# Resuelve

## Página 187

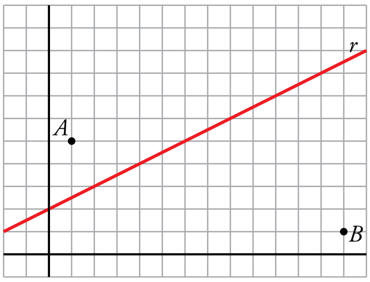
### El embarcadero

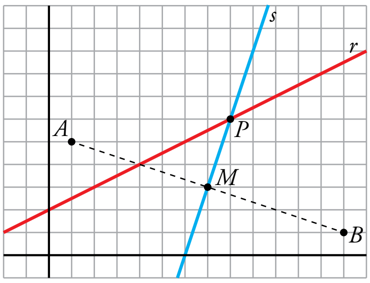

**Tenemos dos pueblos, $A$ y $B$, cada uno a un lado de un canal. Se desea construir un embarcadero situado exactamente a la misma distancia de los dos pueblos. ¿Dónde habrá que hacerlo?**

**Para decidirlo, colocamos unos ejes coordenados y razonamos del siguiente modo:**

**Los puntos de la mediatriz del segmento $AB$ están a la misma distancia de los extremos de este. Por tanto, el punto buscado, $P$, es la intersección de la recta $r$ (el canal) con la recta $s$ (perpendicular a $AB$ en su punto medio).**

**Halla las coordenadas de $P$.**




Coordenadas de $A = (1, 5)$

Coordenadas de $B = (13, 1)$

Hallamos las coordenadas de $M$, punto medio entre $A$ y $B$.

$$M = \left(\frac{1+13}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (7, 3)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB} = (13, 1) - (1, 5) = (12, -4)$

La recta $s$ pasa por $M$ y tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 12)$.

La ecuación de $s$ es: $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12}$

La ecuación de $r$ es $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

$P$ es la solución del sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 2 \\ \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12} \end{cases} \rightarrow x = 8,\ y = 6$

*Solución:* $P = (8, 6)$

# 1 Puntos y vectores en el plano

## Página 189

**Hazlo tú. Averigua $m$ para que $P(1, 4)$, $Q(5, -2)$ y $R(m, 0)$ estén alineados.**

$\overrightarrow{PQ} = (4, -6)$

$\overrightarrow{QR} = (m, 0) - (5, -2) = (m - 5, 2)$

$$\frac{4}{m-5} = \frac{-6}{2} \to m - 5 = \frac{-3}{4} \to m = \frac{17}{4} = 4,25$$

**1 Halla las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$, siendo $M(7, -5)$ y $N(-2, -11)$.**

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

**2 Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (-3, -14) \\ \overrightarrow{QR} = (6, 28)\end{array}\right\} \to \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \to A,\ B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

**3 Calcula el valor de $k$ para que los siguientes puntos de coordenadas**

**$A(1, 7)$ $\quad B(-3, 4)$ $\quad C(k, 5)$**

**estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-4, -3) \\ \overrightarrow{BC} = (k+3, 1)\end{array}\right\} \to \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \to -4 = -3k - 9 \to 3k = -5 \to k = \frac{-5}{3}$$

## Página 190

**4 Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:**

**a) Halla el punto medio de $PQ$.**

**b) Halla el simétrico de $P$ respecto de $Q$.**

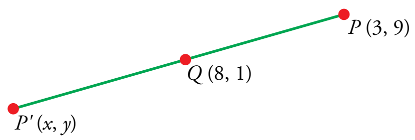
**c) Halla el simétrico de $Q$ respecto de $P$.**

**d) Obtén un punto $A$ de $PQ$ tal que $\overrightarrow{PA} / \overrightarrow{AQ} = 2/3$.**

**e) Obtén un punto $B$ de $PQ$ tal que $\overrightarrow{PB} / \overrightarrow{PQ} = 1/5$.**

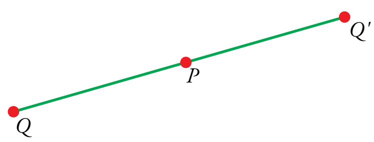
a) $M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3+x}{2} = 8 \to x = 13 \\ \dfrac{9+y}{2} = -1 \to y = -11\end{array}\right\} P'(13, -11)$$




c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de $Q$ respecto de $P$.

Así: $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x'+8}{2} = 3 \to x' = -2 \\ \dfrac{y'+(-1)}{2} = 9 \to y' = 19\end{array}\right\} Q'(-2, 19)$$



d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \rightarrow (x-3,\ y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = \dfrac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5 \\ y-9 = \dfrac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5 \end{array}\right\} A(5,\ 5)$$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x-3,\ y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y-9 = -2 \rightarrow y = 7 \end{array}\right\} B(4,\ 7)$$

# 2 Ecuaciones de una recta

## Página 192

**Hazlo tú. Obtén las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(7, -4)$ y $Q(3, 2)$.**

Vector de posición de $P$: $\vec{p} = (7, -4)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, 2) - (7, -4) = (-4, 6)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 7 - 4\lambda \\ y = -4 + 6\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x-7}{-4} = \frac{y+4}{6}$$

**Hazlo tú. Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y}{-7}$.**

Vector de posición de $P$: $\vec{p} = (5, 0)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (0, -7)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -7\lambda \end{cases}$$

## Página 194

**Hazlo tú. Obtén todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 5)$ y $B(3, -5)$.**

Vector de posición de $A$: $\overrightarrow{OA} = (-2, 5)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, -5) - (-2, 5) = (5, -10) = 5(1, -2)$

Vamos a tomar como vector de dirección de la recta un vector proporcional al anterior: $\vec{d'} = (1, -2)$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-2}$$

Ecuación implícita:

$$-2(x+2) = y - 5 \rightarrow -2x - 4 = y - 5 \rightarrow -2x - y + 1 = 0$$

Ecuación explícita:

$$y = -2x + 1$$

Ecuación punto-pendiente:

$$m = \frac{-2}{1}$$

$$y = -2(x+2) + 5$$

**Hazlo tú. Obtén la ecuación implícita de** $r: \begin{cases} x = 5t \\ y = 4 - t \end{cases}$**.**

$\frac{x}{5} = \frac{y-4}{-1} \rightarrow -x = 5y - 20 \rightarrow -x - 5y + 20 = 0$

## Página 195

**Hazlo tú. Da las ecuaciones paramétricas de la recta** $y = -2x + 7$**.**

Encontramos un punto $A$ de la recta dando a $x$ el valor 0: $x = 0 \rightarrow A = (0, 7)$

$m = -2 \rightarrow \vec{d} = (1, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \end{cases}$

**Hazlo tú. Halla las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta** $\frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{2}$**.**

Punto de la recta: $A = (5, -1)$

$\vec{d} = (0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación implícita: $x = 5$

**1 Halla las ecuaciones paramétricas, continua, implícita y explícita de la recta que pasa por** $A$ **y** $B$**, en cada caso:**

**a)** $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ **b)** $A(0, 4)$, $B(6, 0)$ **c)** $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$ **d)** $A(3, 5)$, $B(3, 2)$

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$

Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$, $B(6, 0) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x}{6} = \frac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$

Explícita: $y = \frac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$

Continua: $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$

Explícita: $y = 5$

d) $A(3, 5)$, $B(3, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (0, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x-3}{0} = \frac{y-5}{-3}$

Implícita: $x - 3 = 0$

Explícita: No existe, pues se trata de una recta vertical de ecuación $x = 3$.

**2 Obtén las ecuaciones implícita, paramétricas y continua de la recta $y = 2x + 3$.**

$y = 2x + 3$

- Buscamos dos puntos de la recta y su vector dirección:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } x=0 \to y=2\cdot 0+3=3 \to A(0,3)\\ \text{Si } x=1 \to y=2\cdot 1+3=5 \to B(1,5)\end{array}\right\} \to \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

- Implícita: $2x - y + 3 = 0$
- Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

- Continua:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-3}{2}$$

**3 a) Encuentra dos puntos, $P$ y $Q$, pertenecientes a la recta $r$: $2x - 3y + 6 = 0$.**

**b) Comprueba que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a (2, –3).**

**c) Escribe las ecuaciones paramétricas de $r$.**

**d) Escribe su ecuación explícita y comprueba que el vector $(1, m)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ ($m$ es la pendiente de $r$).**

a) $r$: $2x - 3y + 6 = 0$

Si $x = 0 \to 2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0 \to y = 2 \to P(0, 2)$

Si $x = -3 \to 2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0 \to y = 0 \to Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Despejamos $y$ en la ecuación de $r$:

$2x - 3y + 6 = 0 \to 2x + 6 = 3y \to \frac{2}{3}x + 2 = y$

Explícita: $y = \frac{2}{3}x + 2$

$m = \frac{2}{3} \to (1, m) = \left(1, \frac{2}{3}\right)$

El vector $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ si sus coordenadas son proporcionales:

$(-3, -2) = \lambda\left(1, \frac{2}{3}\right) \to \lambda = -3$

Los vectores son proporcionales y, por tanto, paralelos.

# 3 Haz de rectas

## Página 196

**1 Halla la recta del haz de centro $P(-3, 5)$ que pasa por $(8, 4)$.**

Hemos de hallar la recta que pasa por $P(-3, 5)$ y $Q(8, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (11, -1)$

$r: \dfrac{x+3}{11} = \dfrac{y-5}{-1}$

**2 Los haces de rectas cuyos centros son $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$ tienen una recta en común. ¿Cuál es?**

Es la recta que pasa por $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-10, 4)$

$r: \dfrac{x-4}{-10} = \dfrac{y-0}{4}$

**3 Las siguientes rectas:**

$$r: 3x - 5y - 7 = 0 \qquad s: x + y + 4 = 0$$

**forman parte de un mismo haz. ¿Cuál de las rectas de ese haz tiene pendiente 4?**

- El centro del haz es el punto de corte de $r$ y $s$. Lo hallamos:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y - 7 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = -y - 4$$

$$3(-y-4) - 5y - 7 = 0 \rightarrow -8y - 19 = 0 \rightarrow y = -\frac{19}{8}$$

$$x = -y - 4 = \frac{19}{8} - 4 = -\frac{13}{8}$$

El centro del haz es el punto $P\left(-\dfrac{13}{8}, -\dfrac{19}{8}\right)$.

- Ecuación de la recta que pasa por $P$ y tiene pendiente igual a 4:

$$y = \frac{19}{8} + 4\left(x + \frac{13}{8}\right) \rightarrow 32x - 8y + 7 = 0$$

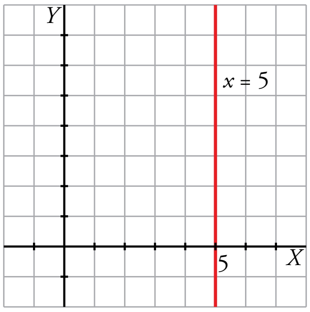
# 4 Reflexiones sobre ecuaciones con y sin "parámetros"

## Página 197

**1** **Representa.**

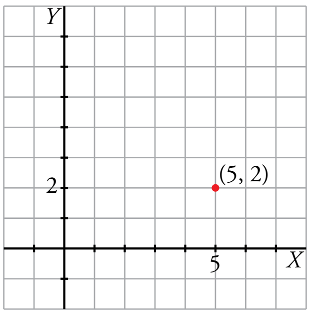
**a)** $x = 5$ **b)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = \lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ **d)** $y = 2$ **e)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$

a)

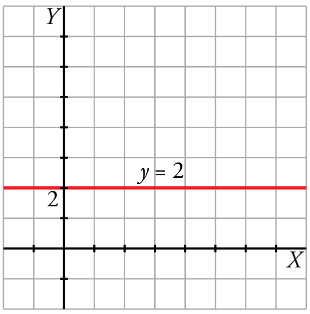



b) Es la misma que la del apartado a).

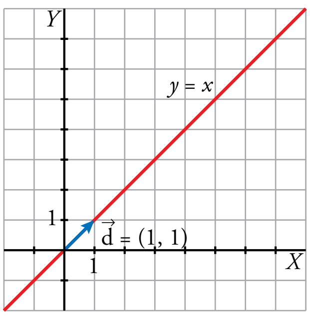
c) Es un punto, el punto (5, 2).




d)




e) Pasa por $O = (0, 0)$. Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$.




f) Tenemos cualquier punto del plano, pues no hay ninguna restricción.

# 5 Paralelismo y perpendicularidad

## Página 198

**1** **¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es paralela a $\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{2}$:**

**a)** $2x + 5y - 4 = 0$ **b)** $5x + 2y = 0$ **c)** $2x - 5y + 1 = 0$

**d)** $y = \frac{5}{2}x + 4$ **e)** $y = \frac{-5}{2}x + 1$ **f)** $y = \frac{2}{5}x - 3$

El vector de dirección de la recta $\frac{x-2}{5}=\frac{y-2}{2}$ es $\vec{d} = (5, 2)$.

a) Vector de dirección: $(-5, 2) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

b) Vector de dirección: $(-2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

d) $m = \frac{5}{2} \rightarrow$ Vector de dirección: $(2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

e) $m = -\frac{5}{2} \rightarrow$ Vector de dirección: $(2, -5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

f) $m = \frac{2}{5} \rightarrow$ Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

**2** **¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es perpendicular a $x - 2y + 4 = 0$:**

**a)** $\begin{cases} x = y + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

**d)** $y = 2x + 1$ **e)** $y = -2x + 3$ **f)** $y = \frac{x}{2}$

El vector perpendicular a la recta $x - 2y + 4 = 0$ es $(1, -2)$.

a) Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

b) Vector de dirección: $(-2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

d) $m = 2 \rightarrow$ Vector de dirección: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso

e) $m= -2 \rightarrow$ Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

f) $m = \frac{1}{2} \rightarrow$ Vector de dirección: $(2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

## Página 199

**Hazlo tú.** **Halla una paralela y una perpendicular a $r: \frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ que pasen por $(7, -5)$.**

El vector de dirección de la recta $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ es $\vec{d} = (3, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 3)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

**Hazlo tú. Halla la recta $r_1 \,//\, r$: $5x - y + 4 = 0$ que pase por $(3, -5)$; y la recta $r_2 \perp r$ que pase por $(0, 0)$.**

El vector de dirección de la recta $r$: $5x - y + 4 = 0$ es $\vec{d} = (-1, -5) = -(1, 5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, -1)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -5 + 5\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -5 - \lambda \end{cases}$$

**Hazlo tú. Dada la recta $r$: $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$, halla:**

**a) Las ecuaciones paramétricas de $r_1 \perp r$ que pase por $(-2, 0)$.**

**b) La ecuación implícita de $r_2 \,//\, r$ que pase por $(0, -3)$.**

**c) La ecuación explícita de $r_3 \,//\, r$ que pase por $(-3, 5)$.**

El vector de dirección de la recta $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$ es $\vec{d} = (2, -5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, 2)$.

a) Recta perpendicular:

$$r_1: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

b) Recta paralela:

$$r_2: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-5} \to -5x = 2y + 6 \to -5x - 2y - 6 = 0$$

c) Recta paralela:

$$r_3: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-5} \to -5x - 15 = 2y - 10 \to -5x - 2y - 5 = 0 \to y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

**3 Escribe las ecuaciones paramétricas de dos rectas que pasen por $P(4, -3)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a $r$: $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$.**

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \to \text{Vector dirección de } r\text{: } \vec{v}_r = (-5, 2)$$

- Recta paralela a $r$ que pasa por $P$:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

  $$s: \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

- Recta perpendicular a $r$ que pasa por $P$:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_l = (2, 5)$

  $$l: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$$

**4** **Dada la recta $r$: $y = -2x + 5$, halla:**

**a) Las ecuaciones paramétricas de una recta $r_1$ paralela a $r$ que pase por $(0, -2)$.**

**b) La ecuación explícita de una recta $r_2$ paralela a $r$ y de otra $r_3$, perpendicular a $r$ y que ambas pasen por $(0, 1)$.**

**c) La ecuación implícita de una recta $r_4$, perpendicular a $r$ y que pase por $(-2, 5)$.**

$r: y = -2x + 5$

Pendiente $m = -2 \to$ Vector de dirección de la recta es $\vec{d} = (1, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 1)$.

a) $r_1: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

b) $r_2: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \to -2x = y - 1 \to y = -2x + 1$

$r_3: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} \to x = 2y - 2 \to x - 2y + 2 = 0 \to y = \dfrac{1}{2}x + 1$

c) $r_4: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{1} \to x + 2 = 2y - 10 \to x - 2y + 12 = 0$

**5** **Dada $s$: $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$, halla:**

**a) La ecuación continua de una recta $r_1$ perpendicular a $s$ que pase por $P_1(5, -3)$.**

**b) La ecuación implícita de $r_2$ paralela a $s$ que pase por $P_2(0, 4)$.**

**c) La ecuación explícita de $r_3$ perpendicular a $s$ que pase por $P_3(-3, 0)$.**

$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \to P(5, 0) \in s;\ \vec{v}_s = (-1, 3)$

a) El vector dirección de $r_1$ es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$r_1: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+3}{1}$

b) El vector dirección de $r_2$ es el mismo que el de $s$: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$. $P_2(0, 4) \in r_2$.

$r_2: \dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y-4}{3} \to 3x = -y + 4 \to 3x + y - 4 = 0$

c) El vector dirección de $r_3$ es el mismo que el de $r_1$: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$. $P_3(-3, 0) \in r_3$.

$r_3: \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-0}{1} \to y = \dfrac{1}{3}x + 1$

**6** **Determina las ecuaciones implícitas de dos rectas que pasen por $P(-3, 4)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a $r$: $5x - 2y + 3 = 0$.**

$r: 5x - 2y + 3 = 0 \to 5x + 3 = 2y \to y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

La pendiente de $r$ es $m_r = \dfrac{5}{2}$

- Recta $s$ paralela a $r$ que pasa por $P(-3, 4)$:

  $m_s = m_r = \dfrac{5}{2}$

  $s: y - 4 = \dfrac{5}{2}(x + 3) \to s: 5x - 2y + 23 = 0$

- Recta $l$ perpendicular a $r$ que pasa por $P(-3, 4)$:

  $m_l = -\dfrac{l}{m_r} = -\dfrac{2}{5}$

  $l: y - 4 = -\dfrac{2}{5}(x + 3) \to l: 2x + 5y - 14 = 0$

# 6 Posiciones relativas de dos rectas

### Página 200

**Hazlo tú. Determina la posición relativa y el punto de corte, si existe, de las rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 5t \end{cases} \text{ y } r_2: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 6 - t \end{cases}$$

Vector de dirección de $r_1$: $\vec{d} = (2, -5)$

Vector de dirección de $r_2$: $\vec{d}' = (1, -1)$

No son proporcionales, luego las rectas se cortan.

Punto de corte:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -4 + s \\ -5 - 5t = 6 - s \end{cases} \to s = 1, \; t = -2$$

Para esos valores de los parámetros: $x = -4 + 1 = -3$; $y = 6 - 1 = 5$

Punto de corte: $(-3, 5)$

**Hazlo tú. Halla la posición relativa de las rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \text{ y } r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 3 + 10t \end{cases}$$

Vector de dirección de $r_1$: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de $r_2$: $\vec{d}' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de $r_1$: $(0, 1)$

Sustituimos en $r_2$:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4t \\ 1 = 3 + 10t \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4t \to t = -2 \\ 1 = 3 + 10t \to t = -\frac{1}{5} \end{cases} \to \text{No hay solución, las rectas son paralelas.}$$

**Hazlo tú. Determina la posición relativa de** $r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$ **y** $r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 21 + 10t \end{cases}$.

Vector de dirección de $r_1$: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de $r_2$: $\vec{d}' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de $r_1$: $(0, 1)$

Sustituimos en $r_2$:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4t \\ 1 = 21 + 10t \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4t \to t = -2 \\ 1 = 21 + 10t \to t = -2 \end{cases}$$

Para $t = -2$ obtenemos el punto $(0, 1)$ que está en las dos rectas.

Las rectas $r_1$ y $r_2$ tienen la misma dirección y un punto en común, luego son coincidentes.

## Página 201

**1 Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:**

**a)** $r: 3x + 5y - 8 = 0,\ \ s: 6x + 10y + 4 = 0$

**b)** $r: 2x + y - 6 = 0,\ \ s: x - y = 0$

**c)** $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases},\ \ s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

**d)** $r: 3x - 5y = 0,\ \ s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (3, 5)$

$s: 6x + 10y + 4 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_s = (6, 10)$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \ \rightarrow$ Las dos rectas son paralelas.

b) $r: 2x + y - 6 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (2, 1)$

$s: x - y = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \ \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_r = (5, -3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \ \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

d) $r: 3x - 5y = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (3, -5) \ \rightarrow\ \vec{v}_r = (5, 3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_s = (5, 3),\ \ P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

# 7 Ángulo de dos rectas

## Página 202

**1 Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

**a)** $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

**b)** $r_1: x + 2y - 17 = 0$, $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

**c)** $r_1: y = 5x - 1$, $r_2: y = 4x + 3$

**d)** $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1) \cdot (-4,3)|}{|(-2,1)|\,|(-4,3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5}) \cdot (5)} \approx 0,9838699101 \ \to\ \alpha = 10°\ 18'\ 17,45''$$

b) Vector normal de $r_1$: $\vec{n}_1 = (1, 2)$

Vector normal de $r_2$: $\vec{n}_2 = (3, -5)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(1,2) \cdot (3,-5)|}{|(1,2)|\,|(3,-5)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0,5368754922 \ \to\ \alpha = 57°\ 31'\ 43,71''$$

c) $m_{r_1} = 5$; $m_{r_2} = 4$

$$tg\ \alpha = \left| \frac{4-5}{1+5 \cdot 4} \right| = \frac{1}{21} \approx 0,0476190 \ \to\ \alpha = 2°\ 43'\ 34,72''$$

d) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1) \cdot (5,3)|}{|(-2,1)|\,|(5,3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0,5368754922 \ \to\ \alpha = 57°\ 31'\ 43,71''$$

# 8 Cálculo de distancias

## Página 203

**Hazlo tú. Halla el área de este mismo triángulo tomando como base $BC$ y como altura la distancia de $A$ a la recta $BC$.**

Base: $c = \overline{BC} = \sqrt{(2-6)^2+(5-5)^2} = \sqrt{16} = 4$ u

La recta $BC$ es: $y = 5$

La altura es:

$$h_c = dist\,[A, BC] = \frac{|-5|}{\sqrt{1}} = 5 \text{ u}$$

Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ u}^2$$

**1** **$P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$**

**$r$: $3x - 4y + 9 = 0$, $s$: $5x + 15 = 0$**

**Halla la distancia entre los dos puntos.**

**Halla también las distancias de cada uno de los puntos a cada recta.**

$P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$

$r$: $3x - 4y + 9 = 0$

$s$: $5x + 15 = 0$

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(15, 8)| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$dist\,(P, r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4(-3) + 9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$dist\,(P, s) = \frac{|5 \cdot (-6) + 15|}{\sqrt{5^2+0^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 + 9|}{5} = \frac{16}{5}$$

$$dist\,(Q, s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

**2** **a) Halla el área del triángulo de vértices $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$ con la fórmula de Herón.**

**b) Hállala, también, mediante la aplicación de la fórmula habitual $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$, siendo $b$ la medida del lado $AC$. ¿Hay otra forma más sencilla?**

a) $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$

Fórmula de Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left.\begin{array}{l} a = |\overrightarrow{BC}| = |(8, 0)| = 8 \\ b = |\overrightarrow{AC}| = |(8, -6)| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10 \\ c = |\overrightarrow{AB}| = |(0, -6)| = 6 \end{array}\right\}\ p = \frac{8+10+6}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{12(12-8)(12-10)(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ u}^2$$

b) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$

- $b = |\overrightarrow{AC}| = 10$ (del apartado anterior)
- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 8)$ y $C(5, 2)$:

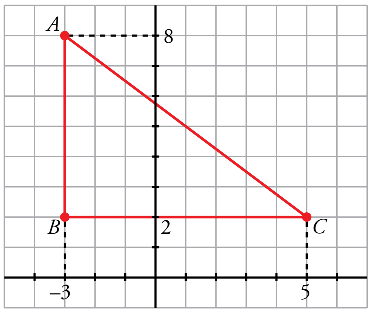
  Pendiente: $m = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4} \rightarrow y = 2 - \dfrac{3}{4}(x - 5) \rightarrow r: 3x + 4y - 23 = 0$

- $h_b = dist\,[B, r] = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{24}{5}$

  $S = \dfrac{10 \cdot (24/5)}{2} = 24 \text{ u}^2$

Habría sido más sencillo si hubiéramos dibujado el triángulo.

Observa:




Es claro que $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 8$.

Como el triángulo es rectángulo, $S = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ u}^2$.

# Ejercicios y problemas resueltos

**Página 204**

## 1. Puntos y vectores en el plano

**Hazlo tú. Haz los cálculos para llegar a la solución $D'(8, 3)$ de este problema.**

$\overrightarrow{BC} = (5, 6) - (3, 6) = (2, 0)$

$\overrightarrow{AD} = (x, y) - (0, 3) = (x, y - 3)$

$\overrightarrow{AB} = (3, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (x, y) - (5, 6) = (x - 5, y - 6)$

Primera condición:

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD} \to y - 3 = 0 \to y = 3$$

Segunda condición:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \to \sqrt{18} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} \to 18 = (x-5)^2 + (y-6)^2 \to 18 = x^2 - 10x + y^2 - 12y + 61$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ 18 = x^2 - 10x + y^2 - 12y + 61 \end{cases} \to 18 = x^2 - 10x + (3)^2 - 12 \cdot 3 + 61 \to x = 8,\ x = 2$$

Si $x = 2$, obtenemos un paralelogramo, luego $x = 8$, $y = 3$.

$D' = (8, 3)$

## 2. Simétrico de un punto respecto de una recta

**Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(2, 2)$ respecto de la recta $r: y = 6 - x$.**

Pendiente de $r$: $m = -1$

Pendiente de la recta $s$ perpendicular a $r$: $m' = -\dfrac{1}{-1} = 1$

Vector de dirección de la recta $s$: $\vec{d}' = (1, 1)$

Ecuación de $s$: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = y - 2 \to x - y = 0$

$M$ es el punto de intersección de las rectas $r$ y $s$:

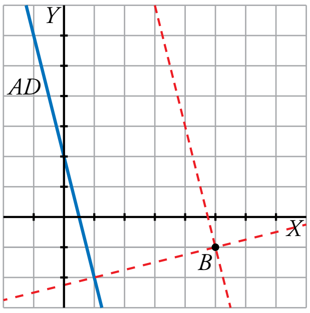
$$\begin{cases} y = 6 - x \\ x - y = 0 \end{cases} \to x = 3,\ y = 3 \to M = (3, 3)$$

$M$ es el punto medio entre $A$ y $A' = (x, y)$

$$(3, 3) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \to \begin{cases} 3 = \dfrac{x+2}{2} \to x = 4 \\ 3 = \dfrac{y+2}{2} \to y = 4 \end{cases} \to A' = (4, 4)$$

## 3. Rectas paralelas y perpendiculares a una dada

**Hazlo tú. Del cuadrado $ABCD$ conocemos el vértice $B(5, -1)$ y la ecuación del lado $AD$, $y = -4x + 2$. Halla la ecuación de los lados $BC$ y $AB$.**




El lado $BC$ es paralelo a $AD$ y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de $AD$: $m = -4$

Pendiente de $BC$: $m = -4$. Vector de dirección de $BC$: $\vec{d} = (1, -4)$

Ecuación de $BC$: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{-4}$

El lado $AB$ es perpendicular a $AD$ y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de $AB$: $m = \dfrac{1}{4}$. Vector de dirección de $BC$: $\vec{d}\,' = (4, 1)$

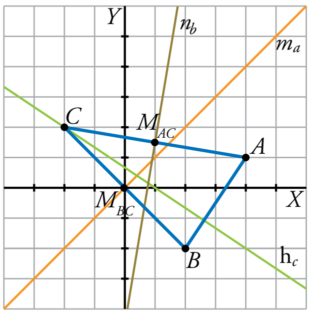
Ecuación de $AB$: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{4}$

**Página 205**

## 4. Rectas notables en un triángulo

**Hazlo tú. En el triángulo de vértices $A(4, 1)$, $B(2, -2)$ y $C(-2, 2)$ calcula la mediatriz relativa al lado $BC$, la altura que parte de $C$ y la mediana relativa al lado $AC$.**

Usamos la misma notación que en el ejercicio resuelto.




a) La mediatriz relativa al lado $BC$, $m_a$, es la perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por $M_{BC}$.

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2) - (2, -2) = (-4, 4)$

$M_{BC} = \left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$: $\vec{d}\,' = (4, 4)$

Ecuación de $m_a$: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{4} \to x = y$

b) La altura que parte de $C$, $h_C$, es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por $C$.

$\overrightarrow{AB} = (2, -2) - (4, 1) = (-2, 3)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$: $\vec{d}' = (3, 2)$

Ecuación de $h_C$: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{2}$

c) La mediana relativa al lado $AC$, $n_b$, es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y pasa por $M_{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2) - (4, 1) = (-6, 1)$

$M_{AC} = \left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{2+1}{2}\right) = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$: $\vec{d}' = (1, 6)$

Ecuación de $n_b$: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\frac{3}{2}}{6}$

## 5. Rectas paralelas a una dada a una distancia determinada

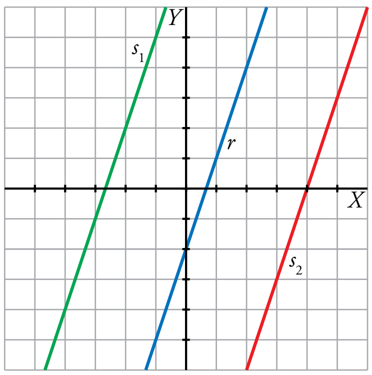
**Hazlo tú. Halla las ecuaciones de las rectas que distan $\sqrt{10}$ unidades de $r: y = 3x - 2$.**

$s_k: 3x - y + k = 0$

Punto de $r$: $P = (0, -2)$

$$dist(P, s_k) = \sqrt{10} \to \frac{|3\cdot 0-(-2)+k|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \to |k+2| = 10 \to \begin{cases} k+2=10 \to k=8 \\ k+2=-10 \to k=-12 \end{cases}$$

Las rectas buscadas son $s_1: 3x - y + 8 = 0$ y $s_2: 3x - y - 12 = 0$.




## 6. Distancias y área en un triángulo

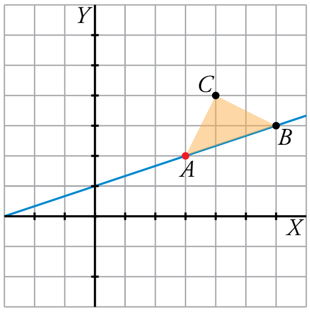
**Hazlo tú. Resuelve este mismo ejercicio para $r: x - 3y + 3 = 0$, $B(6, 3)$ y $C(4, 4)$.**

a) Sustituimos las coordenadas de los vértices $B$ y $C$ en la ecuación de $r$. Obtenemos que $B \in r$ y $C \notin r$. Por tanto, el lado desigual es $AB$: $dist(A, C) = dist(B, C) \neq dist(A, B)$.

Como $A \in r$, sus coordenadas deben cumplir su ecuación, es decir, $A = (3y - 3, y)$.

$dist(A, C) = dist(B, C) \to \sqrt{(4-(3y-3))^2 + (4-y)^2} = \sqrt{4+1} \to 10y^2 - 50y + 65 = 5 \to y_1 = 3,\ y_2 = 2$

Obtenemos dos soluciones, $A(3, 2)$ y $A'(6, 3)$, pero $A' = B$ no es válida.




b) Tomando como base $AB$, Área $= \frac{1}{2}$ base · altura $= \frac{1}{2} \cdot dist\,(A, B) \cdot dist\,(C, r)$

$dist\,(A, B) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$ u

$dist\,(C, r) = \dfrac{|4-12+3|}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ u

Área $= \frac{1}{2}\sqrt{10}\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ u$^2$

**Página 206**

## 8. Recta que pasa por un punto y forma un ángulo determinado con otra recta dada

**Hazlo tú. Halla la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y forme un ángulo de 60° con la recta $r: y = x + 3$.**

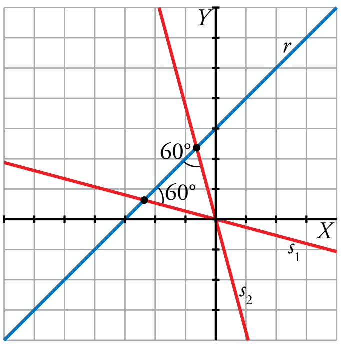
Pendiente de $r$: $m_r = 1$

Pendiente de $s$: $m_s$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \begin{cases} \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = \sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\ \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = -\sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Como pasa por $O = (0, 0)$:

$$s_1: y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x; \quad s_2: y = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}x$$



**Página 207**

## 9. Recta simétrica a otra respecto a una tercera recta dada

**Hazlo tú. Halla la recta $t$, simétrica de la recta $r: -2x + 3y + 2 = 0$ respecto de la recta $s: -5x + y + 18 = 0$.**

Calculamos $A$, el punto de intersección de $r$ y $t$:

$$\begin{cases} -2x + 3y + \ \ 2 = 0 \\ -5x + \ \ y + 18 = 0 \end{cases} \to A = (4, 2)$$

Ahora, tomamos un punto $P$ de $r$: $P = (1, 0)$

Calculamos la recta $a$ perpendicular a $s$ que pasa por $P = (1, 0)$:

$$\vec{d}_s = (-1, -5) \to \vec{d}_a = (5, -1)$$

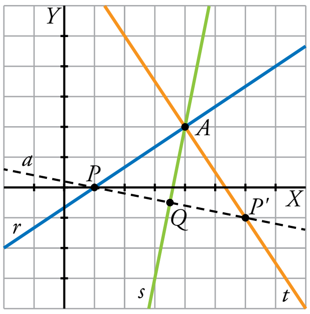
$$a: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-1} \to -x + 1 = 5y \to -x - 5y + 1 = 0$$

Determinamos $Q$, punto de corte de $a$ y $s$:

$$\begin{cases} -x - 5y + \ \ 1 = 0 \\ -5x + \ \ y + 18 = 0 \end{cases} \to Q = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculamos $P' = (x, y)$, simétrico de $P$ respecto a $Q$:

$$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \to P' = (6, -1)$$




La recta $t$ pasa por $A = (4, 2)$ y por $P'$.

$$\overrightarrow{AP'} = (6, -1) - (4, 2) = (2, 3)$$

$$t: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3}$$

## 10. Cálculo del circuncentro de un triángulo

**Hazlo tú. Halla el circuncentro del triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(9, -3)$.**

Calculamos la mediatriz $m_c$ del lado $AB$, que pasa por el punto medio de $AB$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \to \overrightarrow{d_{m_c}} = (1, -1)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$m_c: \frac{x - \frac{7}{2}}{1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-1} \to -x + \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \to -x - y + 5 = 0$$

Calculamos $m_b$, mediatriz del lado $AC$ que pasa por el punto medio de $AC$:

$$\overrightarrow{AC} = (6, -4) \rightarrow \overrightarrow{d_{m_b}} = (4, 6)$$

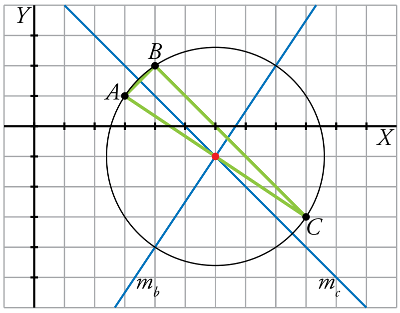
$$M_{AC} = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (6, -1)$$

$$m_b: \frac{x-6}{4} = \frac{y+1}{6} \rightarrow 6x - 36 = 4y + 4 \rightarrow 6x - 4y - 40 = 0$$

Hallamos el circuncentro calculando el punto de corte de $m_c$ y $m_b$:

$$\begin{cases} -x - y + 5 = 0 \\ 6x - 4y - 40 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6, \; y = -1$$

El circuncentro es el punto (6, –1).

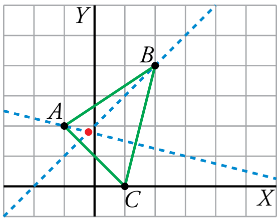


# Ejercicios y problemas guiados

## Página 208

### 1. Cálculo del ortocentro de un triángulo

***Hallar el ortocentro del triángulo de vértices A(–1, 2), B(2, 4) y C(1, 0).***




a) $\overrightarrow{BC} = (-1, -4)$

Altura $h_A$: Pasa por $A = (-1, 2)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_A}} = (-4, 1)$.

$h_A: \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x + 1 = -4y + 8 \rightarrow x + 4y - 7 = 0$

b) $\overrightarrow{AC} = (2, -2)$

Altura $h_B$: Pasa por $B = (2, 4)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_B}} = (2, 2)$.

$h_B: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{2} \rightarrow 2x - 4 = 2y - 8 \rightarrow 2x - 2y + 4 = 0$

El ortocentro es el punto de corte de $h_A$ y $h_B$:

$$\begin{cases} x + 4y - 7 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{5},\ y = \frac{9}{5}$$

Ortocentro: $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

### 2. Determinación de un punto que equidista de dos rectas

***Determinar un punto P del eje de ordenadas que equidiste de estas rectas:***

***r: 6x – 8y + 1 = 0***

***s: 4x + 3y – 3 = 0***

a) $P \in OY \rightarrow P = (0, y)$

b) $P = (0, y)$

$$dist(P, r) = dist(P, s) \rightarrow \frac{|-8y+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|3y-3|}{\sqrt{16+9}} \rightarrow \frac{|-8y+1|}{10} = \frac{|3y-3|}{5} \rightarrow$$

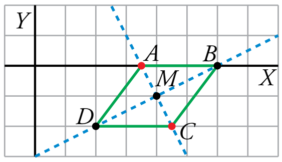
$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{-8y+1}{10} = \dfrac{3y-3}{5} \rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-8y+1}{10} = -\dfrac{3y-3}{5} \rightarrow y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Los puntos solución son:

$P = \left(0, \dfrac{1}{2}\right),\ P' = \left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$

## 3. Vértices de un rombo

***Un rombo ABCD tiene el vértice A en el eje de abscisas. Otros dos vértices opuestos son B(6, 0) y D(2, –2). Hallar A y C.***




$\overrightarrow{BD} = (-4, -2)$

$M_{BD} = \left(\dfrac{6+2}{2}, \dfrac{0-2}{2}\right) = (4, -1)$

$d$ = diagonal $AC$ perpendicular a $BD$

$d$ pasa por $M_{BD}$ y tiene vector director (–2, 4).

$$d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{4} \rightarrow 4x - 16 = -2y - 2 \rightarrow 4x + 2y - 14 = 0$$

$A$ es la intersección de $d$ y el eje $OX$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 14 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{7}{2},\ y = 0 \rightarrow A = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$C = (x, y)$ es el simétrico de $A$ respecto a $M_{BD}$:

$$(4, -1) = \left(\frac{x + \frac{7}{2}}{2}, \frac{y}{2}\right) \rightarrow C = \left(\frac{9}{2}, -2\right)$$

## 4. Vértices de un triángulo conocidas algunas rectas notables

***En un triángulo ABC conocemos el vértice A(3, 5), la ecuación de la mediatriz relativa al lado AB, $m_c$: x – 2y + 2 = 0 y la altura que pasa por B, $h_B$: 3x – y – 14 = 0. Además, sabemos que BC está sobre la altura $h_B$.***

***Calcular los vértices B y C.***

a) El lado $AC$ pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a $h_B$.

Vector de dirección del lado $AC$: $\vec{d} = (3, -1)$

Ecuación del lado $AC$: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-5}{-1} \rightarrow -x + 3 = 3y - 15 \rightarrow -x - 3y + 18 = 0$

b) $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ -x - 3y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6, y = 4 \rightarrow C = (6, 4)$

c) El lado $AB$ pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a $m_C$.

Vector de dirección del lado $AB$: $\vec{d} = (1, -2)$

Ecuación de lado $AB$: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-2} \rightarrow -2x + 6 = y - 5 \rightarrow -2x - y + 11 = 0$

d) $\begin{cases} 3x - y - 14 = 0 \\ -2x - y + 11 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 5, y = 1 \rightarrow B = (5, 1)$

# Ejercicios y problemas propuestos

**Página 209**

## Para practicar

### Coordenadas de puntos

**1 Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, siendo:**

**a) $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$**

**b) $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$**

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (0, 0) = (-1, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (0, 0) - (-1, 2) = (1, -2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 5) - (2, 3) = (-4, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (2, 3) - (-2, 5) = (4, -2)$

**2 Determina si los puntos $A(5, -2)$, $B(3, -2)$ y $C(-5, -2)$ están alineados.**

$\overrightarrow{AB} = (3, -2) - (5, -2) = (-2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -2) - (3, -2) = (-8, 0)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales, por tanto, $A$, $B$ y $C$ están alineados.

**3 Determina $k$ para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Debe ocurrir que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5, -4)\\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1)\end{array}\right\} \to \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \to 5k - 5 = -16 \to k = \frac{-11}{5}$$

**4 Sean $A(8, -2)$ y $B(-4, 2)$ dos puntos. Calcula:**

**a) $M$, punto medio de $A$ y $B$.**

**b) $S$, simétrico de $A$ respecto a $B$.**

**c) $P$, tal que $A$ sea el punto medio del segmento $BP$.**

a) $M = \left(\frac{8-4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (2, 0)$

b) $B$ es el punto medio entre $A$ y $S = (x, y)$

$$(-4, 2) = \left(\frac{x+8}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \to \begin{cases} -4 = \dfrac{x+8}{2} \to x = -16 \\ 2 = \dfrac{y-2}{2} \to y = 6 \end{cases}$$

$S = (-16, 6)$

c) $P$ es el simétrico de $B$ respecto de $A$ $\to$ $A$ es el punto medio entre $B$ y $P$.

$P = (x, y)$

$$(8, -2) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \to \begin{cases} 8 = \dfrac{x-4}{2} \to x = 20 \\ -2 = \dfrac{y+2}{2} \to y = -6 \end{cases}$$

$P = (20, -6)$

**5** **Da las coordenadas del punto $P$ que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, –2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.**

Sea $P(x, y)$.

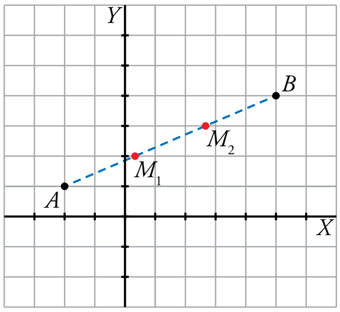
Sustituimos en la condición que nos imponen:

$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \rightarrow (x - 0, y - (-2)) = 2(3 - x, 4 - y) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2(3 - x) \\ y + 2 = 2(4 - y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 - 2x \\ y + 2 = 8 - 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow P(2, 2)$$

**6** **Determina los puntos que dividen al segmento $AB$ en tres partes iguales, siendo $A(–2, 1)$ y $B(5, 4)$.**

Buscamos las coordenadas de los puntos $M_1$, $M_2$ de la figura.




$\overrightarrow{AB} = (7, 3)$

$M_1 = (x, y)$

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (7, 3) = 3(x + 2, y - 1) \rightarrow \begin{cases} 7 = 3x + 6 \rightarrow x = \dfrac{1}{3} \\ 3 = 3y - 3 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow M_1 = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$$

$M_2 = (x, y)$

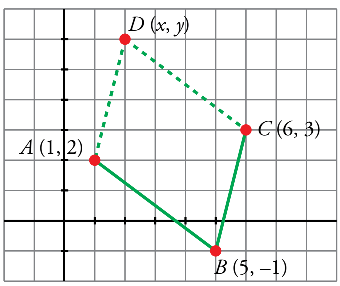
$$\overrightarrow{AM_2} = 2\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (x + 2, y - 1) = 2\left(\dfrac{1}{3} + 2, 2 - 1\right) \rightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{14}{3} \rightarrow x = \dfrac{8}{3} \\ y - 1 = 2 \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow M_2 = \left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$$

**7** **Halla las coordenadas del vértice $D$ del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, –1)$ y $C(6, 3)$.**

Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

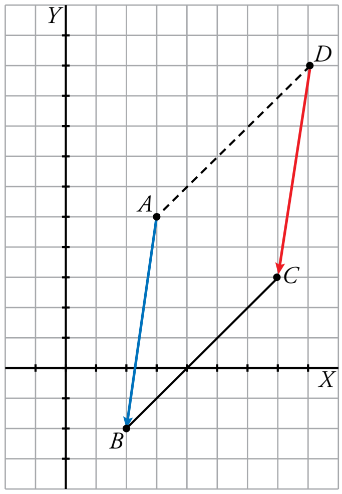
$$(5 - 1, -1 - 2) = (6 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$



**8** **Conocemos tres vértices de un rombo *ABCD*, *A*(3, 5), *B*(2, –2) y *C*(7, 3). Determina el vértice *D*.**

* ***Las diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios y son perpendiculares.***

En un rombo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.




$\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$

$D = (x, y)$

$$(-1, -7) = (7 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} -1 = 7 - x \rightarrow x = 8 \\ -7 = 3 - y \rightarrow y = 10 \end{cases} \rightarrow D = (8, 10)$$

## Ecuaciones de rectas

**9** **Escribe las ecuaciones vectoriales y paramétricas de la recta que pasa por *A* y tiene dirección paralela al vector $\vec{d}$.**

**a)** $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$

**b)** $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

**Obtén 2 puntos más para cada recta.**

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 7) + k(4, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Dando valores al parámetro $k$, obtenemos puntos: (1, 6), (5, 5)

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot k \\ y = 2k \end{cases}$

Puntos: (–1, 2), (–1, 4)

**10** **Escribe la ecuación de la recta que pasa por $P$ y $Q$ de todas las formas posibles.**

**a)** $P(6, -2)$ **y** $Q(0, 5)$ **b)** $P(3, 2)$ **y** $Q(3, 6)$

**c)** $P(0, 0)$ **y** $Q(8, 0)$ **d)** $P(0, 0)$ **y** $Q(0, -2)$

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (6, -2) + t(-6, 7)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-6}{-6} = \dfrac{y+2}{7}$

Ecuación implícita: $7x + 6y - 30 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{7}{6}x + 5$

b) $\overrightarrow{PQ} = (0, 4)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 2) + t(0, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-2}{4}$

Ecuación implícita: $x - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{PQ} = (8, 0)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(8, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-0}{8} = \dfrac{y-0}{0}$

Ecuación implícita y explícita: $y = 0$

d) $\overrightarrow{PQ} = (0, -2)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(0, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-2}$

Ecuación implícita: $x = 0$

Ecuación explícita no tiene.

**11** **Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.**

- Eje $OX$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \end{cases}$ Ecuación implícita: $y = 0$

- Eje $OY$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$ Ecuación implícita: $x = 0$

**12** **Determina un vector normal y la ecuación implícita de cada una de las siguientes rectas:**

**a)** $r: \dfrac{x+1}{-2} = y - 1$ **b)** $s: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

a) $\vec{n} = (1, 2)$

Ecuación implícita: $x + 2y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 0)$, sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular $k$.

$-1 + 0 + k = 0 \to k = 1$

$r: x + 2y + 1 = 0$

b) $\vec{n} = (5, 1)$

Ecuación implícita: $5x + y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 2)$, sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular $k$.

$5(-1) + 2 + k = 0 \to k = 3$

$s: 5x + y + 3 = 0$

**13** **Obtén, para cada una de las siguientes rectas, un vector dirección, un vector normal y su pendiente:**

**a)** $r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t \end{cases}$ **b)** $r_2: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{4}$ **c)** $r_3: x + 3 = 0$ **d)** $r_4: y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

$\vec{d}$: vector de dirección; $\vec{n}$: vector normal; $m$ = pendiente.

a) $\vec{d} = (2, 5)$; $\vec{n} = (-5, 2)$; $m = \dfrac{5}{2}$

b) $\vec{d} = (2, 4)$; $\vec{n} = (-4, 2)$; $m = 2$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $\vec{n} = (1, 0)$; $m$ no se puede calcular porque es una recta vertical.

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $\vec{n} = (2, -3)$; $m = \dfrac{2}{3}$

**14** **Determina un punto y un vector dirección de cada recta. Utilízalos para dar sus ecuaciones continuas y paramétricas.**

**a)** $3x - 2y + 1 = 0$ **b)** $y = 2(x - 1) + 7$ **c)** $x - 3 = 0$ **d)** $y = \dfrac{2}{3}x + 1$

$\vec{d}$: vector de dirección

a) $\vec{d} = (2, 3)$; $P = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{3}$

b) $\vec{d} = (1, 2)$; $P = (0, 5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{2}$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $P = (3, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y}{1}$

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $P = (0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2}$

**15** **Comprueba si el punto $P(5, -7)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:**

**a)** $r: \begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases}$ **b)** $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5}$

a) Sustituímos las coordenadas de $P$ en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases} \to \begin{cases} 5 = 5 \\ -7 = 13 - 2t \end{cases} \to t = 10$$

Hay solución, luego $P \in r$.

b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} \to \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{-7-3}{5} \to \dfrac{4}{2} \neq \dfrac{-10}{5}$ luego $P \notin s$.

**16** **Halla el valor de $k$ para que la recta $x + ky - 7 = 0$ contenga al punto $A(5, -2)$.**

$(5, -2) \to 5 + k(-2) - 7 = 0 \to -2k = 2 \to k = -1$

## Haz de rectas

**17** **Consideramos el haz de rectas de centro $(3, -2)$.**

**a) Escribe la ecuación de este haz de rectas.**

**b) ¿Qué recta de este haz pasa por el punto $(-1, 5)$?**

**c) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a $2x + y = 0$?**

**d) Halla la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.**

a) $a(x-3) + b(y+2) = 0$; o bien $y = -2 + m(x-3)$

b) Si pasa por $(-1, 5)$, entonces, sustituyendo en $y = -2 + m(x-3)$, obtenemos:

$5 = -2 + m(-1-3) \to 7 = -4m \to m = -\dfrac{7}{4}$; es decir:

$y = -2 - \dfrac{7}{4}(x-3) \to 4y = -8 - 7x + 21 \to 7x + 4y - 13 = 0$

c) Si es paralela a $2x + y = 0$ tendrá pendiente $-2$.

Por tanto, será:

$y = -2 - 2(x-3) \to y = -2 - 2x + 6 \to 2x + y - 4 = 0$

d) Una recta del haz tiene por ecuación:

$y = -2 + m(x-3) \to y = -2 + mx - 3m \to mx - y - 3m - 2 = 0$

Su distancia al origen ha de ser igual a 3:

$\dfrac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$; es decir:

$|-3m-2| = 3\sqrt{m^2+1}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2 + 1)$

$9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \to m = \dfrac{5}{12}$

Por tanto, será:

$\dfrac{5}{12}x - y - \dfrac{5}{12} - 2 = 0 \to 5x - 12y - 39 = 0$

**18** **Determina el centro del haz de rectas de ecuación $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.**

Llamamos $(x_0, y_0)$ al centro del haz. Vamos a escribir la ecuación que nos dan de la forma:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \rightarrow 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Han de ser iguales las dos ecuaciones. Por tanto:

$-3kx_0 = -3k \rightarrow x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \rightarrow y_0 = -2$

El centro del haz es el punto $(1, -2)$.

**19** **Las rectas $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ forman parte del mismo haz de rectas. ¿Qué recta de dicho haz tiene pendiente –2?**

Si $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ están en el mismo haz de rectas, el centro de dicho haz es el punto de corte de estas rectas: $P(2, 3)$.

Buscamos la recta que pasa por $P(2, 3)$ y tiene pendiente $m = -2$:

$y = -2(x - 2) + 3 \rightarrow y = -2x + 7$

## Paralelismo y perpendicularidad

**20** **El vector dirección de $r$ es $\vec{d}(2, -5)$. Halla, en cada caso, el vector dirección y la pendiente de:**

**a) Una recta paralela a $r$.**

**b) Una recta perpendicular a $r$.**

a) Tiene el mismo vector de dirección $\vec{d} = (2, -5) \rightarrow m = \frac{-5}{2}$

b) Tiene vector de dirección $\vec{d} = (5, 2) \rightarrow m = \frac{2}{5}$

**21** **Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, obtén en forma explícita las siguientes rectas:**

**a) Paralela a $r$ que pasa por $A(-1, -3)$.**

**b) Perpendicular a $r$ que pasa por $B(-2, 5)$.**

$r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 1)$

a) $\vec{v}_s = (-5, 1)$, $A(-1, -3) \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}(x + 1) - 3 \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$

b) $\vec{v}_s = (1, 5)$, $B(-2, 5) \rightarrow s: y = 5(x + 2) + 5 \rightarrow s: y = 5x + 15$

**22** **De una cierta recta $r$ conocemos su pendiente $m = \frac{2}{3}$. Halla la recta $s$ en cada caso:**

**a) $s$ es paralela a $r$ y pasa por $(0, 0)$.**

**b) $s$ es perpendicular a $r$ y pasa por $(1, 2)$.**

a) Al ser paralela, tiene la misma pendiente. Además, pasa por $(0, 0)$. Por tanto, $s: y = \frac{2}{3}x$.

b) Al ser perpendicular, su pendiente es $-\frac{1}{m} = \frac{-3}{2}$. Por tanto, $y = \frac{-3}{2}(x - 1) + 2 \rightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$.

## Página 210

**23 Halla una recta que pase por el punto $P(0, 1)$ y sea perpendicular a la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{3}$.**

$r$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 4)$ y pasa por $P(0, 1)$.

$r: \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{4}$

**24 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -3)$ y es:**

**a) Paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.**

**b) Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.**

**c) Paralela a la recta $2y - 3 = 0$.**

**d) Perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.**

a) $r$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(1, -3)$ $\to$ $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) $r$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P(1, -3)$ $\to$ $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1}$

c) Es paralela al eje $OY$ y pasa por $P(1, -3)$ $\to$ $r: y = -3$

d) Es paralela al eje $OX$ y pasa por $P(1, -3)$ $\to$ $r: x = 1$

**25 El vector normal de la recta $r$ es $\vec{n}(2, -3)$. Obtén, en cada caso, la ecuación de la recta $s$.**

**a) $s$ es paralela a $r$ y contiene al punto $P(2, -3)$.**

**b) $s$ es perpendicular a $r$ y pasa por $Q(0, 1)$.**

a) $s$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(2, -3)$.

$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) $s$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $Q(0, 1)$.

$s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3}$

**26 Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:**

**a) $r_1$, paralela al eje de abscisas que pasa por $A(-1, -2)$.**

**b) $r_2$, perpendicular al eje $OX$ que contiene a $B(1, 0)$.**

**c) $r_3$, paralela al eje de ordenadas que pasa por $C(3, 5)$.**

**d) $r_4$, perpendicular al eje $OY$ que contiene a $D(-1, 7)$.**

a) $r_1: y = -2$

b) $r_2: x = 1$

c) $r_3: x = 3$

d) $r_4: y = 7$

**27 Halla la ecuación de la paralela a $2x - 3y = 0$ cuya ordenada en el origen es $-2$.**

$r: 2x - 3y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} s \parallel r \to \text{ la pendiente de } s \text{ ha de ser igual a la de } r \\ P(0, -2) \in s \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} m_s = m_r = \frac{2}{3} \\ P(0, -2) \in s \end{array}\right.$$

Ecuación explícita: $y = \frac{2}{3}x - 2$

Ecuación implícita: $2x - 3y - 6 = 0$

**28 Dados los puntos $A(0, 1)$ y $B(4, -3)$ halla la ecuación implícita de la recta perpendicular al segmento $AB$ que pasa por su punto medio.**

$\overrightarrow{AB} = (4, -3) - (0, 1) = (-4, 4)$

$M = \left(\frac{4}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (2, -1)$

$s$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 4)$ y pasa por $M = (2, -1)$.

$$s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{4} \rightarrow x - 2 = y + 1 \rightarrow s: x - y - 3 = 0$$

**29 Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.**

Punto de corte con el eje de ordenadas $P$:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 2$$

$s$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 3)$ y pasa por $P = (0, 2)$.

$$s: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{3}$$

**30 Determina, en cada caso, una recta que pase por el punto $P(-2, -3)$ y sea:**

**a) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

**b) Perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.**

a) Bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

$s$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, -3)$.

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$$

b) Bisectriz del segundo cuadrante: $y = -x$

$s$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, 3)$.

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$$

Es la misma recta que la anterior.

**31 De un triángulo conocemos el vértice $A(1, 3)$ y la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ que contiene al lado $BC$. Halla la altura relativa al vértice $A$.**

$h_A$ es perpendicular a $r$ y pasa por $A = (1, 3)$.

$h_A$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $A = (1, 3)$.

$$h_A: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3}$$

**32 Calcula las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ y $C(3, 4)$.**

a) $m_a$ es perpendicular a $BC$ y pasa por $M_{BC}$.

$BC$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (0, 2)$.

$$M_{BC} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (3, 3)$$

$m_a$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 0)$ y pasa por $M_{BC} = (3, 3)$.

$m_a: y = 3$

b) $m_b$ es perpendicular a $AC$ y pasa por $M_{AC}$.

$AC$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{AC} = (4, 6)$.

$M_{AC} = \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{-2+4}{2}\right) = (1, 1)$

$m_b$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (6, -4)$ y pasa por $M_{BC} = (1, 1)$.

$m_b$: $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-1}{-4}$

c) $m_c$ es perpendicular a $AB$ y pasa por $M_{AB}$.

$AB$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (4, 4) = 4(1, 1)$.

$M_{AB} = \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{-2+2}{2}\right) = (1, 0)$

$m_c$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -1)$ y pasa por $M_{AB} = (1, 0)$.

$m_c$: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} \rightarrow -x + 1 = y$

**33** **Halla, en cada caso, el valor de $k$ para que la recta $r: y = kx + 1$ sea:**

**a) Paralela al eje $OX$.** **b) Perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.**

Pendiente de $r$: $m = k$

a) Pendiente del eje $OX$: $m' = 0$, luego $m = m' = 0 \rightarrow k = 0$

b) Pendiente de $2x + 3y + 7 = 0$: $m' = -\dfrac{2}{3}$, luego $m = -\dfrac{1}{m'} = \dfrac{3}{2} \rightarrow k = \dfrac{3}{2}$

**34** **Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.**

* ***Mira el problema resuelto número 2.***

Llamamos $r$ a la recta: $x - 2y - 4 = 0$.

$s$: Perpendicular a $r$ que pasa por $P = (1, 1)$

$s$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$

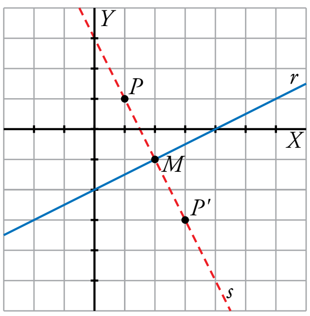
$s$: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \rightarrow -2x + 2 = y - 1 \rightarrow -2x - y + 3 = 0$

$M$ = punto de corte de las rectas

$$\begin{cases} -2x - y + 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = -1 \rightarrow M = (2, -1)$$

$M$ es el punto medio entre $P$ y $P' = (x, y)$, su simétrico respecto de $r$.

$$(2, -1) = \left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y+1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{x+1}{2} \rightarrow x = 3 \\ -1 = \dfrac{y+1}{2} \rightarrow y = -2 \end{cases} \rightarrow P' = (3, -3)$$



## Posición relativa de dos rectas

**35 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Calcula el punto de corte cuando sean secantes.**

**a)** $r: 5x + y + 7 = 0;\ \ s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$

**b)** $r: 3x + 5y + 10 = 0;\ \ s: -3x + 5y + 10 = 0$

**c)** $r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases};\ \ s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

**d)** $r: y = 2x + 1;\ \ s: y = \dfrac{-1}{2}x + 1$

a) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 5x + y + 7 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (5, 1) \ \rightarrow\ \vec{v}_r = (-1, 5)$

$s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_s = (2, -10)$

Como los vectores dirección son proporcionales $(\vec{v}_s = -2\vec{v}_r)$, las rectas o son paralelas o son coincidentes.

Como $P(1, -3) \in s$ y $P \notin r$, las rectas son paralelas.

b) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 3x + 5y + 10 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (3, 5) \ \rightarrow\ \vec{v}_r = (-5, 3)$

$s: -3x + 5y + 10 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_s = (-3, 5) \ \rightarrow\ \vec{v}_s = (5, 3)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas se obtiene el punto de corte, (0, –2).

c) Buscamos un vector dirección de cada recta

$r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_r = (3, 1)$

$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_s = (1, 2)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

El punto de corte se obtiene tomando $t = 1$ en la recta $r$ y $t = 2$ en la recta $s$. Es el punto (2, 4).

d) $m_r = 2;\ \ m = -\dfrac{1}{2} \ \rightarrow$ Las rectas son perpendiculares.

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases} \ \rightarrow\ x = 0, y = 1 \ \rightarrow$ Punto de corte $P = (0, 1)$.

**36 Calcula el valor de los parámetros $k$ y $t$ para que las siguientes rectas se corten en el punto $A(1, 2)$:**

**$r: kx - ty - 4 = 0$ $\qquad$ $s: 2tx + ky - 2 = 0$**

$\left.\begin{array}{l} A \in r \ \rightarrow\ k \cdot 1 - t \cdot 2 - 4 = 0 \\ A \in s \ \rightarrow\ 2t \cdot 1 + k \cdot 2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} k - 2t - 4 = 0 \\ 2k + 2t - 2 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $k = 2,\ t = -1$

**37 Determina $k$ para que las rectas $r$ y $s$ sean paralelas.**

$r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2} \qquad s: \dfrac{x+5}{-6} = \dfrac{y-1}{k}$

Para que sean paralelas, sus vectores dirección han de ser proporcionales, es decir:

$\dfrac{3}{-6} = \dfrac{-2}{k} \ \rightarrow\ k = 4$

**38** **Halla el valor de $k$ para que estas rectas sean coincidentes:**

**$r$: $2x + 3y + 5 = 0$**

$$s: \begin{cases} x = -6t + k \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

Expresamos ambas rectas en forma implícita:

$r$: $2x + 3y + 5 = 0$

$s$: $4x + 6y - 12 - 4k = 0$

Para que $r = s$, estas ecuaciones tienen que ser proporcionales, y por tanto:

$$-12 - 4k = 10 \to k = \frac{22}{-4} = \frac{-11}{2}$$

**39** **Calcula $k$ para que $r$ y $s$ sean perpendiculares.**

**$r$: $y = 2x + 1$**

**$s$: $3x + ky + 3 = 0$**

$m_r = 2$; $m = -\dfrac{3}{k}$

Para que sean perpendiculares, $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Luego, $2 = \dfrac{k}{3} \to k = 6$

## Ángulos

**40** **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

**a)** **$r$: $y = 2x + 5$; $s$: $y = -3x + 1$**

**b)** **$r$: $3x - 5y + 7 = 0$; $s$: $10x + 6y - 3 = 0$**

**c)** $r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$

**d)** **$r$: $2x - y = 0$; $s$: $2y + 3 = 0$**

a) $\left.\begin{array}{l} r\!: y = 2x + 5 \\ s\!: y = -3x + 1 \end{array}\right\} \to$ sus pendientes son: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \to \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \to cos\ \alpha = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{|30 - 30|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0 \to \alpha = 90°$

c) Los vectores dirección de esas rectas son $\vec{d}_1 = (-1, 2)$ y $\vec{d}_2 = (-3, 1)$.

Entonces:

$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a}_2 = (0, 2) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2} \to$

$$\to cos\ \alpha = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}4472 \to \alpha = 63°\ 26'\ 5{,}82''$$

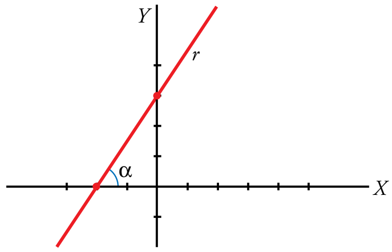
**41** **¿Qué ángulo forma $3x - 2y + 6 = 0$ con el eje de abscisas?**

* ***La pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma con el eje de abscisas. Halla el ángulo con la pendiente de la recta.***

La pendiente de $r$ es $m_r = \frac{3}{2}$.

La pendiente de $r$ es, además, $tg\,\alpha$:

$m_r = tg\,\alpha \rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha = 56° \; 18' \; 35{,}8''$

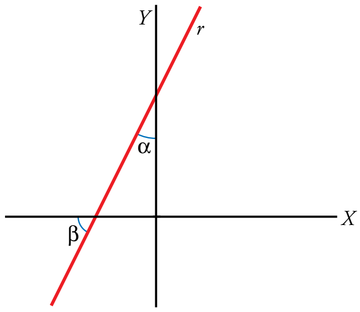



**42** **¿Qué ángulo forma la recta $2x - y + 5 = 0$ con el eje de ordenadas?**

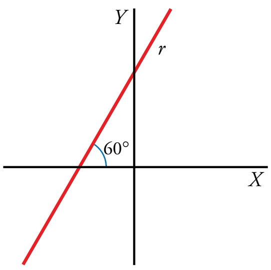
El ángulo pedido, $\alpha$, es complementario de $\beta \rightarrow tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\alpha}$

Por otro lado, $tg\,\beta = m_r = 2$:

$tg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26° \; 33' \; 54{,}2''$




**43** **Calcula $n$ de modo que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje $OX$.**




$$\left. \begin{array}{l} tg\,60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\frac{3}{n} \end{array} \right\} \text{ Como } tg\,60° = m_r, \text{ se tiene que:}$$

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \rightarrow n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

**44** **Calcula $m$ y $n$ en estas rectas sabiendo que $r$ pasa por el punto $P(1, 4)$ y que $r$ y $s$ forman un ángulo de 45°:**

***r*: $mx - 2y + 5 = 0$** ***s*: $nx + 6y - 8 = 0$**

$P \in r \rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \rightarrow m = 3$

$r: 3x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow m_r = \frac{3}{2}$

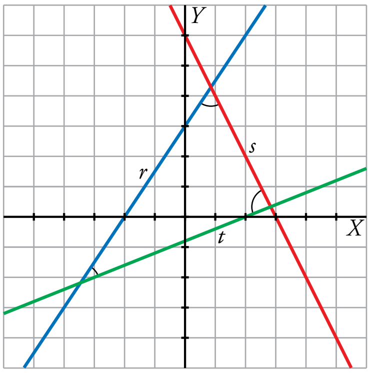
$s: nx + 6y - 8 = 0 \rightarrow y = -\frac{n}{6}x + \frac{8}{6} \rightarrow m_s = -\frac{n}{6}$

$$tg\,45° = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r} \right| = \left| \frac{-(n/6) - (3/2)}{1 - (n/6)\,(3/2)} \right| = \left| \frac{-2n - 18}{12 - 3n} \right| = 1$$

Hay dos posibilidades:

- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = 1 \rightarrow -2n - 18 = 12 - 3n \rightarrow n = 30$
- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = -1 \rightarrow -2n - 18 = -12 + 3n \rightarrow n = -\frac{6}{5}$

**45** **Las rectas $r: 3x - 2y + 6 = 0$, $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Represéntalo y halla sus ángulos.**




$\vec{d}_r = (2, 3)$, $\vec{d}_s = (-1, 2)$, $\vec{d}_t = (5, 2)$

$$cos\,(\widehat{r, s}) = \left|\frac{(2, 3)\cdot(-1, 2)}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{1+4}}\right| = 0{,}49 \to (\widehat{r, s}) = 60°\ 16'$$

$$cos\,(\widehat{r, t}) = \left|\frac{(2, 3)\cdot(5, 2)}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{25+4}}\right| = 0{,}82 \to (\widehat{r, t}) = 34°\ 30'$$

$$cos\,(\widehat{s, t}) = \left|\frac{(-1, 2)\cdot(5, 2)}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{25+4}}\right| = 0{,}08 \to (\widehat{s, t}) = 85°\ 14'$$

## Página 211

## Distancias y áreas

**46** **Calcula $k$ de modo que la distancia entre los puntos $A(5, k)$ y $B(3, -2)$ sea igual a 2.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2 - k)$

$dist\,(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \to 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \to k^2 + 4k + 4 = 0 \to k = -2$

**47** **Determina, en cada caso, si el triángulo $ABC$ es equilátero, isósceles o escaleno.**

**a) $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$ b) $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 7)$ c) $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$**

a) $dist\,(A, B) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

Triángulo equilátero.

b) $dist\,(A, B) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = 2\sqrt{5}$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(3+1)^2 + (5-7)^2} = 2\sqrt{5}$

Triángulo isósceles.

c) $dist\,(A, B) = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

Triángulo isósceles.

**48** **Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.**

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to -2y + 5 = 0 \to y = \frac{5}{2} \to A\left(0, \frac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje $Y$.
- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x + 5 = 0 \to x = 5 \to B(5, 0)$ es el punto de corte con el eje $X$.
- Luego $\overline{AB} = dist(A, B) = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$

**49** **Halla las distancias de $O(0, 0)$ y $P(-1, 2)$ a estas rectas:**

**a)** $3x - 4y + 5 = 0$ **b)** $2x + 5 = 0$ **c)** $\begin{cases} x = 6t \\ y = 8t \end{cases}$ **d)** $(x, y) = \left(\frac{-1}{2}, 1\right) + (2, 1)k$

a) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{9+16}} = 1$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{6}{5}$ u

b) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{5}{2}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{3}{2}$ u

c) $r: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{8} \to 8x - 6y = 0$

$dist(O, r) = \dfrac{|0|}{\sqrt{64+36}} = 0$ u $\to O \in r$

$dist(P, r) = \dfrac{|8 \cdot (-1) - 6 \cdot 2|}{\sqrt{64+36}} = 2$ u

d) $r: \dfrac{x + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{1} \to x + \dfrac{1}{2} = 2y - 2 \to x - 2y + \dfrac{3}{2} = 0 \to 2x - 4y + 3 = 0$

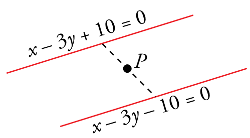
$dist(O, r) = \dfrac{|3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{3}{10}\sqrt{5}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{7}{10}\sqrt{5}$ u

**50** **Determina $c$ para que la distancia de $r: x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades (hay dos soluciones).**

$dist(P, r) = \dfrac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \to c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \to c_2 = -10 \end{cases}$




Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas.

**51 Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:**

**a)** $r: 3x + 5 = 0$; $r': \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 4k \end{cases}$

**b)** $r: y = \frac{-2}{3}x + 1$; $r': \frac{1-x}{3} = \frac{y+1}{2}$

a) $P' = (0, 0) \in r'$

$$dist(r, r') = dist(P', r) = \frac{|5|}{\sqrt{9+0}} = \frac{5}{3} \text{ u}$$

b) Las rectas son paralelas.

$P' = (1, -1) \in r'$

$r: 2x + 3y - 1 = 0$

$$dist(r, r') = dist(P', r) = \frac{|2-3-1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{13}\sqrt{13} \text{ u}$$

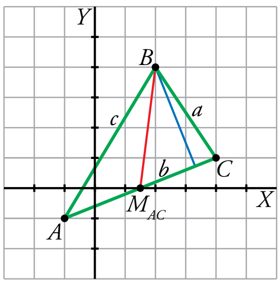
**52 Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.**

Veamos si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{array}\right\} 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2 \rightarrow \text{Por tanto, el triángulo es rectángulo.}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ u}^2$$

**53 En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de $B$.**




a) Longitud de la mediana = $dist(B, M_{AC})$

$$M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$dist\ (B, M_{AC}) = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (4-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

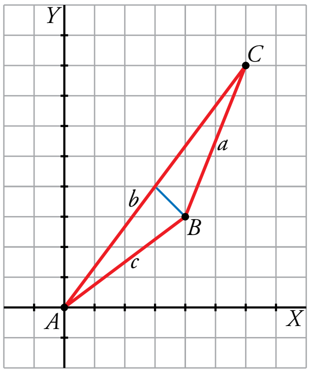
b) Longitud de la altura = $dist(B, \text{lado } AC)$

$\overrightarrow{AC} = (5, 2)$

$$r: \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} \rightarrow 2x + 2 = 5y + 5 \rightarrow \text{lado } AC\text{: } 2x - 5y - 3 = 0$$

$$dist(B, r) = \frac{|2 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{4+25}} = \frac{19}{29}\sqrt{29} \text{ u}$$

**54** **Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 8)$, calcula su área.**




$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$

$\text{Base} = dist(A, C) = \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2} = 10 \text{ u}$

$\text{Altura} = dist(B, \text{lado } AC)$

Lado $AC$:

$\overrightarrow{AC} = (6, 8)$

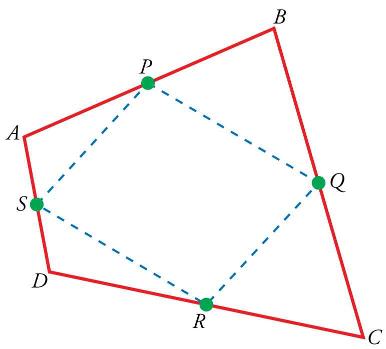
$r: \frac{x}{6} = \frac{y}{8} \to 8x - 6y = 0 \to 4x - 3y = 0$

$dist(B, \text{lado } AC) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5} \text{ u}$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5} = 7 \text{ u}^2$

## Para resolver

**55** **Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices $A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$ y $D(-1, 6)$.**




$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 5)$

$Q(3, 1)$; $R(0, 3)$; $S(1, 7)$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (3-4, 1-5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0-1, 3-7) = (-1, -4)\end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{SP} = (4-1, 5-7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3-0, 1-3) = (3, -2)\end{array}\right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

**56 En un triángulo equilátero conocemos dos vértices, $A(\sqrt{3}/2, 0)$ y $B(-\sqrt{3}/2, 0)$. Halla el tercer vértice.**

El vértice $C = (x, y)$ está en la mediatriz del segmento $AB$ y $dist(A, C) = dist(A, B)$.

$r$: Mediatriz de $AB$

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 0)$

Punto medio de $AB$:

$M_{AB} = (0, 0)$

$r: x = 0$

$$dist(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4}}$$

$$dist(A, B) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{3}$$

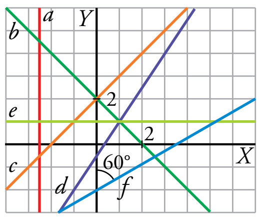
Las coordenadas de $C$ son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to y = \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3} \to y = -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$$

Hay dos triángulos equiláteros con vértices $A$ y $B$.

$$C = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right),\ C' = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right)$$

**57 Halla las ecuaciones de las rectas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*.**




$a \to x = -\frac{5}{2}$

$b \to \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{-1}$

$c \to \frac{x}{1} = \frac{y - 2}{1}$

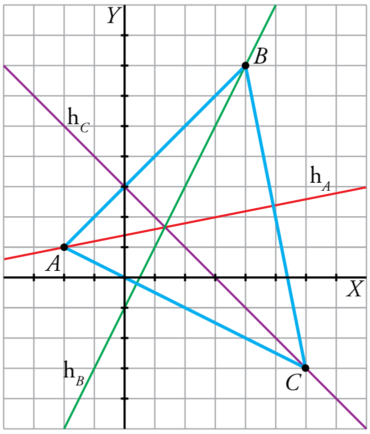
$d \to \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{3}$

$e \to y = 1$

$f \to$ Si $f$ forma un ángulo de 60° con el eje vertical, entonces forma un ángulo de 30° con el eje horizontal positivo.

Un vector cuya pendiente sea de 30° tiene coordenadas proporcionales a $(3, \sqrt{3})$, luego la ecuación de la recta es: $\frac{x}{3} = \frac{y + 2}{\sqrt{3}}$

**58** **Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$. Halla el ortocentro.**




- $h_A$ es perpendicular a $BC$ y pasa por $A = (1, 3)$.

  $\overrightarrow{BC} = (2, -10) = 2(1, -5)$

  $h_A$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (5, 1)$ y pasa por $A = (-2, 1)$.

  $h_A$: $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x + 2 = 5y - 5 \rightarrow x - 5y + 7 = 0$

- $h_B$ es perpendicular a $AC$ y pasa por $B = (4, 7)$.

  $\overrightarrow{AC} = (8, -4) = 4(2, -1)$

  $h_B$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $B = (4, 7)$.

  $h_B$: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{2} \rightarrow 2x - 8 = y - 7 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$

- $h_C$ es perpendicular a $AB$ y pasa por $C = (6, -3)$.

  $\overrightarrow{AB} = (6, 6) = 6(1, 1)$

  $h_C$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 1)$ y pasa por $C = (6, -3)$.

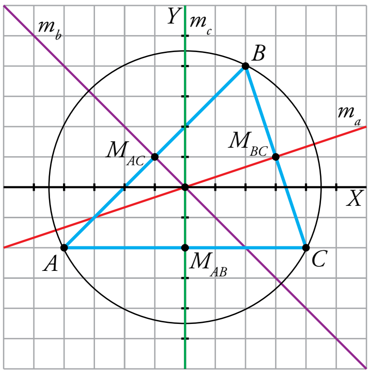
  $h_C$: $\dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y+3}{1} \rightarrow x - 6 = -y - 3 \rightarrow x + y - 3 = 0$

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas. Como las tres alturas se cortan en el mismo punto, para calcular el ortocentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las alturas.

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3},\ y = \frac{5}{3}$$

Las coordenadas del ortocentro son $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

**59** **Da las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(2, 4)$. Halla el circuncentro.**




- $m_a$ es perpendicular a $BC$ y pasa por $M_{BC}$.

  $BC$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (-2, 6) = 2(-1, 3)$.

  $M_{BC} = (3, 1)$

  $m_a$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $M_{BC} = (3, 1)$.

  $m_a$: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{1} \to x - 3y = 0$

- $m_b$ es perpendicular a $AC$ y pasa por $M_{AC}$.

  $AC$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{AC} = (6, 6) = 6(1, 1)$.

  $M_{AC} = (-1, 1)$

  $m_b$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -1)$ y pasa por $M_{BC} = (-1, 1)$.

  $m_b$: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} \to x + y = 0$

- $m_c$ es perpendicular a $AB$ y pasa por $M_{AB}$.

  $AB$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (8, 0) = 8(1, 0)$.

  $M_{AB} = (0, -2)$

  $m_c$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (0, -2)$.

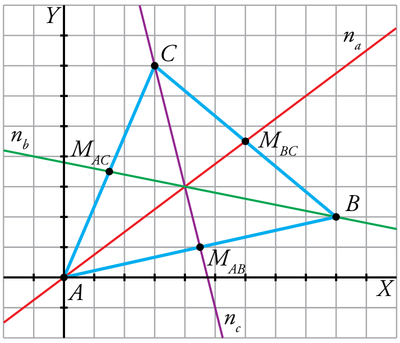
  $m_c$: $x = 0$

El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices. Como las tres mediatrices se cortan en el mismo punto, para calcular el circuncentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las mediatrices.

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \to x = 0,\ y = 0$$

Las coordenadas del circuncentro son: $(0, 0)$.

**60** **En el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(9, 2)$ y $C(3, 7)$, determina las ecuaciones de las medianas y calcula el baricentro.**




- $n_a$ pasa por $A$ y por $M_{BC}$.

  $M_{BC} = \left(\frac{12}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(6, \frac{9}{2}\right)$

  $\overrightarrow{AM_{BC}} = \left(6, \frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}(4, 3)$

  $n_a$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 3)$ y pasa por $A = (0, 0)$.

  $n_a$: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \to 3x - 4y = 0$

- $n_b$ pasa por $B$ y por $M_{AC}$.

  $M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

  $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{-15}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-5, 1)$

  $n_b$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-5, 1)$ y pasa por $B = (9, 2)$.

  $n_b$: $\frac{x-9}{-5} = \frac{y-2}{1} \to x - 9 = -5y + 10 \to x + 5y - 19 = 0$

- $n_c$ pasa por $C$ y por $M_{AB}$.

  $M_{AB} = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

  $\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, -6\right) = \frac{3}{2}(1, -4)$

  $n_c$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -4)$ y pasa por $C = (3, 7)$.

  $n_c$: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-4} \to -4x + 12 = y - 7 \to -4x - y + 19 = 0$

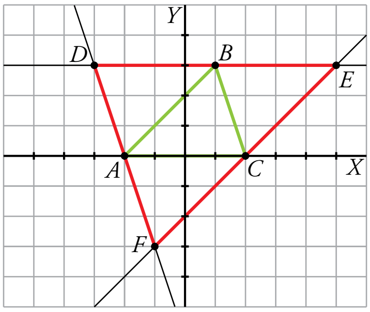
El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -4x - y + 19 = 0 \end{cases} \to x = 4,\ y = 3$$

Las coordenadas del baricentro son: (4, 3).

**61** **En un triángulo de vértices $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 0)$ trazamos desde cada vértice una recta paralela al lado opuesto. Halla los vértices del triángulo que determinan los puntos de corte de estas rectas y comprueba que es semejante a $ABC$.**

** Para comprobar que dos triángulos son semejantes, basta ver que sus ángulos son iguales.*




$\overrightarrow{AB} = (3, 3) = 3(1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (4, 0) = 4(1, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

El lado $EF$:

- Es paralelo a $AB$ y pasa por $C$.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $C = (2, 0)$.
- $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{1} \to x - 2 = y \to x - y - 2 = 0$

El lado $DE$:

- Es paralelo a $AC$ y pasa por $B$.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $B = (1, 3)$.
- $y = 3$

El lado $DF$:

- Es paralelo a $BC$ y pasa por $A$.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -3)$ y pasa por $C = (-2, 0)$.
- $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-3} \to -3x - 6 = y \to -3x - y - 6 = 0$

Los puntos de corte de cada par de rectas son: $D(-3, 3)$, $E(5, 3)$ y $F(-1, -3)$.

$$cos\ \widehat{D} = cos\ (\widehat{(1,-3),(1,0)}) = cos\ (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}) = cos\ \widehat{C}$$

$$cos\ \widehat{E} = cos\ (\widehat{(1,1),(1,0)}) = cos\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = cos\ \widehat{A}$$

Si tienen dos ángulos iguales, los triángulos son semejantes.

**62** **La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, el segmento $AB$. Halla la ecuación de la mediatriz de $AB$.**

Ecuación del eje $OX$: $y = 0$. Ecuación del eje $OY$: $x = 0$.

Puntos de corte de $r$ con los ejes:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 3, y = 0 \to A = (3, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to x = 0, y = 2 \to B = (0, 2)$$

$\overrightarrow{AB} = (-3, 2)$; $M_{AB} = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

La mediatriz de $AB$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 3)$ y pasa por $M_{AB} = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$.

Mediatriz de $AB$: $\dfrac{x - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{3}$

**63** **Halla el pie de la perpendicular trazada desde $P(1, -2)$ a la recta $r: x - 2y + 4 = 0$.**

* ***Escribe la perpendicular a r desde P y halla el punto de corte con r.***

Vector normal a $r$: $\vec{n} = (1, -2)$

La recta $s$ perpendicular a $r$ que pasa por $P$, tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$ y pasa por $P(1, -2)$.

$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} \to -2x + 2 = y + 2 \to -2x - y = 0$

El pie de la perpendicular $Q$ es la intersección de las dos rectas $r$ y $s$.

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \to x = -\frac{4}{5}, y = \frac{8}{5} \to Q = \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

**64** **De un rombo $ABCD$ sabemos que los vértices $B$ y $D$ están en la recta $r: y = 2x + 2$ y que $A(4, 0)$. Halla las coordenadas de $C$.**

La diagonal $BD$ están en la recta $r$.

Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio, luego la perpendicular trazada desde $A$ a la recta $r$, que llamaremos $s$, cortará a $r$ en el punto medio $M$ entre $A$ y $C = (x, y)$.

La recta $s$ perpendicular a $r$ tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por $A = (4, 0)$.

$s: y = -\frac{1}{2}x + k$

Sustituimos las coordenadas de $A$ en la ecuación para calcular $k$.

$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + k \to k = 2 \to s: y = -\frac{1}{2}x + 2$

$M = r \cap s$

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \to x = 0, y = 2 \to M = (0, 2)$$

$$(0, 2) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y}{2}\right) \to \begin{cases} 0 = \frac{x+4}{2} \to x = -4 \\ 2 = \frac{y}{2} \to y = 4 \end{cases} \to C = (-4, 4)$$

**65** **Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas $r: x = 3$; $s: 2x + 3y - 6 = 0$ y $t: x - y - 7 = 0$.**

Los vértices están en la intersección de las rectas.

$A = r \cap s$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \to x = 3, y = 0 \to A = (3, 0)$$

$B = r \cap t$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \to x = 3, y = -4 \to B = (3, -4)$$

$C = s \cap t$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \to x = \frac{27}{5}, y = -\frac{8}{5} \to C = \left(\frac{27}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Base} = dist(A,\, B) = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = 4 \text{ u}$$

$$\text{Altura} = dist(C,\, lado\ AB)$$

$$Lado\ AB = l;\ \ \overrightarrow{AB} = (0,\, 4) = 4(0,\, 1)$$

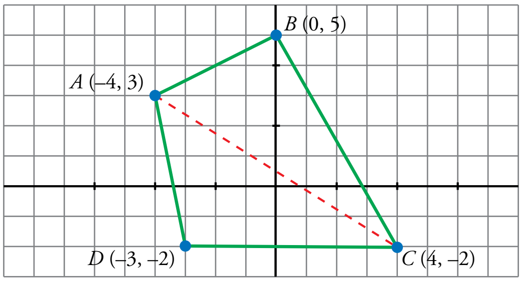
$l$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (0,\, 1)$ y pasa por $A = (3,\, 0)$.

$$l{:}\ x = 3 \ \rightarrow\ x - 3 = 0$$

$$dist(C,\, lado\ AB) = \frac{\left|\frac{27}{5} - 3\right|}{1} = \frac{12}{5} \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5} \text{ u}^2$$

**66** **Halla el área del cuadrilátero de vértices $A(-4,\, 3)$, $B(0,\, 5)$, $C(4,\, -2)$ y $D(-3,\, -2)$.**




- La diagonal $AC$ divide el cuadrilátero en dos triángulos con la misma base, cuya medida es:

  $|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$

- Sean $h_B$ y $h_D$ las alturas desde $B$ y $D$, respectivamente, a la base:

  $$h_B = dist(B,\, r) \ \text{ y } \ h_D = dist(D,\, r)$$

  donde $r$ es la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{AC}$.

  Tomando como vector dirección de $r$ el vector $\overrightarrow{AC}$, la ecuación de dicha recta es:

  $$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + k = 0 \\ \text{Como } (-4, 3) \in r \end{array}\right\} -20 + 24 + k = 0 \ \rightarrow\ k = -4 \ \rightarrow\ r{:}\ 5x + 8y - 4 = 0$$

  Luego:

  $$h_B = dist(B,\, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

  $$h_D = dist(D,\, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

- Así:

  $$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) = \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

**67** **El lado desigual del triángulo isósceles $ABC$, tiene por extremos $A(1, -2)$ y $B(4, 3)$. El vértice $C$ está en la recta $3x - y + 8 = 0$. Halla las coordenadas de $C$ y el área del triángulo.**

- La recta del lado desigual (base) tiene como vector dirección $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \to \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \to r: 5x - 3y - 11 = 0$$

- La recta que contiene la altura tiene por vector dirección $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del lado desigual $AB$, es decir, por $M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\text{h}_c: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases} \to \frac{2x-5}{-10} = \frac{2y-1}{6} \to \text{h}_c: 12x + 20y - 40 = 0 \to \text{h}_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

- $C = s \cap \text{h}_c$ donde $s: 3x - y + 8 = 0$.

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + \ \ 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + \ \ 2y - 16 = 0 \\ \ \ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$12y - 36 = 0 \to y = \frac{36}{12} = 3 \to 3x - 3 + 8 = 0 \to 3x + 5 = 0 \to x = \frac{-5}{3}$$

Luego: $C\left(\frac{-5}{3}, 3\right)$

- $$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CM}|}{2} \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{34} \cdot \sqrt{\left(\frac{850}{6}\right)}}{2} \approx 14,17$$

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{CM}\left(\frac{-25}{6}, \frac{-5}{2}\right) \to |\overrightarrow{CM}| = \frac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

**68** **Calcula $c$ para que la distancia entre las rectas de ecuaciones $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.**

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \to y_0 = 2 \to P(0, 2) \in r_1$

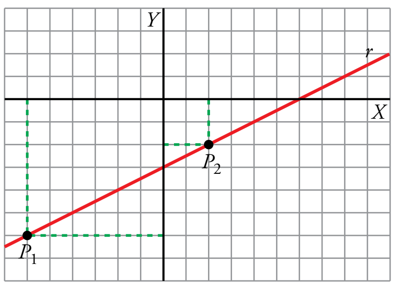
Así, $$dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \to \frac{|6 + c|}{5} = 3 \to \begin{cases} 6 + c = 15 \to c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \to c_2 = -21 \end{cases}$$

**69** **Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } X\text{: } y = 0 \\ \text{Eje } Y\text{: } x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \to \begin{cases} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \frac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \to \text{dos casos: } \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y - 2y - 6 = 0 \to y_1 = -6 \to x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \to y_2 = -2 \to x_2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} P_1(-6, -6) \\ P_2(2, -2) \end{cases}$$



**70** **Determina, en cada caso, un punto $P$ de la recta $r: y = -x + 1$ tal que:**

**a) La distancia de $P$ a $s: 3x - 4y + 2 = 0$ sea 1.**

**b) $P$ diste 3 unidades del eje $OX$.**

**c) La distancia de $P$ al eje $OY$ sea 4 unidades.**

**d) $P$ equidiste de las rectas $x - y + 5 = 0$ y $x + y + 1 = 0$.**

a) $P = (x, y)$

$P \in r \to y = -x + 1$

$dist(P, r) = \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9+16}} = 1$

Las coordenadas de $P$ son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9+16}} = 1 \end{cases} \to \frac{|3x - 4(-x+1) + 2|}{\sqrt{9+16}} = 1 \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{3x - 4(-x+1) + 2}{\sqrt{9+16}} = 1 \to x = 1 \\ \dfrac{3x - 4(-x+1) + 2}{\sqrt{9+16}} = -1 \to x = -\dfrac{3}{7} \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \to y = 0 \\ x = -\dfrac{3}{7} \to y = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

*Soluciones:* $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(-\dfrac{3}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$

b) Eje $OX$: $y = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|y|}{1} = 3$

Las coordenadas de $P$ son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|y|}{1} = 3 \end{cases} \to \frac{|-x+1|}{1} = 3 \to \begin{cases} \dfrac{-x+1}{1} = 3 \to x = -2 \\ \dfrac{-x+1}{1} = -3 \to x = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \to y = 3 \\ x = 4 \to y = -3 \end{cases}$$

*Soluciones:* $P_1 = (-2, 3)$, $P_2 = (4, -3)$

c) Eje $OY$: $x = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|x|}{1} = 4$

Las coordenadas de $P$ son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|x|}{1} = 4 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x}{1} = 4 \to x = 4 \\ \dfrac{x}{1} = -4 \to x = -4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \to y = -3 \\ x = -4 \to y = 5 \end{cases}$$

*Soluciones:* $P_1 = (4, -3)$, $P_2 = (-4, 5)$

d) $dist(P, r) = \dfrac{|x - y + 5|}{\sqrt{1+1}}$, $dist(P, r') = \dfrac{|x + y + 1|}{\sqrt{1+1}}$

Las coordenadas de $P$ son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|x - y + 5|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|x + y + 1|}{\sqrt{1+1}} \end{cases} \to |x - (-x+1) + 5| = |x + (-x+1) + 1| \to$$

$$\to \begin{cases} x - (-x+1) + 5 = x + (-x+1) + 1 \to x = -1 \\ x - (-x+1) + 5 = -(x + (-x+1) + 1) \to x = -3 \end{cases} \to \begin{cases} x = -1 \to y = 2 \\ x = -3 \to y = 4 \end{cases}$$

*Soluciones:* $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (-3, 4)$

## Página 212

**71 Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.**

$P(x, 0)$ debe verificar $dist(P, r) = dist(P, s)$:

$$\frac{|4x + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x + 4 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{25}} \to \begin{cases} 4x + 6 = 3x - 9 \to x_1 = -15 \\ 4x + 6 = -(3x - 9) \to x_2 = 3/7 \end{cases}$$

*Soluciones:* $P_1(-15, 0)$, $P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$

**72 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r$ y $s$ y forma un ángulo de 45° con la recta $x + 5y - 6 = 0$.**

**$r: 3x - y - 9 = 0$ $\qquad$ $s: x - 3 = 0$**

Llamamos $t$ a la recta que buscamos. $t$ pasa por $P = r \cap s$ y tiene pendiente $m$.

$$tg\ 45° = \left|\frac{m - 5}{1 + 5m}\right| \to 1 = \left|\frac{m - 5}{1 + 5m}\right| \to \begin{cases} \dfrac{m - 5}{1 + 5m} = 1 \to m = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{m - 5}{1 + 5m} = -1 \to m = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \to x = 3, y = 0 \to P = (3, 0)$$

$t_1$ tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

$t_1$: $y = -\frac{3}{2}(x - 3)$

$t_2$ tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

$t_2$: $y = \frac{2}{3}(x - 3)$

**73 Dadas $r: 2x - y - 17 = 0$ y $s: 3x - ky - 8 = 0$, calcula $k$ para que $r$ y $s$ se corten formando un ángulo de 60°.**

$$cos\ (\widehat{r, s}) = \left|\frac{(1, 2) \cdot (k, 3)}{\sqrt{1 + 4}\sqrt{k^2 + 9}}\right| \to cos\ 60° = \left|\frac{k + 6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 9}}\right| \to \frac{1}{2} = \left|\frac{k + 6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 9}}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{k + 6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 9}} \to k = 24 - 15\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{k + 6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 9}} \to k = 24 + 15\sqrt{3} \end{cases}$$

*Soluciones:* $k_1 = 24 - 15\sqrt{3}$; $k_2 = 24 + 15\sqrt{3}$

**74 Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ y $C(3, -4)$.**

$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (6, -6) = 6(1, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$

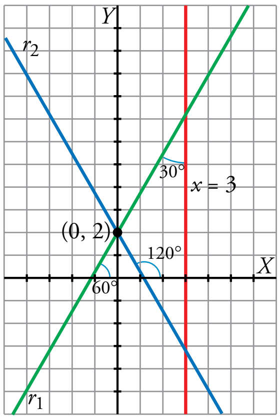
$r$ contiene al lado $AB$; $s$ contiene al lado $AC$; $t$ contiene al lado $BC$

$$cos\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{(11, -3) \cdot (1, -1)}{\sqrt{121 + 9}\sqrt{1 + 1}} = 0,87 \to (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 29°\ 45'$$

$$cos\ (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{(-11, 3) \cdot (-5, -3)}{\sqrt{121 + 9}\sqrt{25 + 9}} = 0,69 \to (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = 46°\ 14'$$

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 180° - (29°\ 45' + 46°\ 14') = 104°\ 1'$$

**75** **Halla la ecuación de la recta que pasa por (0, 2) y forma un ángulo de 30° con $x = 3$.**




La recta $r$ forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje $OX$.

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = tg\ 60° = \sqrt{3}, \text{ o bien} \\ m_2 = tg\ 120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por $P(0, 2)$, las posibles soluciones son:

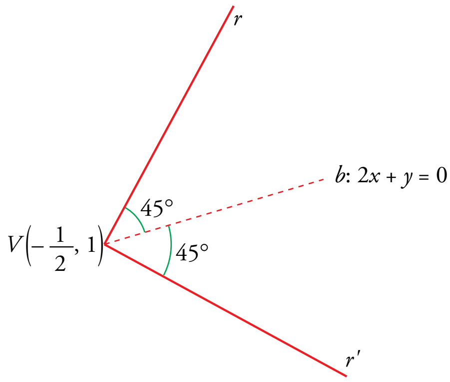
$r_1$: $y = \sqrt{3}x + 2$

$r_2$: $y = -\sqrt{3}x + 2$

**76** **La recta $2x + y = 0$ es la bisectriz de un ángulo recto cuyo vértice es $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.**

**Halla las ecuaciones de los lados del ángulo.**

Las pendientes de las tres rectas son: $m_b = -2$, $m_r$, $m_{r'}$




$$tg\ 45° = \left|\frac{m_b - m_r}{1 + m_b m_r}\right| \rightarrow 1 = \left|\frac{-2 - m_r}{1 - 2m_r}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - 2m_r = -2 - m_r \rightarrow m_r = 3 \\ -1 + 2m_{r'} = -2 - m_{r'} \rightarrow m_{r'} = -1/3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r\text{: } y - 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = 3x + \frac{5}{2} \\ r'\text{: } y - 1 = \frac{-1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{6} \end{cases}$$

**77** **Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por $A(-2, 2)$ y forman un ángulo de 60° con $x = y$.**

$b: x = y \rightarrow$ su pendiente es $m_b = 1$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m}{1+1\cdot m}\right| \rightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{1-m}{1+m}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que pasan por $A(-2, 2)$:

$$r_1: y - 2 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(x+2)$$

$$r_2: y - 2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}(x+2)$$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

**78** **Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de $r$ respecto al eje de abscisas.**

Calculamos $P = r \cap OX$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{5}{2},\ y = 0 \rightarrow P = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

Buscamos un punto $Q$ de $r$ y encontramos su simétrico, $Q'$, respecto de $OX$:

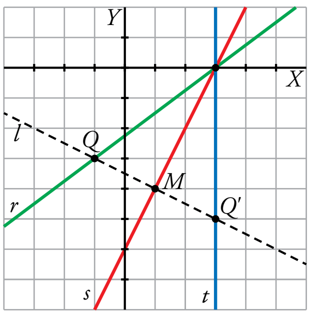
$$Q = \left(0, \frac{5}{3}\right) \rightarrow Q' = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

La recta $r'$ pasa por $P$ y por $Q'$:

$$\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{6}(3, -2)$$

$$r': \frac{x + \frac{5}{2}}{3} = \frac{y}{-2}$$

**79** **Halla la recta, $t$, simétrica a $r: -3x + 4y + 9 = 0$ respecto de la recta $s: 2x - y - 6 = 0$.**




Calculamos $P = r \cap s$:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 9 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 0 \rightarrow P = (3, 0)$$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de $r$ y encontramos su simétrico, $Q'$, respecto de $s$.

$Q \in r \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -3$

$Q = (-1, -3)$

Simétrico de $Q$ respecto de $s$:

Calculamos la recta $l$ perpendicular a $s$ que pasa por $Q$:

$l$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -1)$ y pasa por $Q = (-1, -3)$.

$l: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-1} \to -x-1 = 2y+6 \to -x-2y-7=0$

$M = s \cap l$

$\begin{cases} -x-2y-7=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \to x = 1, y = -4 \to M = (1, -4)$

$M$ es el punto medio entre $Q$ y $Q' = (x, y)$.

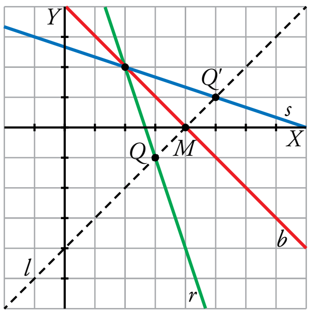
$(1, -4) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y-3}{2}\right) \to \begin{cases} 1 = \frac{x-1}{2} \to x = 3 \\ -4 = \frac{y-3}{2} \to y = -5 \end{cases} \to Q' = (3, -5)$

La recta $t$ pasa por $P$ y por $Q' = (3, -5)$:

$\overrightarrow{PQ'} = (0, -5) = 5(0, 1)$

$t: x = 3$

**80** **La recta $b: y = -x + 4$ es la bisectriz del ángulo formado por las rectas $r: 3x + y - 8 = 0$ y $s$. Halla la ecuación de $s$.**




$s$ es la simétrica de $r$ respecto de $b$.

$b$ tiene pendiente $m = -1$. Calculamos $P = r \cap b$:

$\begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \to x = 2, y = 2 \to P = (2, 2)$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de $r$ y encontramos su simétrico, $Q'$, respecto de $b$.

$Q \in r \to x = 3 \to y = -1$

$Q = (3, -1)$

Para hallar el simétrico de $Q$ respecto de $b$, calculamos la recta $l$ perpendicular a $b$ que pasa por $Q$:

$l$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $Q = (3, -1)$.

$l: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} \to x-3 = y+1 \to x-y-4 = 0$

$M = b \cap l$

$\begin{cases} y = -x + 4 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \to x = 4, y = 0 \to M = (4, 0)$

$M$ es el punto medio entre $Q$ y $Q' = (x, y)$:

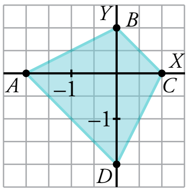
$$(4,\ 0) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \to \begin{cases} 4 = \dfrac{x+3}{2} \to x = 5 \\ 0 = \dfrac{y-1}{2} \to y = 1 \end{cases} \to Q' = (5,\ 1)$$

La recta $s$ pasa por $P$ y por $Q' = (5,\ 1)$

$\overrightarrow{PQ'} = (3, -1)$

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1}$$

**81** **Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ los puntos de corte de las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas. Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área.**




Sean: $A = r \cap \text{eje } OX$: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = -2 \to A(-2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } OY$: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 1 \to B(0, 1)$

$C = s \cap \text{eje } OX$: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 1 \to C(1, 0)$

$D = s \cap \text{eje } OY$: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = -2 \to D(0, -2)$

Calculamos los vectores dirección de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \to \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \to \overrightarrow{BC} \,/\!/\, \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Luego, efectivamente, $ABCD$ es un trapecio isósceles de bases $BC$ y $DA$.

Para calcular el área necesitamos la altura:

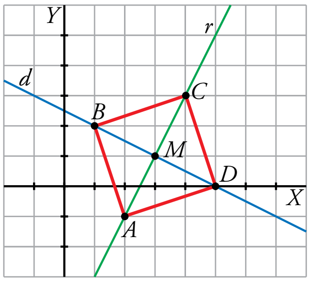
$$\text{Como } \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \to y = -x - 2 \to AD: x + y + 2 = 0$$

$$h = dist(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

**82 De un cuadrado conocemos la ecuación de una de sus diagonales, $d: x + 2y - 5 = 0$, y un vértice, $A(2, -1)$. Calcula el resto de vértices y su área.**




$A \notin d$, luego el vértice $C$ es el simétrico de $A$ respecto de $d$.

$r$: perpendicular a $d$ que pasa por $A$.

$r$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $A = (2, -1)$.

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} \to 2x - y = 5$$

$M = r \cap d$

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \to x = 3, y = 1 \to M = (3, 1)$$

$M$ es el punto medio entre $A$ y $C = (x, y)$.

$$(3, 1) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \to \begin{cases} 3 = \dfrac{x+2}{2} \to x = 4 \\ 1 = \dfrac{y-1}{2} \to y = 3 \end{cases} \to C = (4, 3)$$

El vértice $B = (x, y)$ verifica: $B \in d$ y $dist(M, A) = dist(M, B)$, luego $B$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-1)^2} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \to x = 1, y = 2; x = 5, y = 0$$

Estas son las coordenadas de los vértices que faltan: $B = (1, 2)$, $D = (5, 0)$.

Tenemos un cuadrado de lado $\sqrt{10}$. Su área es $10 \text{ u}^2$.

**83 La recta $x + y - 2 = 0$ y una recta paralela a ella que pasa por el punto $(0, 5)$ determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.**

$$\left.\begin{array}{l} s \,//\, r: x + y - 2 = 0 \to x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \to 0 + 5 + k = 0 \to k = -5$$

Luego $s: x + y - 5 = 0$

Sean: $A = r \cap \text{eje } X$: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 2 \to A(2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } Y$: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 2 \to B(0, 2)$

$C = s \cap \text{eje } X$: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 5 \to C(5, 0)$

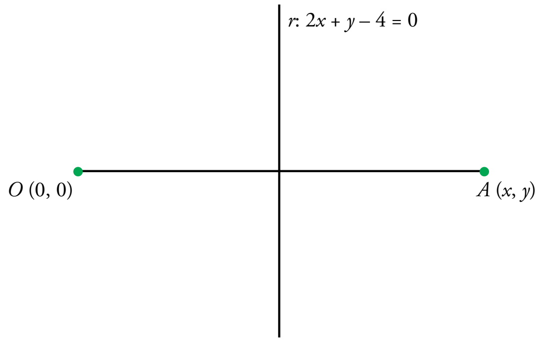
$D = s \cap \text{eje } Y$: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 5 \to D(0, 5)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2);\ \overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot \text{h} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist\,(A, s) =$$

$$= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2}\ \text{u}^2$$

**84** **La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto (0, 0). Halla las coordenadas del otro extremo.**




Un vector dirección de la recta es $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \rightarrow x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$$

- Además, el punto medio de $OA$, $M$, pertenece a la recta:

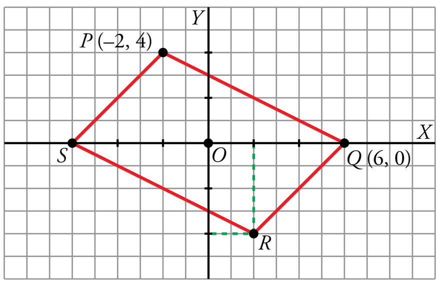
$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow 4y + y - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{8}{5} \rightarrow x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

**85** **Los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(6, 0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $PQRS$ con centro en el punto (0, 0). Halla los vértices $R$ y $S$ y los ángulos del paralelogramo.**




a) Como las dos diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, que es el centro, se tienen fácilmente los otros dos vértices:

$R(2, -4)$, $S(-6, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = (8, -4) \rightarrow \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS} = (-8, 4)$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = (-4, -4) \rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ} = (4, 4)$

$$cos\ \hat{P} = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PS}||\overrightarrow{PQ}|} = \frac{-32 + 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = -0{,}31623 \rightarrow \hat{P} = 108°\ 26'\ 5{,}8'' = \hat{R}$$

$$\hat{S} = \frac{360° - (\hat{P} + \hat{R})}{2} = 71°\ 33'\ 54'' = \hat{Q}$$

NOTA: Podríamos haber calculado $\hat{S}$ con los vectores:

$$\cos \hat{S} = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{SP}||\overrightarrow{SR}|} = \frac{32 - 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = 0{,}31623 \to \hat{S} = 71°\ 33'\ 54''$$

**86** **Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ y uno de sus vértices es el punto (6, 0). Halla los otros vértices.**

- Como las rectas no son paralelas, el punto donde se corten será un vértice:

$$\begin{matrix} r_1: \\ r_2: \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3y - 6 = 0 \to y = 2 \to x + 2 - 2 = 0 \to x = 0$$

Luego un vértice es $A(0, 2)$.

- El vértice que nos dan, $C(6, 0)$, no pertenece a ninguna de las rectas anteriores (pues no verifica sus ecuaciones, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo los valores de $x$ e $y$ por las coordenadas de $C$). Así pues, el vértice $C$ no es consecutivo de $A$.

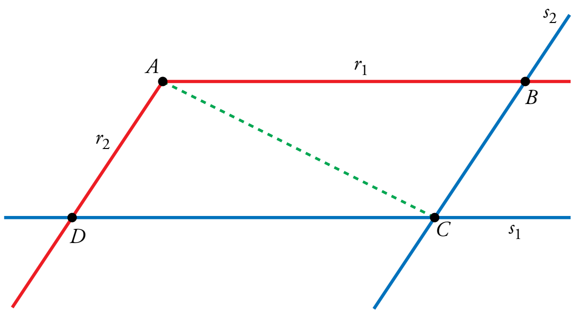
Sean $s_1 \parallel r_1$ una recta que pasa por $C$ y $s_2 \parallel r_2$ una recta que pasa por $C$.

Se trata de las rectas sobre las que están los otros lados.

Así, los otros vértices, $B$ y $D$, serán los puntos de corte de:

$r_1 \cap s_2 = B$

$r_2 \cap s_1 = D$




$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \to 6 + 0 + a = 0 \to a = -6 \end{cases} \to s_1: x + y - 6 = 0$$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \to 6 - 0 + b = 0 \to b = -6 \end{cases} \to s_2: x - 2y - 6 = 0$$

- $B = r_1 \cap s_2: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema:

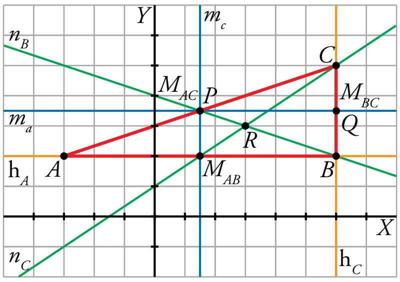
De la primera ecuación $\to x = 2 - y \to$ en la segunda $\to 2 - y - 2y - 6 = 0 \to$

$$\to y = \frac{-4}{3} \to x = \frac{10}{3} \to B\left(\frac{10}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

- $D = r_2 \cap s_1: \left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \to x = 6 - y \end{cases}\right\} \to 6 - y - 2y + 4 = 0 \to$

$$\to y = \frac{10}{3} \to x = \frac{8}{3} \to D\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

**87** **En un triángulo, baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que los contiene se llama recta de Euler. Compruébalo en el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$ y $C(6, 5)$.**




- Circuncentro: $P$.

  Calculamos dos mediatrices y su intersección.

  $m_a$ es perpendicular a $BC$ y pasa por $M_{BC}$.

  $BC$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (6, 5) - (6, 2) = (0, 2) = 2(0, 1)$

  $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$

  $m_a$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$.

  $m_a: y = \frac{7}{2}$

  $m_c$ es perpendicular a $AB$ y pasa por $M_{AB}$.

  $AB$ tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (6, 2) - (-3, 2) = (9, 0) = 9(1, 0)$.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  $m_c$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

  $m_c: x = \frac{3}{2}$

  El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices.

  $$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

  Las coordenadas del circuncentro son $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

- Baricentro: $R$.

  Calculamos dos medianas y su intersección.

  $n_b$ pasa por $B$ y por $M_{AC}$.

  $M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

  $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) - (6, 2) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-3, 1)$

  $n_b$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 1)$ y pasa por $B = (6, 2)$.

  $n_b: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 6 = -3y + 6 \rightarrow x + 3y - 12 = 0$

  $n_c$ pasa por $C$ y por $M_{AB}$.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  $\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) - (6, 5) = \left(-\frac{9}{2}, -3\right) = -\frac{3}{2}(3, 2)$

$n_c$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $C = (6, 5)$.

$n_c$: $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y-5}{2} \rightarrow 2x - 12 = 3y - 15 \rightarrow 2x - 3y + 3 = 0$

El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

$$\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - 3y + \;\;3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 3$$

Las coordenadas del baricentro son: $R = (3, 3)$.

- Ortocentro: $Q$.

  Calculamos dos alturas y su intersección.

  $h_A$ es perpendicular a $BC$ y pasa por $A = (–3, 2)$.

  $\overrightarrow{BC} = (0, 2) = 2(0, 1)$

  $h_A$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $A = (–3, 2)$.

  $h_A$: $y = 2$

  $h_C$ es perpendicular a $AB$ y pasa por $C = (6, 5)$.

  $\overrightarrow{AB} = 9(1, 0)$

  $h_C$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $C = (6, 5)$.

  $h_C$: $x = 6$

  El ortocentro es el punto de intersección de las alturas.

  $$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

  Las coordenadas del ortocentro son: $Q = (6, 2)$.

$P = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$; $Q = (6, 2)$; $R = (3, 3)$

Para ver si están alineados, calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = (6, 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(3, -1)$$

$$\overrightarrow{QR} = (3, 3) - (6, 2) = (-3, 1) = (-1)\,(3, -1)$$

Luego los vectores son proporcionales y, por tanto, los puntos están alineados.

**88** **De un triángulo conocemos dos vértices, $A(0, 0)$ y $B(5, 0)$ y la longitud del lado $AC$, 3. Además, la tangente del ángulo formado por los lados $AB$ y $AC$ es $\dfrac{4}{3}$.**

**a) Calcula la ecuación del lado $AC$.**

**b) Determina el vértice $C$.**

**c) Halla la longitud de la altura relativa a $C$.**

**d) Obtén el área del triángulo.**

**** Puedes calcular la altura utilizando razones trigonométricas.***

a) La recta que contiene al lado $AC$ tiene pendiente $\dfrac{4}{3}$ porque el lado $AB$ está en el eje $OX$, y la tangente del ángulo que forma una recta con el eje horizontal positivo es su pendiente, luego $r$: $y = \dfrac{4}{3}x$.

b) $C$ está en la recta $r: y = \frac{4}{3}x$ y $dist(A, C) = 3$, luego $C$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{9}{5}, y = -\frac{12}{5}; \ x = \frac{9}{5}, y = \frac{12}{5}$$

Como la tangente del ángulo es positiva, $C = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

c) $AB : y = 0$

Altura = $dist(C, AB) = \frac{12}{5}$ u

d) $dist(A, B) = 3$ u

Área = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$ u$^2$

**89 Los puntos $A(-\sqrt{3}, -3)$, $B(\sqrt{3}, -3)$, $C(2\sqrt{3}, 0)$, $D(\sqrt{3}, 3)$, $E(-\sqrt{3}, 3)$ y $F(-2\sqrt{3}, 0)$ son los vértices de un hexágono regular *ABCDEF*. Calcula:**

**a) El centro del hexágono como la intersección de las mediatrices de dos lados consecutivos.**

**b) La longitud de la apotema.**

**c) El área del polígono.**

a) $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, 0)$

$M_{AB} = (0, -3)$

$m_{AB}: x = 0$

$\overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, 3)$

$M_{BC} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2}\right)$

$m_{BC}$ tiene vector director: $(-3, \sqrt{3})$

$$m_{BC}: \frac{x - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}}$$

Centro = $m_{AB} \cap m_{BC}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \dfrac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \end{cases} \rightarrow \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \rightarrow y = 0$$

Centro = $(0, 0)$

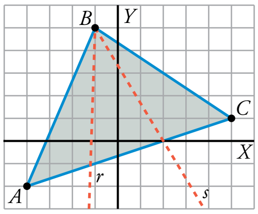
b) Apotema = $dist(M_{BC}, \text{Centro}) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{-3}{2} - 0\right)^2} = 3$ u

c) Área = $\frac{1}{2} \cdot$ Perímetro $\cdot$ Apotema

Lado = $dist(A, B) = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (0)^2} = 2\sqrt{3}$ u

Área = $\frac{1}{2} \cdot$ Perímetro $\cdot$ Apotema = $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ u$^2$

**90** **Dado el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$, halla las ecuaciones de las rectas $r$ y $s$ que parten de $B$ y cortan a $AC$, dividiendo al triángulo en tres triángulos de igual área.**




- La altura de los tres triángulos es igual a la distancia de $B$ al lado $AC$. Por tanto, tendrán la misma área si tienen la misma base. Así, se trata de hallar los puntos, $P$ y $Q$, que dividen al lado $AC$ en tres partes iguales.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{3} = \left(-\frac{2}{3}, -1\right); \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}}{3} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

- La recta $r$ es la que pasa por $B$ y por $P$:

$$m = \frac{-1-5}{(-2/3)-(-1)} = \frac{-6}{(1/3)} = -18$$

$$y = 5 - 18(x+1) \;\rightarrow\; r: 18x + y + 13 = 0$$

- La recta $s$ es la que pasa por $B$ y por $Q$:

$$m = \frac{5-0}{(-1)-(8/3)} = \frac{-5}{(-11/3)} = -\frac{15}{11}$$

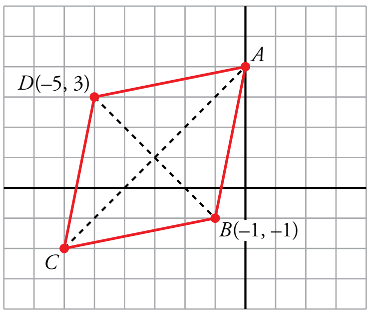
$$y = 5 - \frac{15}{11}(x+1) \;\rightarrow\; 11y = 55 - 15x - 15 \;\rightarrow\; s: 15x + 11y - 40 = 0$$

**91** **Un rombo $ABCD$ tiene un vértice en el eje de ordenadas; otros dos vértices opuestos son $B(-1, -1)$ y $D(-5, 3)$. Halla las coordenadas de los vértices $A$ y $C$ y el área del rombo.**

Sea $A \in$ eje $Y \rightarrow A = (0, y_1)$ y sea el punto $C = (x_2, y_2)$.

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales $AC$ y $BD$ se cortan en su punto medio, $M$.

Además, $AC \perp BD$.




- $M\left(\dfrac{-1-5}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right) = (-3, 1)$ es el punto medio de $BD$ (y de $AC$).

- Sea $d$ la recta perpendicular a $BD$ por $M$ (será, por tanto, la que contiene a $AC$):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BD} = (-4, 4) \rightarrow \vec{d} = (4, 4) \text{ es vector dirección de } d \\ M(-3, 1) \in d \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \dfrac{4}{4} = 1 \\ M(-3, 1) \in d \end{array}\right. \rightarrow d: y - 1 = (x+3) \;\rightarrow\; d: y = x + 4$$

- Así:

$A = d \cap \text{eje } Y$: $\begin{cases} y = x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0, 4)$

- $M$ es el punto medio de $AC \rightarrow (-3, 1) = \left(\dfrac{0 + x_2}{2}, \dfrac{4 + y_2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -3 = \dfrac{x_2}{2} \rightarrow x_2 = -6 \\ 1 = \dfrac{4 + y_2}{2} \rightarrow y_2 = -2 \end{cases} \rightarrow C(-6, -2)$

- Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}{2}$

$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-6, -6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-4, 4)| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Área} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2$

**92** **Un punto $P$, que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$, dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de $P$?**

- $d(P, OX) = 2d(P, OY) \rightarrow |y| = 2|x| \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

- $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(-5-x)^2 + (6-y)^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \rightarrow$

$\rightarrow -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \rightarrow 16x - 4y + 36 = 0 \rightarrow 4x - y + 9 = 0$

- Como deben cumplirse las dos condiciones, habrá dos soluciones:

$P_1$: $\begin{cases} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x - 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9}{2} \rightarrow y = -9$

Luego: $P_1\left(\dfrac{-9}{2}, -9\right)$

$P_2$: $\begin{cases} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x + 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9}{6} = \dfrac{-3}{2} \rightarrow y = 3$

Luego: $P_2\left(\dfrac{-3}{2}, 3\right)$

**93** **De todas las rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.**

- Esas rectas tienen por ecuación:

$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow mx - y + (2 - m) = 0$

- $d(0, r) = 1 \rightarrow \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

**94** **Halla el punto de la recta $2x - 4y - 1 = 0$ que con el origen de coordenadas y el punto $P(-4, 0)$ determina un triángulo de área 6.**

$OP = (-4, 0)$. Lado $OP$: $y = 0$

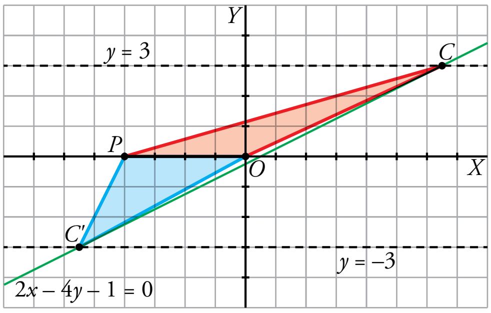
Base $= 4$ u

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = 6 \rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \text{altura} = 6 \rightarrow \text{altura} = 3$

El punto $C = (x, y)$ verifica: $C \in r$ y $dist(C, \text{lado } OP) = 3$.

$$\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ |y| = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = \dfrac{13}{2} \\ y = -3 \rightarrow x = -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $C = \left(\dfrac{13}{2}, 3\right)$ y $C' = \left(-\dfrac{11}{2}, -3\right)$




**Página 213**

## Cuestiones teóricas

**95** **Prueba que si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son perpendiculares, se verifica que $aa' + bb' = 0$.**

- El vector $(a, b)$ es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.
- El vector $(a', b')$ es perpendicular a la recta $a'x + b'y + c' = 0$.
- Si las dos rectas son perpendiculares, entonces:

  $(a, b) \cdot (a', b') = 0$; es decir, $aa' + bb' = 0$.

**96** **Dada la recta de ecuación $ax + by + c = 0$, prueba que el vector $\vec{v} = (a, b)$ es ortogonal a cualquier vector determinado por dos puntos de la recta.**

* ***Llama $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ a dos puntos genéricos de la recta y haz $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$.***

- Si $A(x_1, y_1)$ pertenece a la recta, entonces $\quad ax_1 + by_1 + c = 0$
- Si $B(x_2, y_2)$ pertenece a la recta, entonces $\quad ax_2 + by_2 + c = 0$
- Restando las dos igualdades: $\quad a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

Esta última igualdad significa que:

$(a, b) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$; es decir, que el vector $(a, b)$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo $A$ y $B$ dos puntos cualesquiera de la recta.

**97** **a) ¿Qué se puede decir de una recta si en su ecuación general falta el término independiente?**

**b) ¿Y si falta el término en $x$?**

**c) ¿Y si falta el término en $y$?**

a) La recta pasa por (0, 0).

b) Es una recta horizontal (paralela al eje $OX$).

c) Es una recta vertical (paralela al eje $OY$).

**98** **Demuestra que las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ son:**

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

* ***Utiliza que $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$ donde $M$ es el punto medio de $AC$.***

$G = (x, y)$

$$M_{AC} = \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

$$2\overrightarrow{GM_{AC}} = \overrightarrow{BG}$$

$$2\left(\frac{x_1+x_3}{2} - x, \frac{y_1+y_3}{2} - y\right) = (x - x_2, y - y_2)$$

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x_1+x_3}{2} - x\right) = x - x_2 \\ 2\left(\dfrac{y_1+y_3}{2} - y\right) = y - y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x = x - x_2 \\ y_1 + y_3 - 2y = y - y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 = 3x \\ y_1 + y_3 + y_2 = 3y \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_3+x_2}{3} \\ y = \dfrac{y_1+y_3+y_2}{3} \end{cases}$$

**99** **Demuestra que si una recta corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, con $a$, $b \neq 0$, entonces su ecuación se puede expresar en la forma canónica o segmentaria:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$r$: $ax + by + c = 0$

$r$ no pasa por el origen de coordenadas porque $a, b \neq 0$, luego $c \neq 0$.

Dividimos la ecuación entre $-c$:

$$r: \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = 0$$

Si corta en $(0, b)$:

$$x = 0 \to \frac{y}{b'} = 1 \to b' = b$$

Si corta en $(a, 0)$:

$$y = 0 \to \frac{x}{a'} = 1 \to x = a' = a$$

Luego la ecuación de $r$ es: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0 \to \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

## Para profundizar

**100** **Las rectas $x + y - 2 = 0$ y $9x - 3y - 4 = 0$ son dos alturas del triángulo $ABC$ de vértice $A(2, 2)$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo.**

$A$ no pertenece a ninguna de las dos alturas, luego los lados del triángulo estarán en las rectas que pasan por $A = (2, 2)$ y son perpendiculares a las rectas dadas.

$r$: $x + y - 2 = 0$ tiene vector de dirección $(-1, 1)$.

El *lado* $AB$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

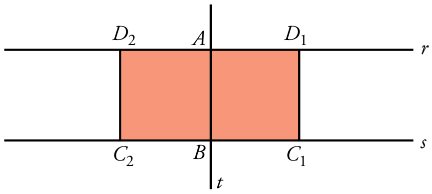
*Lado* $AB$: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = y - 2 \to x - y = 0$

$s$: $9x - 3y - 4 = 0$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 9) = 3(-1, 3)$.

El *lado* $AC$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

*Lado* $AC$: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = 3y - 6 \to x - 3y - 4 = 0$

**101** **Dos vértices contiguos de un cuadrado son $A(3, 1)$ y $B(4, 5)$. Calcula los otros vértices. ¿Cuántas soluciones hay?**




$C$ y $D$ son puntos de las rectas $s$ y $r$ perpendiculares a $AB$, y cuyas distancias a $B$ y $A$, respectivamente, son $|\overrightarrow{AB}|$:

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \ \to\ s: x + 4y + k = 0 \\ \text{Como } B \in s\end{array}\right\} \to 4 + 20 + k = 0 \to k = -24 \to s: x + 4y - 24 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \ \to\ r: x + 4y + k' = 0 \\ \text{Como } A \in r\end{array}\right\} \to 3 + 4 + k' = 0 \to k' = -7 \to r: x + 4y - 7 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \ \to\ t: 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Como } A \in t\end{array}\right\} \to 12 - 1 + k'' = 0 \to k'' = -11 \to t: 4x - y - 11 = 0$

- $C$ y $D$ son puntos que están en las rectas cuya distancia a $AB$ es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

  Sean $P(x, y)$ tales que:

  $$dist(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

  $$\begin{cases} 4x - y - 11 = 17 \ \to \\ 4x - y - 11 = -17 \ \to \end{cases} \begin{cases} t_1: 4x - y - 28 = 0 \\ t_2: 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

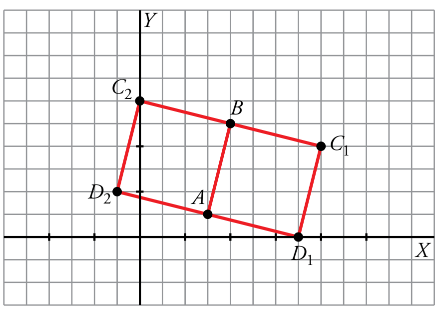
  Son dos rectas paralelas. Hay dos soluciones. Así:

  $$C_1 = t_1 \cap s \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \ \to\ x = 24 - 4y \end{cases} \to 96 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 4 \to x = 8 \to C_1(8, 4)$$

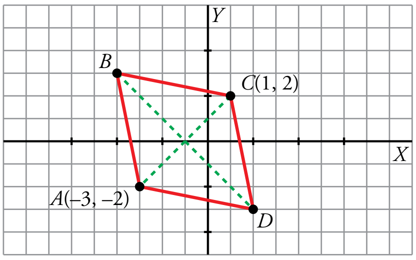
  $$C_2 = t_2 \cap s \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \ \to\ x = 24 - 4y \end{cases} \to 96 - 16y - y + 6 = 0 \to y = 6 \to x = 0 \to C_2(0, 6)$$

  $$D_1 = t_1 \cap r \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \ \to\ x = 7 - 4y \end{cases} \to 28 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 0 \to x = 7 \to D_1(7, 0)$$

  $$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \ \to\ x = 7 - 4y \end{cases} \to 28 - 16y - y + 6 = 0 \to y = 2 \to x = -1 \to D_2(-1, 2)$$



**102** **La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y sus extremos son los puntos $A(-3, -2)$ y $C(1, 2)$. Halla los vértices $B$ y $D$ y el perímetro del rombo.**




- $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \to |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Como esta diagonal mide lo mismo que el lado, entonces el perímetro será:

  Perímetro $= 4\,|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$

- Los otros dos vértices están en la perpendicular de $\overrightarrow{AC}$ por su punto medio $M(-1, 0)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\text{La recta } AC \text{ tiene por vector director } (1,1) \to x - y + k = 0\\ \text{Como, además, } A(-3,-2) \in \text{ recta } AC\end{array}\right\} \to$$

  $$\to -3 + 2 + k = 0 \to k = 1 \to AC: x - y + 1 = 0$$

  La recta $s$ perpendicular a $AC$ será:

  $$\left.\begin{array}{l}s: x + y + k' = 0\\ \text{Como } M(-1,0) \in s\end{array}\right\} \to -1 + k' = 0 \to k' = 1 \to s: x + y + 1 = 0$$

  Los puntos $B$ y $C$ serán los $(x, y)$ que estén en $s$ y cuya distancia al vértice $A$ sea igual a la diagonal, es decir, igual a $4\sqrt{2}$.

  $(x, y) \in s \to x + y + 1 = 0 \to x = -1 - y$

  $$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = 4\sqrt{2} \to (x+3)^2 + (y+2)^2 = 32 \to$$

  $$\to (2 - y)^2 + (y + 2)^2 = 32 \to 4 + y^2 - 4y + y^2 + 4 + 4y = 32 \to 2y^2 = 24 \to$$

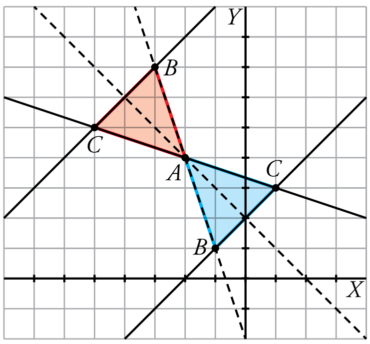
  $$\to y^2 = 12 \to \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{3} \to x_1 = -1 - 2\sqrt{3}\\ y_2 = -2\sqrt{3} \to x_2 = -1 + 2\sqrt{3}\end{cases}$$

  Luego, los vértices $B$ y $C$ son:

  $$(-1 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) \text{ y } (-1 + 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

**103** **En un triángulo isósceles $ABC$ con lado desigual $BC$, la ecuación del lado $AB$ es $3x + y + 2 = 0$ y la mediatriz del lado $BC$ es $x + y - 2 = 0$.**

**a) Calcula la ecuación del lado $AC$.** **b) Halla sus vértices si su área es $4\ u^2$.**



a) Por ser el lado $BC$ el lado desigual, la mediatriz de $BC$ pasa por $A$.

$A \in$ *lado AB*, luego $A$ es solución del sistema.

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases} \to x = -2,\ y = 4 \to A = (-2, 4)$$

La mediatriz en este caso es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$, luego el lado $AC$ es la recta simétrica de $AB$ respecto de la mediatriz $s$.

Buscamos un punto $Q \neq A$ de $r = lado\ AB$ y encontramos su simétrico $Q'$ respecto de $s$.

$Q \in r \to x = 0 \to y = -2$

$Q = (0, -2)$

Para hallar el simétrico de $Q$ respecto de $s$, calculamos la recta $l$ perpendicular a $s$ que pasa por $Q$:

$l$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $Q = (0, -2)$.

$$l: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} \to x = y + 2 \to x - y - 2 = 0$$

$M = s \cap l$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \to x = 2,\ y = 0 \to M = (2, 0)$$

$M$ es el punto medio entre $Q$ y $Q' = (x, y)$:

$$(2, 0) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \to \begin{cases} 2 = \dfrac{x}{2} \to x = 4 \\ 0 = \dfrac{y-2}{2} \to y = 2 \end{cases} \to Q' = (4, 2)$$

La recta $t$ pasa por $A$ y por $Q' = (4, 2)$.

$\overrightarrow{AQ'} = (6, -2) = 2(3, -1)$

$$t: \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} \to -x - 2 = 3y - 12 \to -x - 3y + 10 = 0$$

*Lado* $AC = t: -x - 3y + 10 = 0$

b) *Lado* $BC = s'$ es perpendicular a la mediatriz $\to s: x + y - 2 = 0$

$s': x - y + k = 0$

$$\text{Altura} = dist(A, lado\ BC) = \frac{|-2-4+k|}{\sqrt{2}} = \frac{|-6+k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k-6|}{\sqrt{2}}$$

$B \in lado\ AB \cap s'$

$$B \to \begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \to x = -\frac{1}{4}k - \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{4}k - \frac{1}{2} \to B = \left(-\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}k - \frac{1}{2}\right)$$

$C \in lado\ AC \cap s'$

$$C \to \begin{cases} -x - 3y + 10 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \to x = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}k,\ y = \frac{1}{4}k + \frac{5}{2} \to C = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}k, \frac{1}{4}k + \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}k - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}k, \frac{1}{4}k + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}k - 3, \frac{1}{2}k - 3\right)$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \frac{k-6}{\sqrt{2}} = \text{base}$$

$$\text{Área} = 4 = \frac{1}{2} \frac{|k-6|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k-6}{\sqrt{2}}$$

Hay dos posibilidades debido al valor absoluto:

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \to 16 = (k-6)^2 \to k = 2,\ k = 0 \\ -4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \to \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

Si $k = 2 \to$ *lado* $BC: x - y + 2 = 0 \to B = (-1, 1);\ C = (1, 3)$

Si $k = 10 \to$ *lado* $BC: x - y + 10 = 0 \to B = (-3, 7);\ C = (-5, 5)$

**104** **$A(1, 1)$ y $B(5, 1)$ son dos vértices de un trapecio rectángulo y uno de sus lados está sobre la recta $y = x + 1$. Calcula los otros dos vértices (hay dos soluciones).**

Podemos comprobar que $A, B \notin r$.

Como un lado está sobre $r$, los otros dos vértices están en $r$ y, por tanto, $A$ y $B$ son vértices consecutivos.

Además, un vector dirección de $r$ es $\vec{r} = (1, 1)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$.

Por tanto, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \to$ los lados $AB$ y $CD$ no son paralelos, luego no son las bases del trapecio.

Podemos construir dos trapecios:

a) $ABC_1D_1$, donde $AB$ es la altura del trapecio:

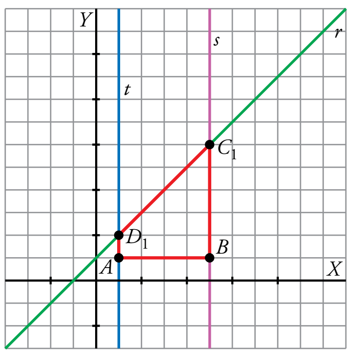
$C_1$ y $D_1$ serán los puntos de corte de $r$ con las rectas perpendiculares a $AB$ que pasan por $B$ y $A$, respectivamente.

- $\left.\begin{array}{l} t \perp \overrightarrow{AB} \to 4x + k = 0 \\ \text{Como } A(1, 1) \in t \end{array}\right\} \to 4 + k = 0 \to k = -4 \to t: 4x - 4 = 0 \to t: x = 1$

  Así: $D_1 = t \cap r: \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \to y = 2 \to D_1(1, 2)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp \overrightarrow{AB} \to 4x + k = 0 \\ \text{Como } B(5, 1) \in s \end{array}\right\} \to 4 \cdot 5 + k = 0 \to k = -20 \to s: 4x - 20 = 0 \to s: x = 5$

  Así: $C_1 = s \cap r: \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \to y = 6 \to C_1(5, 6)$




b) $ABC_2D_2$, donde $C_2D_2$ es la altura del trapecio:

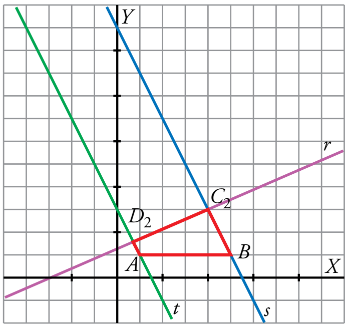
$C_2$ y $D_2$ serán los puntos de corte de $r$ con las rectas perpendiculares a $r$ que pasan por $B$ y $C$, respectivamente (es decir, $C_2$ y $D_2$ son los pies de dichas perpendiculares).

- $\left.\begin{array}{l} t \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } A \in t \end{array}\right\} \to 1 = -1 + k \to k = 2 \to t: y = -x + 2$

Así: $D_2 = t \cap r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 2 = x + 1 \to 1 = 2x \to x = \dfrac{1}{2} \to y = \dfrac{3}{2} \to D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } B \in s \end{array}\right\} \to 1 = -5 + k \to k = 6 \to s: y = -x + 6$

Así: $C_2 = s \cap r: \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 6 = x + 1 \to 5 = 2x \to x = \dfrac{5}{2} \to y = \dfrac{7}{2} \to C_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$




**105** **Toda recta se puede expresar como $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = d$, donde $\theta$ es el ángulo que forma la recta con el eje de ordenadas y $d$ es su distancia al origen de coordenadas (se conoce como ecuación de Hesse). Escribe en esa forma la recta $4x + 3y - 12 = 0$.**

$dist(O, r) = \dfrac{|-12|}{5}$

$d = \dfrac{|-12|}{5} = \dfrac{12}{5}$

Dividimos entre 5 en la ecuación de la recta y obtenemos:

$\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y = \dfrac{12}{5} \to 0,8x + 0,6y = \dfrac{12}{5}$

$0,8 = \cos 36° \, 52'$

$0,6 = \operatorname{sen} 36° \, 52'$

Luego la ecuación que buscamos es: $x \cos 36° \, 52' + y \operatorname{sen} 36° \, 52' = \dfrac{12}{5}$

**Página 213**

# Autoevaluación

**1** **Se consideran los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 9)$ y $C(-4, k)$.**

**a) Calcula las coordenadas de un punto $P$ que divide al segmento $AB$ en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$.**

**b) Determina $k$ para que el punto $C$ sea el simétrico de $B$ respecto de $A$.**

a) $A(0, 1)$, $B(4, 9)$, $C(-4, k)$

Sea $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \to (x, y-1) = \frac{1}{3}(4-x, 9-y) \to \left.\begin{cases} 3x = 4-x \to x = 1 \\ 3y-3 = 9-y \to y = 3 \end{cases}\right\} \to P(1, 3)$$

b) $A$ debe ser el punto medio de $CB$.

$$(0, 1) = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{9+k}{2}\right) \to 9 + k = 2 \to k = -7$$

**2** **Calcula la ecuación de estas rectas:**

**a) Pasa por $A(3, 2)$ y por $B(-2, 1)$, en forma paramétrica e implícita.**

**b) Pasa por (0, 0) y tiene pendiente $m = -\frac{1}{3}$, en forma continua y explícita.**

a) Vector dirección $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = (5, 1)$. Vector de posición: $\vec{p}(3, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$t = y - 2$; $x = 3 + 5(y - 2) = 3 + 5y - 10 \to x - 5y + 7 = 0$

Ecuación implícita: $x - 5y + 7 = 0$

b) $m = -\frac{1}{3} \to$ vector dirección: $\vec{d}(3, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

$3y = -x \to y = -\frac{x}{3}$

Ecuación explícita: $y = -\frac{x}{3}$

**3** **Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:**

**a) Pasa por $P(2, -3)$ y es perpendicular a $y = \frac{-2}{5}x + 1$.**

**b) Es paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ y su ordenada en el origen es 2.**

a) Una recta perpendicular a la dada tiene pendiente $m = \frac{5}{2}$. Como ha de pasar por $P(2, -3)$, su ecuación es:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \to 2y + 6 = 5x - 10 \to 5x - 2y - 16 = 0$$

b) Una recta paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ es $2x + 3y + k = 0$.

Como ha de pasar por (0, 2), debe ser $k = -6$.

La recta buscada es $2x + 3y - 6 = 0$.

**4** **Escribe la ecuación del haz de rectas que pasa por (5, 1) y halla la recta de dicho haz que pasa por (0, 1).**

El haz de rectas que pasa por el punto (5, 1) es $a(x-5)+b(y-1)=0$.

La recta del haz que pasa por (0, 1) es la recta que pasa por (5, 1) y por (0, 1). Por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x}{5}=\frac{y-1}{0} \rightarrow y=1$$

**5** **Estudia la posición relativa de las rectas $r$ y $s$ y de las rectas $r$ y $t$, donde:**

$$r: 3x+5y-34=0 \qquad s: y=\frac{5}{3}x \qquad t: \begin{cases} x=k \\ y=2 \end{cases}$$

- Posición relativa de $r$ y $s$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \\ \text{Vector dirección de } s,\ \vec{d}_s(3,5) \end{array}\right\} r \text{ y } s \text{ son perpendiculares.}$$

- Posición relativa de $r$ y $t$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } t,\ \vec{d}_t(1,0) \\ \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \end{array}\right\} r \text{ y } t \text{ son secantes.}$$

**6** **Calcula $k$ para que las rectas $r: y=3$ y $s: y=kx+1$ formen un ángulo de 60°.**

La recta $r: y=3$ es paralela al eje de abscisas. Así, la tangente del ángulo que forman $r$ y $s$ coincide con la pendiente de $s$, que es igual a $k$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha=k \\ tg\ 60°=\sqrt{3} \end{array}\right\} k=\sqrt{3}$$

**7** **Considera los puntos $A(0, k)$ y $B(8, 5)$ y la recta $r: 3x+4y+1=0$. Determina el valor de $k$ para que:**

**a) La distancia entre $A$ y $B$ sea igual a 10.**

**b) La distancia entre $A$ y $r$ sea 1.**

a) $dist(A, B)=\sqrt{8^2+(5-k)^2}=\sqrt{64+25+k^2-10k}=10 \rightarrow k^2-10k-11=0 < \begin{array}{l} k=11 \\ k=-1 \end{array}$

b) $dist(A, r)=\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot k+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|4k+1|}{5}=1 < \begin{array}{l} 4k+1=5 \rightarrow k=1 \\ 4k+1=-5 \rightarrow k=-3/2 \end{array}$

**8** **En el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(4, 1)$, halla el ortocentro y el circuncentro.**

*ORTOCENTRO*: $R=h_A \cap h_B \cap h_C$ donde $h_A$, $h_B$ y $h_C$ son las tres alturas (desde $A$, $B$ y $C$, respectivamente).

- $h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC}=(3,-2) \rightarrow \vec{a}=(2,3) \\ A \in h_A \end{cases} \rightarrow h_A: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=2+3t \end{cases} \rightarrow \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{3} \rightarrow h_A: 3x-2y+13=0$

- $h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC}=(7,-1) \rightarrow \vec{b}=(1,7) \\ B \in h_B \end{cases} \rightarrow h_B: \begin{cases} x=1+t \\ y=3+7t \end{cases} \rightarrow x-1=\dfrac{y-3}{7} \rightarrow h_B: 7x-y-4=0$

- $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB}=(4,1) \rightarrow \vec{c}=(1,-4) \\ C \in h_C \end{cases} \rightarrow h_C: \begin{cases} x=4+t \\ y=1-4t \end{cases} \rightarrow x-4=\dfrac{y-1}{-4} \rightarrow h_C: 4x+y-17=0$

Bastaría con haber calculado dos de las tres alturas y ver el punto de intersección:

$$h_B \cap h_C: \begin{cases} 7x - y - \ \ 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases} \quad \text{Sumando:}$$

$$11x \qquad - 21 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{21}{11}; \ y = 7x - 4 = 7 \cdot \frac{21}{11} - 4 = \frac{147 - 44}{11} = \frac{103}{11} \ \rightarrow \ R\left(\frac{21}{11}, \frac{103}{11}\right)$$

NOTA: Puede comprobarse que el ortocentro, $R$, está también en $h_A$. Basta con sustituir en su ecuación.

*CIRCUNCENTRO*: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, donde $m_A$, $m_B$ y $m_C$ son las tres mediatrices (desde $A$, $B$ y $C$, respectivamente)

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \ \rightarrow \ \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punto medio de } BC\text{: } M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \rightarrow \ y - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \ \rightarrow \ y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \ \rightarrow \ \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punto medio de } AB\text{: } M'\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \rightarrow \ y - \frac{5}{2} = -4(x + 1) \ \rightarrow \ y = -4x - \frac{3}{2}$

Así:

$$S = m_A \cap m_C: \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \\ y = -4x - \frac{3}{2} \end{cases} \ \rightarrow \ \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = -4x - \frac{3}{2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 6x - 7 = -16x - 6 \ \rightarrow \ 22x = 1 \ \rightarrow \ x = \frac{1}{22} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ y = -4 \cdot \frac{1}{22} - \frac{3}{2} = \frac{-4 - 33}{22} = \frac{-37}{22}$$

Así, $S\left(\frac{1}{22}, \frac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Se podría calcular $m_B$ y comprobar que $S \in m_B$.