**

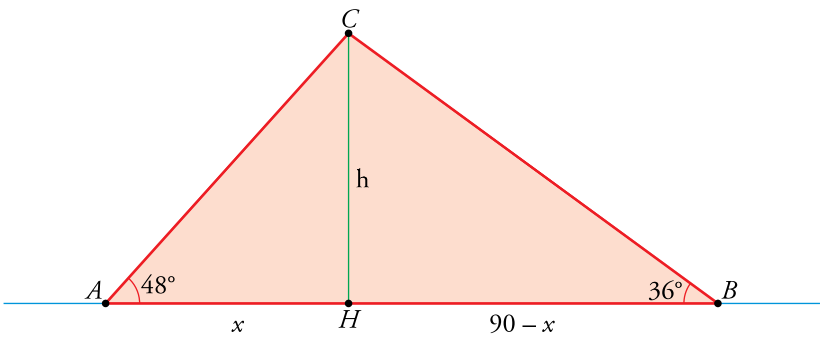



La distancia más corta se da en la perpendicular desde la fuente al otro camino.

Podemos calcularla usando el seno del ángulo opuesto a la perpendicular.

Distancia $= 1 \cdot sen\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$ km

**27** **Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48°. Los puntos de sujección de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.**



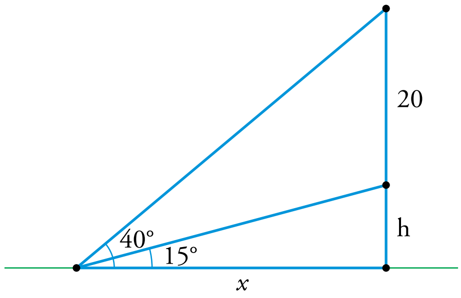

Llamemos $x$ al segmento $\overline{AH}$. Entonces, el segmento $\overline{HB}$ será $90 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 48° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 36° = \dfrac{h}{90 - x} \end{array}\right\} \rightarrow x \cdot tg\ 48° = (90 - x) \cdot tg\ 36° \rightarrow 1{,}11x = 0{,}73(90 - x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 1{,}84x = 65{,}7 \rightarrow x = \frac{65{,}7}{1{,}84} = 35{,}71$$

$h = 35{,}71 \cdot tg\ 48° = 35{,}71 \cdot 1{,}11 = 39{,}64$ m

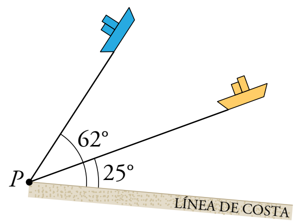
**28** **Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y el faro, bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del promontorio.**




Llamamos h a la altura del promontorio y $x$ a la distancia del barco a la base del pedestal.

$$\left.\begin{array}{l} tg\,15° = \dfrac{h}{x} \\ tg\,45° = \dfrac{20+h}{2} \end{array}\right\} \to \frac{h}{tg\,15°} = \frac{20+h}{tg\,45°} \to h \cdot tg\,45° = (20+h)\cdot tg\,15° \to h = \frac{20 tg\,15°}{tg\,45° - tg\,15°} = 7{,}32 \text{ m}$$

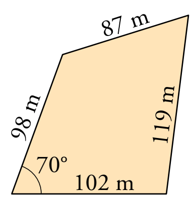
**29** **Dos barcos salen simultáneamente de un punto $P$ con rumbos de 62° y 25° respecto a la línea de costa. El primero lleva una velocidad de 7,5 nudos, y el otro, de 9 nudos. ¿Cuál será la distancia entre ellos al cabo de una hora de navegación?**




Después de una hora, los barcos han recorrido, respectivamente, 7,5 y 9 millas náuticas. La distancia que los separa es la longitud del tercer lado del triángulo cuyos vértices son los barcos y el punto $P$. Esta distancia, $d$, se puede hallar con el teorema del coseno.

$$d^2 = 7{,}5^2 + 9^2 - 2 \cdot 7{,}5 \cdot 9 cos\,37° = 29{,}43 \to d = \sqrt{29{,}43} = 5{,}423 \text{ millas náuticas}$$

**30** **Para hallar el área de una parcela irregular, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. ¿Cuál es su área?**




La diagonal opuesta al ángulo de 70° divide al cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo izquierdo:

  Su altura es $h = 98 \cdot sen\,70° = 92{,}09$ m $\to$ Área$_I = \dfrac{102 \cdot 92{,}09}{2} = 4\,696{,}6$ m$^2$

- Área del triángulo derecho:

  La calcularemos usando la fórmula de Herón y, para ello, necesitamos la longitud, $l$, del tercer lado.

  $l^2 = 98^2 + 102^2 - 2 \cdot 98 \cdot 102 cos\,70° = 13\,170 \to l = \sqrt{13\,170} = 114{,}76$ m

  $s = \dfrac{87 + 119 + 114{,}76}{2} = 160{,}3$

  Área$_D = \sqrt{160{,}3 \cdot (160{,}3 - 87) \cdot (160{,}3 - 119) \cdot (160{,}3 - 114{,}76)} = 4\,701$ m$^2$

- El área del cuadrilátero es $4\,696{,}6 + 4\,701 = 9\,397{,}6$ m$^2$.

**31** **Dos fuerzas de 18 N y 30 N actúan sobre un punto formando un ángulo de 45°. Calcula la intensidad de la resultante y el ángulo que forma con cada una de las fuerzas.**

$\hat{Q} = 180° - 45° = 135°$

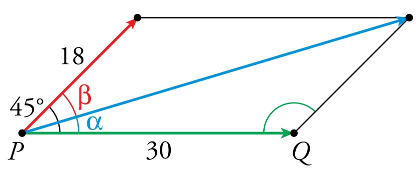
Utilizando el teorema del coseno podemos hallar la longitud, $l$, de la resultante:

$l^2 = 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 cos\,135° = 1\,987{,}7 \to l = \sqrt{1\,987{,}7} = 44{,}58$ N

Ahora usamos el teorema de los senos:

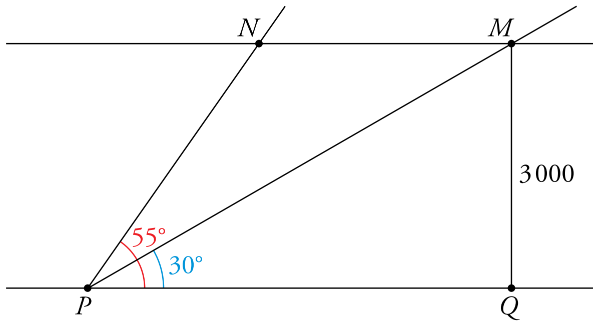
$$\frac{18}{sen\,\alpha} = \frac{44{,}58}{sen\,135°} \to sen\,\alpha = \frac{18 \cdot sen\,135°}{44{,}58} = 0{,}2855 \to \alpha = 16°\,35'\,19''$$

$\beta = 45° - 16°\,35'\,19'' = 28°\,24'\,41''$



**32** **Desde un punto $P$ observamos un avión que se acerca bajo un ángulo de 30°. Quince segundos después, el ángulo es de 55°. Si el avión vuela a 3 000 m de altura, ¿cuál es su velocidad?**

Para hallar la velocidad del avión necesitamos calcular la longitud del segmento $\overline{NM}$:




$sen\ 30° = \dfrac{3\,000}{\overline{PM}} \rightarrow \overline{PM} = \dfrac{3\,000}{sen\ 30°} = 6\,000$

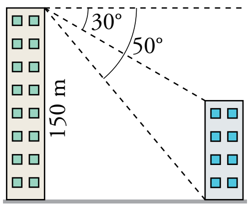
Por otro lado:

$\hat{N} = 360° - (55° + 2 \cdot 90°) = 125°$

Ahora usamos el teorema de los senos:

$\dfrac{6\,000}{sen\ 125°} = \dfrac{\overline{NM}}{sen\ 25°} \rightarrow \overline{NM} = \dfrac{6\,000 \cdot sen\ 25°}{sen\ 125°} = 3\,095{,}53$ m

La velocidad del avión es $\dfrac{3\,095{,}53}{15} = 206{,}37$ m/s.

**33** 


**Desde la terraza de un edificio de 150 m de altura medimos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la altura del edificio más bajo y la anchura de la calle.**

Representamos la anchura de la calle con la letra $a$. Usando el ángulo complementario de 50° tenemos que:

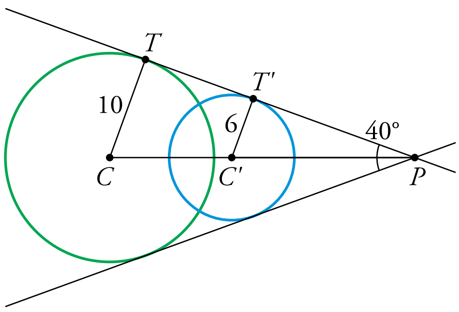
$tg\ 40° = \dfrac{a}{150} \rightarrow a = 150 \cdot tg\ 40° = 125{,}86$ m

La diferencia, $d$, entre las alturas de las torres podemos obtenerla mediante el ángulo de 30°:

$tg\ 30° = \dfrac{d}{125{,}86} \rightarrow d = 125{,}86 \cdot tg\ 30° = 72{,}67$ m

La altura del edificio más bajo es 150 – 72,67 = 77,33 m.

**34** **Dos circunferencias secantes tienen radios de 6 cm y 10 cm. Sus tangentes comunes forman un ángulo de 40°. Calcula la distancia entre sus centros.**




Los triángulos $PCT$ y $PC'T'$ son triángulos rectángulos con hipotenusas $\overline{PC}$ y $\overline{PC'}$, respectivamente.

$sen\ 20° = \dfrac{6}{\overline{PC'}} \rightarrow \overline{PC'} = \dfrac{6}{sen\ 20°} = 17{,}54$ cm

$sen\ 20° = \dfrac{10}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} = \dfrac{10}{sen\ 20°} = 29{,}24$ cm

$\overline{CC'} = 29{,}24 - 17{,}54 = 11{,}7$ cm

**35** **En una circunferencia de 12 cm de radio trazamos una cuerda de 20 cm de longitud. ¿Cuál es el ángulo correspondiente a esa cuerda?**

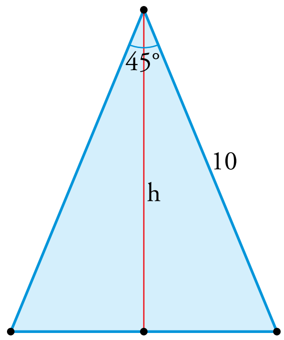
Los radios trazados desde los extremos de la cuerda y esta, forman un triángulo isósceles. El ángulo pedido es el opuesto a la cuerda (lado desigual) y podemos hallarlo usando el teorema del coseno.

$20^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 cos\ \alpha \rightarrow 400 = 144 + 144 - 288 cos\ \alpha \rightarrow$

$\rightarrow 112 = -288 \cdot cos\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = -\dfrac{112}{288} = -0{,}3889 \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 112°\ 53'\ 10''$

**36 Calcula el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.**




El octógono está formado por 8 triángulos isósceles como el del dibujo.

El ángulo desigual de cada uno de ellos es de $\frac{360°}{8} = 45°$.

$h = 10 \cdot \cos 22{,}5° = 9{,}24$ cm

Por otro lado, la longitud de la mitad de la base del triángulo es:

$10 \cdot \operatorname{sen} 22{,}5° = 3{,}83$ cm

Luego el área del triángulo es:

$$A = \frac{2 \cdot 3{,}83 \cdot 9{,}24}{2} = 35{,}39 \text{ cm}^2$$

El área del octógono es 8 veces el área del triángulo, es decir, $8 \cdot 35{,}39 = 283{,}12$ cm$^2$.

**37 Calcula el área de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de 15 cm de radio.**

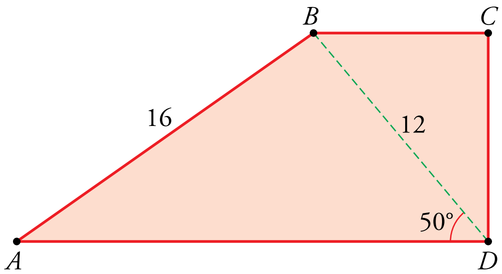
Este problema se resuelve de forma análoga al anterior. En este caso, el triángulo formado por los radios de la circunferencia y el lado del hexágono es equilátero, porque el ángulo central mide 60°. El lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

La altura, $h$, (que coincide con la apotema del hexágono) se obtiene así:

$h = 15 \cdot \cos 30° = 13$ cm

$$S_{\text{HEXÁGONO}} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} = 585 \text{ cm}^2$$

**38 De un trapecio rectángulo conocemos el lado oblicuo, que mide 16 cm, la diagonal menor, 12 cm, y el ángulo que esta forma con la base mayor, 50°. Calcula el área y el perímetro del trapecio.**




Utilizando el ángulo complementario de 50° tenemos:

$$\operatorname{sen} 40° = \frac{\overline{BC}}{12} \to \overline{BC} = 12 \cdot \operatorname{sen} 40° = 7{,}71 \text{ cm}$$

$$\cos 40° = \frac{\overline{CD}}{12} \to \overline{CD} = 12 \cdot \cos 40° = 9{,}19 \text{ cm}$$

Por otro lado, por el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{16}{\operatorname{sen} 50°} \to \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 50°}{16} = 0{,}5745 \to \hat{A} = 35°\ 3'\ 53''$$

$$\widehat{ABD} = 180° - (50° + 35°\ 3'\ 53'') = 94°\ 56'\ 7''$$

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} \widehat{ABD}} = \frac{16}{\operatorname{sen} 50°} \to \overline{AD} = \frac{16 \cdot \operatorname{sen} \widehat{ABD}}{\operatorname{sen} 50°} = 20{,}81 \text{ cm}$$

Para terminar:

$$S_{ABCD} = \frac{20{,}81 + 7{,}71}{2} \cdot 9{,}19 = 131{,}05 \text{ cm}^2$$

Perímetro $= 20{,}81 + 9{,}19 + 7{,}71 + 16 = 43{,}71$ cm

**39 En un rectángulo *ABCD* de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde *B* una perpendicular a la diagonal *AC*, y desde *D*, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean *M* y *N* los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento *MN*.**

Los triángulos $AND$ y $BMC$ son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$.

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$.

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo $ABC$ y $\overline{MC}$ en el triángulo $BMC$.

- En $ABC$:

  $\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208$ (por el teorema de Pitágoras) $\to$ $\overline{AC} = 14{,}4$ cm

  Calculamos $\hat{C}$ (en $ABC$):

  $tg\,\hat{C} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5 \to \hat{C} = 56°\ 18'\ 35{,}8''$

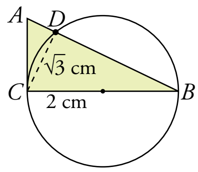
- En $BMC$:

  $\cos\hat{C} = \dfrac{\overline{MC}}{8} \to \overline{MC} = 8 \cdot \cos(56°\ 18'\ 35{,}8'') = 4{,}4$ cm

  Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14{,}4 - 2 \cdot 4{,}4 = 5{,}6$ cm

**Página 126**

**40** **El triángulo $ABC$ es rectángulo en $C$. Sabemos que el radio de la circunferencia mide 2 cm y $\overline{CD} = \sqrt{3}$ cm. Calcula $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.**




El triángulo $CDB$ es rectángulo en $D$. Por tanto:

$\overline{DB}^2 = 4^2 - \sqrt{3}^2 \to \overline{DB} = \sqrt{13}$ cm $= 3{,}61$ cm

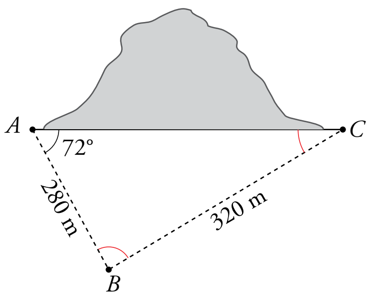
$\cos\hat{C} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \to \hat{C} = 64°\ 20'\ 28''$

$\widehat{ACD} = 90° - \hat{C} = 25°\ 39'\ 32''$

El triángulo $ADC$ es también rectángulo en $D$, y conocemos el ángulo $\hat{C}$ y el cateto $CD$:

$tg\,\widehat{ACD} = \dfrac{\overline{AD}}{\sqrt{3}} \to \overline{AD} = \sqrt{3}\ tg\,25°\ 39'\ 32'' = 0{,}83$ cm

**41** **Para construir un túnel entre $A$ y $C$ necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto $B$ y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{AC}$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.**



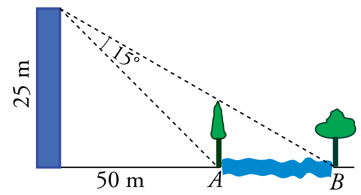

Usamos el teorema de los senos:

$\dfrac{320}{sen\,72°} = \dfrac{280}{sen\,\hat{C}} \to sen\,\hat{C} = \dfrac{280 \cdot sen\,72°}{320} = 0{,}8322 \to \hat{C} = 56°\ 19'\ 31''$

$\hat{B} = 180° - (72° + 56°\ 19'\ 31'') = 51°\ 40'\ 29''$

Aplicando de nuevo el teorema de los senos:

$\dfrac{320}{sen\,72°} = \dfrac{AC}{sen\,\hat{B}} \to \overline{AC} = \dfrac{320 \cdot sen\,\hat{B}}{sen\,72°} = 263{,}96$ m




**42** **Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15°. Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.**

Llamamos $\hat{C}$ al ángulo complementario de $\hat{A}$.

$tg\,\hat{C} = \dfrac{50}{25} = 2 \to \hat{C} = 63°\ 26'\ 6''$

Por tanto, respecto de la torre de vigilancia, se ve el árbol cuya base están en $B$ con un ángulo de $15° + 63°\ 26'\ 6'' = 78°\ 26'\ 6''$.

$tg\,(78°\ 26'\ 6'') = \dfrac{50 + \overline{AB}}{25} \to \overline{AB} = 72{,}17$ m

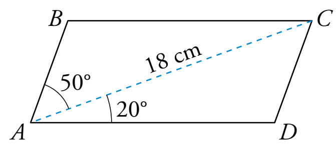
**43** **En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?**

Si llamamos $\alpha$ al ángulo pedido, por el teorema de coseno tenemos que:

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 cos\,\alpha \to 49 = 25 + 64 - 80 cos\,\alpha \to$

$\to 80 cos\,\alpha = 40 \to cos\,\alpha = \dfrac{1}{2} \to \alpha = 60°$

**44** **Calcula, en este paralelogramo *ABCD*, el área, las longitudes de los lados y la longitud de la otra diagonal:**




$\hat{D} = 180° - 70° = 110°$

$\dfrac{18}{sen\,\hat{D}} = \dfrac{\overline{AD}}{sen\,50°} \to \overline{AD} = \dfrac{18 \cdot sen\,50°}{sen\,110°} = 14{,}67$ cm

La altura, h, del paralelogramo es:

$h = 18 \cdot sen\,20° = 6{,}16$ cm

$S_{ABCD} = 14{,}67 \cdot 6{,}16 = 90{,}37\ cm^2$

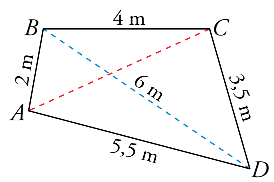
Para hallar la longitud de la otra diagonal calculamos primero $\overline{AB} = \overline{CD}$:

$\dfrac{\overline{CD}}{sen\,20°} = \dfrac{18}{sen\,110°} \to \overline{CD} = \dfrac{18 \cdot sen\,20°}{sen\,110°} = 6{,}55$ cm

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo $BAD$:

$\overline{BD}^2 = 6{,}55^2 + 14{,}67^2 - 2 \cdot 6{,}55 \cdot 14{,}67 cos\,70° = 192{,}38 \to \overline{BD} = 13{,}87$ cm

**45** **En un cuadrilátero *ABCD* conocemos las medidas de los lados y de la diagonal *BD*. Calcula las medidas del ángulo $\hat{B}$ y de la diagonal *AC*.**




Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos $ABD$ y $CBD$.

$5{,}5^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 cos\,\widehat{ABD} \to 24 cos\,\widehat{ABD} = 9{,}75 \to \widehat{ABD} = 66°\ 1'\ 50''$

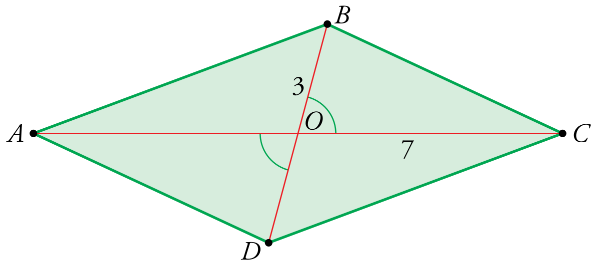
$3{,}5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 cos\,\widehat{CBD} \to 48 cos\,\widehat{CBD} = 39{,}75 \to \widehat{CBD} = 34°\ 5'\ 36''$

$\hat{B} = 66°\ 1'\ 50'' + 34°\ 5'\ 36'' = 100°\ 7'\ 26''$

Ahora aplicamos de nuevo el teorema del coseno al triángulo $ABC$:

$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 cos\,(100°\ 7'\ 26'') = 22{,}81 \to \overline{AC} = 4{,}78$ cm

**46** **Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75°. Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.**




Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio, los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden, respectivamente, la mitad de la medida de las correspondientes diagonales.

Aplicamos el teorema del coseno:

$\overline{BC}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 75° = 47{,}13 \rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} = 6{,}87$ cm

$\widehat{AOB} = 180° - 75° = 105°$

$\overline{AB}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 105° = 68{,}87 \rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} = 8{,}3$ cm

Para calcular un ángulo, por ejemplo el ángulo $\hat{B}$, aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{7}{sen\ \widehat{OBC}} = \frac{6,87}{sen\ 75°} \rightarrow sen\ \widehat{OBC} = \frac{7 \cdot sen\ 75°}{6,87} = 0{,}9842 \rightarrow \widehat{OBC} = 79°\ 48'\ 5''$$

$$\frac{7}{sen\ \widehat{ABO}} = \frac{8,3}{sen\ 105°} \rightarrow sen\ \widehat{ABO} = \frac{7 \cdot sen\ 105°}{8,3} = 0{,}8146 \rightarrow \widehat{ABO} = 54°\ 33'\ 5''$$

$\hat{B} = \hat{D} = 79°\ 48'\ 5'' + 54°\ 33'\ 5'' = 134°\ 21'\ 10''$

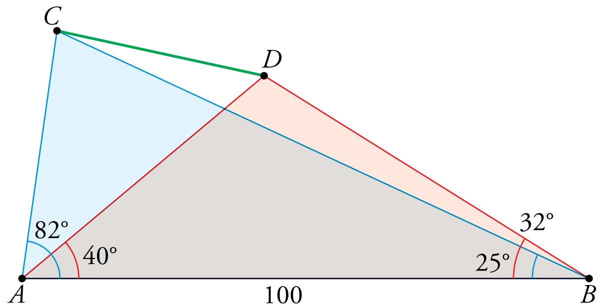
$\hat{A} = \hat{C} = 180° - 134°\ 21'\ 10'' = 45°\ 38'\ 50''$

**47** **Dos árboles $C$ y $D$ se encuentran en la orilla opuesta de un río. Desde dos puntos $A$ y $B$, situados en la orilla donde nos encontramos, tomamos las siguientes medidas:**

**$\overline{AB} = 100$ m** **$\widehat{CAB} = 82°$** **$\widehat{DAB} = 40°$**

**$\widehat{DBA} = 32°$** **$\widehat{CBA} = 25°$**

**Calcula la distancia que separa a los dos árboles.**




Para calcular la distancia $\overline{CD}$ hallaremos primero $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. De esta manera obtendremos el resultado aplicándole el teorema del coseno al triángulo $CAD$.

$\widehat{ACB} = 180° - (82° + 25°) = 73°$

$$\frac{100}{sen\ 73°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 25°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot sen\ 25°}{sen\ 73°} = 44{,}19 \text{ m}$$

$\widehat{ADB} = 180° - (40° + 32°) = 108°$

$$\frac{100}{sen\ 108°} = \frac{\overline{AD}}{sen\ 32°} \rightarrow \overline{AD} = \frac{100 \cdot sen\ 32°}{sen\ 108°} = 55{,}72 \text{ m}$$

$\overline{CD}^2 = 44{,}19^2 + 55{,}72^2 - 2 \cdot 44{,}19 \cdot 55{,}72 \cos 42° = 1\,397{,}7 \rightarrow \overline{CD} = 37{,}39$ m

**48** **Resuelve estos triángulos, teniendo en cuenta que puede que no exista solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones:**

**a)** $a = 3$ **m;** $b = 8$ **m;** $\hat{A} = 25°$

**b)** $a = 12,6$ **m;** $b = 26,4$ **m;** $\hat{B} = 124° \ 34'$

**c)** $a = 82,6$ **m;** $b = 115$ **m;** $\hat{A} = 28° \ 4'$

a) $\dfrac{3}{sen\ 25°} = \dfrac{8}{sen\ \hat{B}} \to sen\ \hat{B} = \dfrac{8 \cdot sen\ 25°}{3} = 1,127 \to$ No tiene solución porque el seno de un ángulo siempre está comprendido entre –1 y 1.

b) $\dfrac{12,6}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{26,4}{sen\,(124°\ 34')} \to sen\ \hat{A} = \dfrac{12,6 \cdot sen\,(124°\ 34')}{26,4} = 0,393 \to \begin{cases} \hat{A} = 23°\ 8'\ 29'' \\ \hat{A} = 156°\ 51'\ 31'' \end{cases}$

El segundo resultado no es válido porque $\hat{A} + \hat{B}$ sería mayor que 180° y esto es imposible. En este caso, la solución es única.

$\hat{C} = 180° - (23°\ 8'\ 29'' + 124°\ 34') = 32°\ 17'\ 31''$

Ahora, con el teorema del coseno:

$c^2 = 12,6^2 + 26,4^2 - 2 \cdot 12,6 \cdot 26,4 cos\ (32°\ 17'\ 31'') = 293,33 \to c = 17,13$ m

c) $\dfrac{82,6}{sen\,(28°\ 4')} = \dfrac{115}{sen\ \hat{B}} \to sen\ \hat{B} = \dfrac{115 \cdot sen\,(28°\ 4')}{82,6} = 0,655 \to \begin{cases} \hat{B} = 40°\ 55'\ 11'' \\ \hat{B} = 139°\ 4'\ 49'' \end{cases}$

En este caso, tenemos dos soluciones posibles:

- Si $\hat{B} = 40°\ 55'\ 11''$:

  $\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 40°\ 55'\ 11'') = 111°\ 0'\ 49''$

  $c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 cos\ (111°\ 0'\ 49'') = 26\,860 \to c = 163,89$ m

- Si $\hat{B} = 139°\ 4'\ 49''$:

  $\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 139°\ 4'\ 49'') = 12°\ 51'\ 11''$

  $c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 cos\ (12°\ 51'\ 11'') = 1\,525,8 \to c = 39,06$ m

## Cuestiones teóricas

**49** **Si** $sen\ \alpha = m$ **y** $\alpha$ **es un ángulo obtuso, expresa en función de** $m$**:**

**a)** $cos\ \alpha$ **b)** $tg\ \alpha$ **c)** $cos\ (180° - \alpha)$ **d)** $tg\ (-\alpha)$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to m^2 + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = 1 - m^2 \to cos\ \alpha = -\sqrt{1 - m^2}$ ya que el coseno de un ángulo obtuso es negativo.

b) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\dfrac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$

c) $cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha = \sqrt{1 - m^2}$

d) $tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha = \dfrac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$

**50** **Demuestra que en un triángulo** $ABC$**, rectángulo en** $A$**, se verifica:**

**a)** $\dfrac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = cos^2\ \hat{C} - sen^2\ \hat{C}$ **b)** $sen\ \hat{B} - cos\ \hat{C} = 0$ **c)** $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = 1$

a) Como $a$ es la hipotenusa del rectángulo, $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 = cos^2\ \hat{C} + sen^2\ \hat{C}$$

b) $sen\ \hat{B} - cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{a} = 0$

c) $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{b} = 1$

**51** **¿Existe algún valor de $\alpha \neq 0$ que verifique $2\,sen\,\alpha = tg\,\alpha$? Justifícalo.**

Si $\alpha = 180°$ se cumple la igualdad, ya que el seno y la tangente de 180° valen 0.

Si $\alpha \neq 0$ y también $\alpha \neq 180°$, entonces:

$$sen\,\alpha \neq 0 \text{ y } 2sen\,\alpha = tg\,\alpha \to 2sen\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \to$$

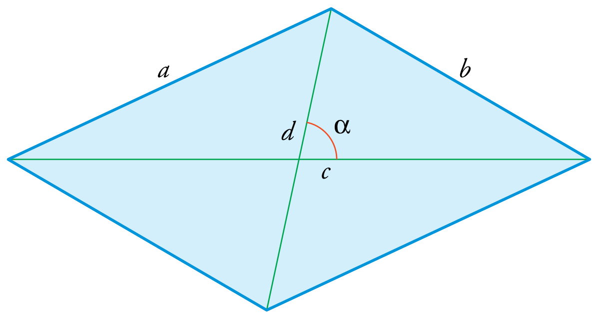
$$\to 2 = \frac{1}{cos\,\alpha} \to cos\,\alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = \begin{cases} 60° \\ 300° \end{cases}$$

**52** **Prueba que en cualquier paralelogramo de lados *a* y *b* y diagonales *c* y *d*, se verifica:**

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

* ***Aplica el teorema del coseno en dos triángulos que tengan un vértice en el centro del paralelogramo.***

Utilizamos el hecho de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio y el teorema del coseno.



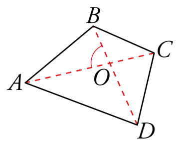

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}\,cos\,\alpha \\ a^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}\,cos\,(180° - \alpha) \end{aligned}\right\} \to$$

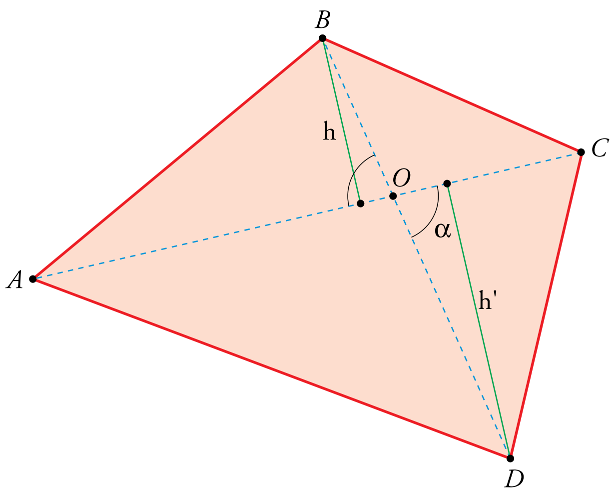
$$\to \begin{cases} b^2 = \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} - \dfrac{cd}{2}\,cos\,\alpha \\ a^2 = \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} - \dfrac{cd}{2}(-cos\,\alpha) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos que $b^2 + a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}$, de donde se obtiene la relación $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

**53** **Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.**

* ***Ten en cuenta que:*** $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$



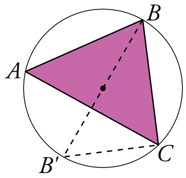




Descomponemos el área del cuadrilátero como la suma de las áreas de los triángulos *ABC* y *CDA*. Ambos tienen en común la base *AC*.

$h = \overline{OB}\cdot sen\,\alpha$

$h' = \overline{OD}\cdot sen\,\alpha$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\overline{AC}\cdot h}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot h'}{2} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{OB}\cdot sen\,\alpha}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot\overline{OD}\cdot sen\,\alpha}{2} = \frac{1}{2}\overline{AC}\,(\overline{OB} + \overline{OD})\cdot sen\,\alpha = \frac{1}{2}$$

**54** 



**Demuestra que en un triángulo cualquiera $ABC$ se verifica la siguiente igualdad:**

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} = 2R$$

**$R$ es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.**

* ***Traza el diámetro de la circunferencia desde uno de los vértices. Aplica el teorema de los senos en los triángulos $ABC$ y $BB'C$.***

Las dos primeras igualdades forman el enunciado del teorema de los senos.

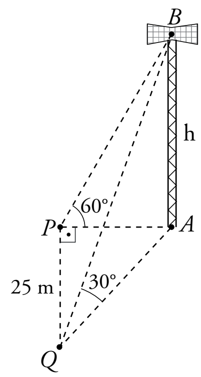
Por otra parte, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ son iguales porque abarcan el mismo arco $BC$. Por tanto, aplicando el teorema de los senos al triángulo $BB'C$ (ya que $\hat{C} = 90°$ porque abarca un arco de 180°):

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{a}{sen\ \widehat{B}'} = \frac{\overline{BB'}}{sen\ \widehat{C}} = \frac{2R}{1} = 2R$$

## Página 127

# Para profundizar

**55** **Para medir la altura de una antena, cuyo pie es inaccesible, nos situamos en un punto $P$ al oeste de la antena y la observamos bajo un ángulo de 60°. Caminamos unos 25 metros hacia el sur y desde $Q$ el ángulo de observación es de 30°. Halla la altura de la antena.**





* ***Expresa $PA$ y $QA$ en función de $h$.***

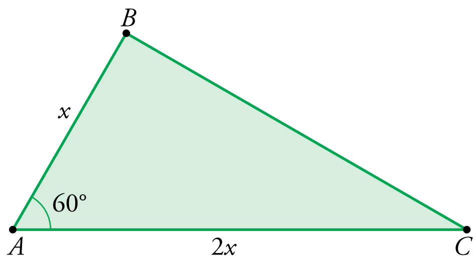
$$tg\ 30° = \frac{h}{\overline{QA}} \to \overline{QA} = \frac{h}{tg\ 30°} = h\sqrt{3}$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{\overline{PA}} \to \overline{PA} = \frac{h}{tg\ 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras al triángulo $APQ$:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 25^2 = (h\sqrt{3})^2 \to \frac{h^2}{3} + 625 = 3h^2 \to \frac{8}{3}h^2 = 625 \to h = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 15{,}31 \text{ m}$$

**56** **Uno de los lados de un triángulo mide el doble que otro, y el ángulo comprendido entre ellos mide 60°. Halla los otros ángulos.**





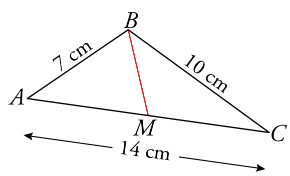
$$\overline{BC}^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x\cos 60° = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3x^2$$

$$\overline{BC} = x\sqrt{3}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{sen\ 60°} = \frac{x}{sen\ \widehat{C}} \to sen\ \hat{C} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \to \hat{C} = 30°$$

$$\hat{B} = 180° - (60° + 30°) = 90°$$

**57** **En un triángulo $ABC$ de lados $a = 10$ cm, $b = 14$ cm y $c = 7$ cm, halla la longitud de la mediana que parte de $B$.**





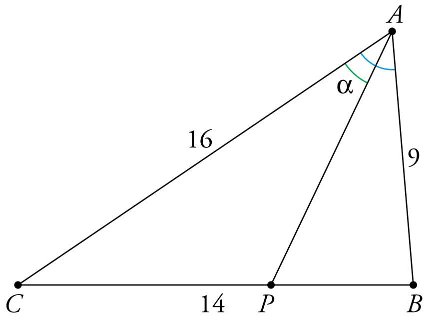
Usamos el teorema del coseno para hallar el coseno del ángulo $\hat{A}$.

$$10^2 = 7^2 + 14^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14\cos\hat{A} \to 196\cos\hat{A} = 145 \to \cos\hat{A} = \frac{145}{196}$$

Aplicamos ahora el teorema del coseno al triángulo $ABM$ teniendo en cuenta que $\overline{AM} = 7$ por la definición de mediana.

$$\overline{BM}^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7\cos\hat{A} = 98 - 98 \cdot \frac{145}{196} = \frac{51}{2} = 25{,}5 \to \overline{BM} = \sqrt{25{,}5} = 5{,}05 \text{ cm}$$

**58** **De un triángulo $ABC$ conocemos los tres lados, $a$ = 14 cm, $b$ = 16 cm y $c$ = 9 cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.**




Calculamos primero el ángulo $\alpha$:

$14^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9 \cos \hat{A} \;\to\; 288 \cos \hat{A} = 141 \;\to\; \hat{A} = 60° \, 41' \, 12''$

$\alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2} = 30° \, 20' \, 36''$

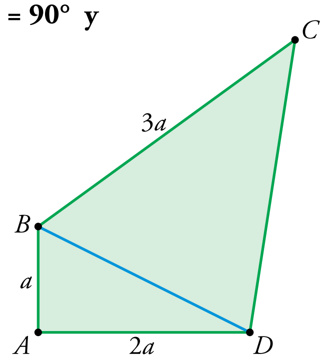
Calculamos el ángulo $\hat{C}$:

$9^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cos \hat{C} \;\to\; 448 \cos \hat{C} = 371 \;\to\; \hat{C} = 34° \, 5' \, 36''$

Ahora, $\widehat{APC} = 180° - (30° \, 20' \, 36'' + 34° \, 5' \, 36'') = 115° \, 33' \, 48''$

$$\frac{16}{sen\,\widehat{APC}} = \frac{\overline{AP}}{sen\,\widehat{C}} \;\to\; \overline{AP} = \frac{16 \cdot sen\,\widehat{C}}{sen\,\widehat{APC}} = 9{,}94 \text{ cm}$$

**59** **En el cuadrilátero $ABCD$ sabemos que $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = 2a$, $\overline{BC} = 3a$, $\widehat{BAD} = 90°$ y $\cos \widehat{DBC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Calcula $\overline{DC}$ en función de $a$.**




Por el teorema de Pitágoras:

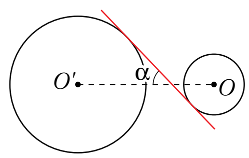
$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

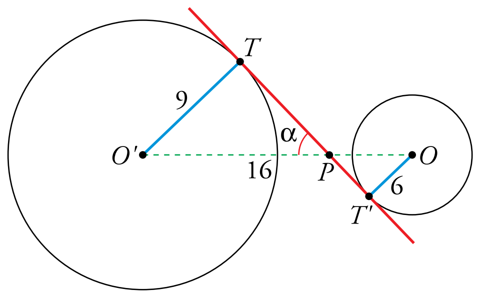
Ahora aplicamos el teorema del coseno:

$$\overline{DC}^2 = (3a)^2 + (a\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3a \cdot a\sqrt{5} \cos \widehat{DBC} =$$

$$= 9a^2 + 5a^2 - a^2 \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 8a^2 \;\to\; \overline{DC} = 2a\sqrt{2}$$

**60** **Halla el ángulo que forma la tangente a estas circunferencias con la recta que une sus centros. Los radios miden 4 cm y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.**



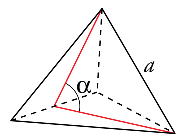

Los triángulos $OT'P$ y $O'TP$ son triángulos rectángulos.

$$sen\,\alpha = \frac{9}{\overline{O'P}} \;\to\; \overline{O'P} = \frac{9}{sen\,\alpha}$$

$$sen\,\alpha = \frac{6}{\overline{OP}} \;\to\; \overline{OP} = \frac{6}{sen\,\alpha}$$

$$16 = \overline{O'O} = \overline{O'P} + \overline{PO} = \frac{9}{sen\,\alpha} + \frac{6}{sen\,\alpha} \;\to\; 16\,sen\,\alpha = 15 \;\to\; sen\,\alpha = \frac{15}{16} \;\to\; \alpha = 69° \, 38' \, 9''$$

**61** **Halla el ángulo $\alpha$ que forman dos caras contiguas de un tetraedro regular de arista $a$.**

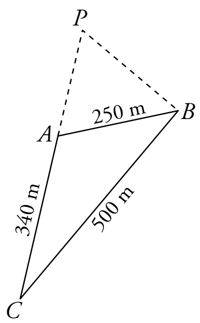



Como cada cara es un triángulo equilátero de lado $a$, la longitud de los segmentos dibujados es $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (altura del triángulo equilátero de lado $a$).

Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2a\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \;\to\; a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2\cos\alpha \;\to$$

$$\to\; \frac{3}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2} \;\to\; \cos\alpha = \frac{1}{3} \;\to\; \alpha = 70° \, 31' \, 44''$$

**62** 


**Queremos calcular la distancia desde $A$ y $B$ a un punto inaccesible $P$. Para ello, fijamos un punto $C$ de modo que $\widehat{PBC} = 90°$ y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.**

Calculamos los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CAB}$.

$340^2 = 250^2 + 500^2 - 2 \cdot 250 \cdot 500 \cos \widehat{ABC} \to 250\,000 \cos \widehat{ABC} = 196\,900 \to$

$\to \widehat{ABC} = 38°\ 2'\ 18''$

$500^2 = 250^2 + 340^2 - 2 \cdot 250 \cdot 340 \cos \widehat{CAB} \to 170\,000 \cos \widehat{CAB} = -71\,900 \to \widehat{CAB} = 115°\ 1'\ 14''$

$\widehat{PAB} = 180° - 115°\ 1'\ 14'' = 64°\ 58'\ 46''$

$\widehat{PBA} = 90° - 38°\ 2'\ 18'' = 51°\ 57'\ 42''$

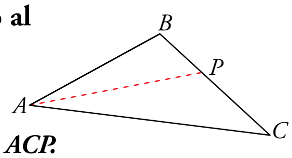
$\hat{P} = 180° - (64°\ 58'\ 46'' + 51°\ 57'\ 42'') = 63°\ 3'\ 32''$

Ahora aplicamos el teorema de los senos para calcular las distancias:

$$\frac{\overline{PA}}{sen\, \widehat{PBA}} = \frac{250}{sen\, \widehat{P}} \to \overline{PA} = 220{,}87 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{PB}}{sen\, \widehat{PAB}} = \frac{250}{sen\, \widehat{P}} \to \overline{PB} = 254{,}12 \text{ m}$$

**63 Demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.**




* ***Debes probar que*** $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$. ***Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABP y ACP.***

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AP}}{sen\, \widehat{B}} = \dfrac{\overline{BP}}{sen\, \dfrac{\widehat{A}}{2}} \to \overline{AP} \cdot sen\, \dfrac{\widehat{A}}{2} = \overline{BP} \cdot sen\, \widehat{B} \\ \dfrac{\overline{AP}}{sen\, \widehat{C}} = \dfrac{\overline{PC}}{sen\, \dfrac{\widehat{A}}{2}} \to \overline{AP} \cdot sen\, \dfrac{\widehat{A}}{2} = \overline{PC} \cdot sen\, \widehat{C} \end{array}\right\} \to \overline{BP} \cdot sen\, \hat{B} = \overline{PC} \cdot sen\, \hat{C}$$

Por otro lado:

$$\frac{\overline{AB}}{sen\, \widehat{C}} = \frac{\overline{AC}}{sen\, \widehat{B}} \to sen\, \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot sen\, \hat{C}$$

Sustituyendo $sen\, \hat{B}$ en la primera relación, se obtiene:

$$\overline{BP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot sen\, \hat{C} = \overline{PC} \cdot sen\, \hat{C} \to \overline{BP} \cdot \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \overline{AB} \to \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$$

# Autoevaluación

## Página 127

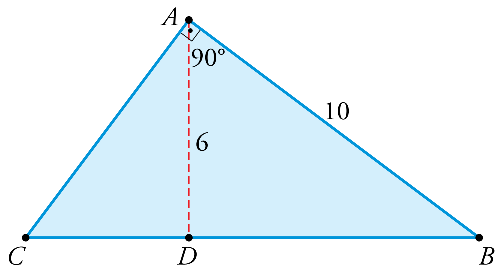
**1** **En un triángulo isósceles los lados iguales miden 7 cm y los ángulos iguales 52°. Halla la altura y el lado desigual.**

Si representamos con la letra h a la altura sobre el lado desigual, $b$:

$$sen\ 52° = \frac{h}{7} \rightarrow h = 7 \cdot sen\ 52° = 5{,}52 \text{ cm}$$

$$cos\ 52° = \frac{b/2}{7} \rightarrow b = 14 \cdot cos\ 52° = 8{,}62 \text{ cm}$$

**2** **En un triángulo $ABC$, rectángulo en $A$, conocemos el cateto $c$ = 10 cm y la altura relativa a la hipotenusa, h = 6 cm. Halla los lados y los ángulos desconocidos.**




$$sen\ \hat{B} = \frac{6}{10} \rightarrow \hat{B} = 36°\ 52'\ 12''$$

$$\hat{C} = 90° - 36°\ 52'\ 12'' = 53°\ 7'\ 48''$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{6}{b} \rightarrow b = 7{,}5 \text{ cm}$$

$$a = \sqrt{7{,}5^2 + 10^2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

**3** **Expresa a través de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154°, 207°, 318°, 2 456°.**

$sen\ 154° = sen\ (180° - 154°) = sen\ 26°$

$cos\ 154° = -cos\ 26°$

$tg\ 154° = -tg\ 26°$

$sen\ 207° = sen\ (180° + 27°) = -sen\ 27°$

$cos\ 207° = -cos\ 27°$

$tg\ 207° = tg\ 27°$

$sen\ 318° = sen\ (360° - 42°) = -sen\ 42°$

$cos\ 318° = cos\ 42°$

$tg\ 318° = -tg\ 42°$

$sen\ 2\,456° = sen\ (360° \cdot 6 + 296°) = sen\ 296° = sen\ (360° - 64°) = -sen\ 64°$

$cos\ 2\,456° = cos\ 64°$

$tg\ 2\,456° = -tg\ 64°$

**4** **Si $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha > 90°$, calcula sin hallar el ángulo $\alpha$:**

**a)** $cos\ \alpha$ **b)** $tg\ \alpha$ **c)** $sen\ (180° + \alpha)$

**d)** $cos\ (90° + \alpha)$ **e)** $tg\ (180° - \alpha)$ **f)** $sen\ (90° + \alpha)$

a) $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\frac{3}{5} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

b) $tg\ \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$

c) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

d) $cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

e) $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

f) $sen\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

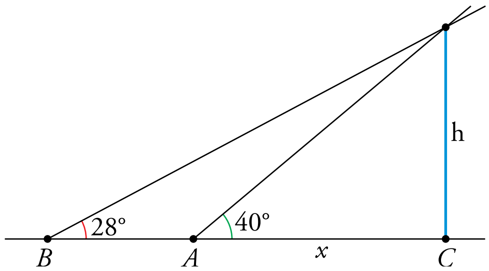
**5** **Si $tg\ \alpha = -3{,}5$, halla $\alpha$ con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo $[0, 180°)$ y obtén su seno y su coseno.**

$\alpha = 105°\ 56'\ 43''$

$sen\ \alpha = 0{,}9615$

$cos\ \alpha = -0{,}2747$

**6** **Desde un punto del suelo medimos el ángulo bajo el que se ve un edificio y obtenemos 40°. Nos alejamos 30 m y el ángulo es ahora de 28°. Calcula la altura del edificio y la distancia desde la que se hizo la primera observación.**




$$\left.\begin{array}{l} h = x \cdot tg\ 40° \\ h = (x+30) \cdot tg\ 28° \end{array}\right\} \to x \cdot tg\ 40° = (x+30) \cdot tg\ 28° \to$$

$$\to x = \frac{30 \cdot tg\ 28°}{tg\ 40° - tg\ 28°} = 51{,}89 \text{ m}$$

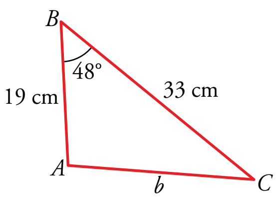
$h = 51{,}89 \cdot tg\ 40° = 43{,}54$ m

**7** **Resuelve el triángulo $ABC$ y halla su área en estos casos:**

**a) $c = 19$ cm, $a = 33$ cm, $\hat{B} = 48°$**

**b) $a = 15$ cm, $b = 11$ cm, $\hat{B} = 30°$**

a)




- Con el teorema del coseno, hallamos $b$:

$b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33\ cos\ 48° = 610{,}9 \to$

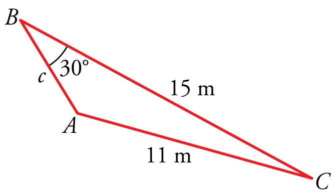
$\to b = 24{,}72$ cm

- Del mismo modo, hallamos $\hat{A}$:

$33^2 = 19^2 + 24{,}72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24{,}72\ cos\ \hat{A} \to cos\ \hat{A} = -0{,}1245 \to \hat{A} = 97°\ 9'$

- $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 34°\ 51'$
- Área $= \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\ \hat{B} = 232{,}98$ cm$^2$

b)




- Hallamos $\hat{A}$ con el teorema de los senos:

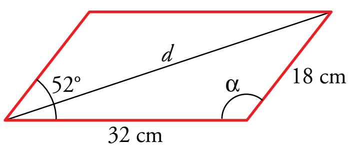
$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \to \frac{15}{sen\ \hat{A}} = \frac{11}{sen\ 30°} \to sen\ \hat{A} = 0{,}6818$$

- Hay dos soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = 42°\ 59'\ 9'' \\ \hat{C}_1 = 107°\ 0'\ 51'' \end{array}\right\} \to \frac{11}{sen\ 30°} = \frac{c_1}{sen\ 107°\ 0'\ 51''} \to c_1 = 21{,}04 \text{ cm};\ \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\ \hat{B} = 78{,}9 \text{ cm}^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_2 = 137°\ 0'\ 51'' \\ \hat{C}_2 = 12°\ 59'\ 9'' \end{array}\right\} \to \frac{11}{sen\ 30°} = \frac{c_2}{sen\ 12°\ 59'\ 9''} \to c_2 = 4{,}94 \text{ cm};\ \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\ \hat{B} = 18{,}53 \text{ cm}^2$$

**8** **Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52°. Halla la longitud de la diagonal mayor.**



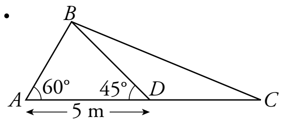

$\alpha = 180° - 52° = 128°$

Calculamos $d$ aplicando el teorema del coseno:

$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32\ cos\ 128° = 2\,057{,}24$

$d = 45{,}36$ cm es la medida de la diagonal.

**9** **De esta figura, sabemos que $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\hat{A} = 60°$, $\widehat{ADB} = 45°$ y $\overline{AD} = 5$ m. Calcula $\overline{BC}$.**




$\widehat{ABD} = 180° - (60° + 45°) = 75°$

$$\frac{5}{sen\,75°} = \frac{\overline{BD}}{sen\,60°} \rightarrow \overline{BD} = \frac{5 \cdot sen\,60°}{sen\,75°} = 4,48 \text{ m}$$

$\widehat{BDC} = 180° - 45° = 135°$

$\overline{BC}^{\,2} = 4,48^2 + 4,48^2 - 2 \cdot 4,48 \cdot 4,48 cos\,135° = 68,525 \rightarrow \overline{BC} = 8,28$ m