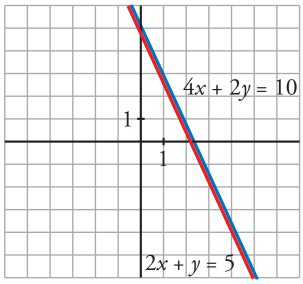
Resuelve

Página 33

Ecuaciones e incógnitas

1. ***¿Podemos decir que las dos ecuaciones siguientes son dos "datos distintos"? ¿No es cierto que la segunda dice lo mismo que la primera?***

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

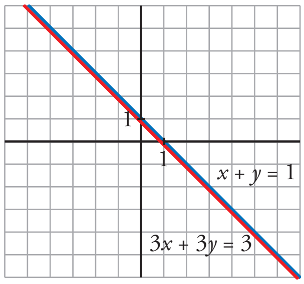


- **Represéntalas gráficamente y observa que se trata de la misma recta.**

  Se trata de la misma recta.

- **Escribe otro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que la segunda ecuación sea, en esencia, igual que la primera. Interprétalo gráficamente.**

  $$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$ Gráficamente son la misma recta.

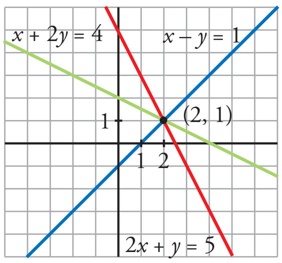


2. Observa las ecuaciones siguientes: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

La tercera ecuación se ha obtenido restando, miembro a miembro, las dos primeras:

$$(3.^{a}) = (1.^{a}) - (2.^{a})$$

Por tanto, ***lo que dice la tercera ecuación se deduce de lo que dicen las otras dos: no aporta nada nuevo.***



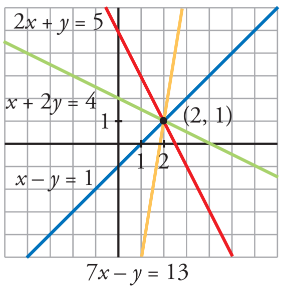
- **Represéntalas gráficamente y observa que las dos primeras rectas determinan un punto (con esos dos datos se responde a las dos preguntas: $x = 2$, $y = 1$). Comprueba que la tercera recta también pasa por ese punto.**

- **Da otra ecuación que también sea "consecuencia" de las dos primeras.**

  Por ejemplo: $2 \cdot (1.^{a}) + 3 \cdot (2.^{a})$

  Represéntala y observa que también pasa por $x = 2$, $y = 1$.

  $2 \cdot 1.^{a} + 3 \cdot 2.^{a} \rightarrow 7x - y = 13$



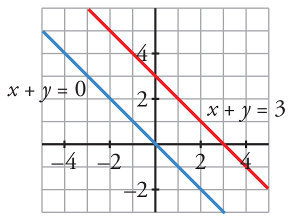
3. ¿Es posible que dos ecuaciones digan cosas contradictorias?

- **Escribe dos ecuaciones que se contradigan y representa las rectas correspondientes.**

  Sí es posible. Por ejemplo:

  $x + y = 0$

  $x + y = 3$



1 Sistemas de ecuaciones lineales

Página 35

1 ¿Verdadero o falso?

a) En un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (x, y) la ecuación $x + y = 4$ tiene, entre otras, la solución (3, 1).

b) En un sistema con tres incógnitas (x, y, z) la ecuación $x + y = 4$ no tiene sentido.

c) En un sistema con tres incógnitas (x, y, z) la ecuación $x + y = 4$ sí tiene sentido. Representa un plano. Algunas soluciones suyas son (3, 1, 0), (3, 1, 7), (3, 1, –4).

d) Si estamos en el plano (dos incógnitas, x, y) la ecuación $y = 0$ representa al eje X.

e) Si estamos en el espacio (tres incógnitas, x, y, z) la ecuación $y = 0$ representa al plano XZ.

a) Verdadero, porque 3 + 1 = 4 y hay más soluciones, como (4, 0).

b) Falso, (3, 1, 0) es solución de esa ecuación. Podemos poner cualquier valor en la tercera coordenada.

c) Verdadero.

d) Verdadero, porque los puntos del eje X son de la forma $(a, 0)$.

e) Verdadero, porque los puntos del plano XZ son de la forma $(a, 0, b)$.

2 Sin resolverlos, explica por qué son equivalentes los siguientes pares de sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x \quad\; = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y \quad\;\; = 7 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \qquad\quad z = 2 \\ x + y \quad = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \;\; y - z = 5 \\ x + \;\; y \quad\;\; = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \qquad\quad z = 2 \\ x + y \quad = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + \;\; y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + y - z = 11 \\ \quad\;\; y \quad\;\; = -4 \end{cases}$

a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.

b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).

d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

2 Posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Página 37

1 Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \to y = 1 - 2x \\ \\ \to y = 3 - x \end{array}\right\} \; 1 - 2x = 3 - x \to x = -2, \; y = 3 - (-2) = 5$

Veamos si cumple la 2.ª ecuación:

$$3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$$

Solución: $x = -2$, $y = 5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right\}$ La 3.ª ecuación se obtiene sumando las dos primeras; podemos prescindir de ella.

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$

Solución: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$ Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es incompatible.

Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solución: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2 a) Resuelve este sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{cases}$$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que el sistema sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + \ \ y \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \ \rightarrow \ -1 = 3y \ \rightarrow \ y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$

Solución: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores).

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) $\rightarrow$ Son dos rectas que se cortan en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) $\rightarrow$ La nueva recta también pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) $\rightarrow$ La nueva recta no pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No existe ningún punto común a las tres rectas.

Se cortan dos a dos.

3 Sistemas escalonados

Página 38

1 Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

a) $\begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}$

Solución: $x = \dfrac{7}{3},\ y = \dfrac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solución: $x = 3,\ y = -29,\ z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Soluciones: $x = 3 + \lambda,\ y = -29 - 19\lambda,\ z = 11 + 6\lambda,\ t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$

Solución: $x = 1,\ y = \dfrac{16}{9},\ z = \dfrac{-2}{3}$

2 ¿Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos:

a) $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0,\ y = \dfrac{1}{2},\ z = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x \quad\; - z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x \quad = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda,\ y = 5 - 3\lambda,\ z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y \quad = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \quad = 2 + y \\ x + z = 3 - y \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - 2 - y = 1 - 2y \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda,\ y = \lambda,\ z = 1 - 2\lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z \quad = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 2z \quad = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$

Solución: $x = 2,\ y = 5,\ z = 1,\ t = 2$

Página 39

3 Transforma en escalonados y resuelve.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + (1.^a) \end{subarray}} \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 11x \quad = 33 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = \dfrac{21 - 2x}{-3} = -5 \end{array}$

Solución: $x = 3,\ y = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{subarray}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) \end{subarray}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{subarray}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}$

Solución: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{subarray}} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array}\right\}$

Podemos prescindir de la 3.ª ecuación, pues es igual que la 2.ª.

$\xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : (-2) \end{subarray}} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{array}$

Soluciones: $x = 1,\ y = 5 - \lambda,\ z = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 3\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 3y - 4z + 3w = 18 \\ -2y - 2z + 2w = -26 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - 3\cdot(2.^a)\\(4.^a)+2\cdot(2.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 38z - 18w = 114 \\ -30z + 16w = -90 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(1/2)\cdot(3.^a)\\(1/2)\cdot(4.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 19z - 9w = 57 \\ -15z + 8w = -45 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\\19\cdot(4.^a)+15\cdot(3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 19z - 9w = 57 \\ 17w = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} w = 0 \\ z = \dfrac{57}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array}$

Solución: $x = 1,\ y = 10,\ z = 3,\ w = 0$

4 Método de Gauss

Página 40

1 ¿Verdadero o falso?

a) Es posible que un sistema incompatible, al aplicar el método de Gauss, de lugar a un sistema escalonado compatible. O viceversa.

b) Al aplicar el método de Gauss, el sistema escalonado al que se llega finalmente es del mismo tipo que el sistema inicial, pues todos los pasos que se dan transforman cada sistema en otro equivalente a él.

a) Falso. Las soluciones de un sistema no dependen del método empleado para resolverlo.

b) Verdadero. Las soluciones de un sistema no dependen del método empleado para resolverlo.

Página 42

2 Resuelve estos sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \cdot (-1) \\ (3.^a) \cdot 5 + (2.^a) \cdot 3 \end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \\ 2z = 24 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 3 \\ y = \dfrac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}$

Solución: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) - 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 5 \cdot (2.^a) \end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{array}$

Soluciones: $x = -3 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -2 + \lambda$

3 Resuelve mediante el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 - 2z + y \\ y = \dfrac{5 - 3z}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

$x = 2 - 2z + \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{7z}{2}$

Soluciones: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda, \; y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda, \; z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (4.^a) \\ (4.^a) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; w = 0$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (4.^a) \\ (4.^a) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{array}\right\}$

$x = \dfrac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \dfrac{69}{4} \qquad y = \dfrac{x + z - 11}{2} = \dfrac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \dfrac{53}{4}$

Solución: $x = \dfrac{-3}{4}, \; y = \dfrac{11}{4}, \; z = \dfrac{69}{4}, \; w = \dfrac{53}{4}$

5 Discusión de sistemas de ecuaciones

Página 43

1 Discute, en función de k, estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x = 3 - 2y \end{array}\right\} \to x = \frac{3-2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3-2y}{4} - 2 + y = \frac{-5+2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \frac{3}{4} - \lambda,\ y = 2\lambda,\ z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (3-k) \end{array}\right\} x = \frac{3-k}{k-3} = -1;\ y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solución: $x = -1,\ y = 2 + \frac{k}{2},\ z = -1 + \frac{k}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$

- Si $k = 3$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ El sistema es *incompatible*.

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (2-k) \end{array}\right\} x = \frac{2-k}{k-3};\ y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solución: $x = \frac{2-k}{k-3},\ y = \frac{k^2+k-8}{2k-6},\ z = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$

2 **Discute estos sistemas de ecuaciones en función de k:**

a) $\begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad + z = k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y \quad = k \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad + z = k \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$

- Si $k = -3$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*.

- Si $k \neq -3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} (k+3)x \qquad = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad + z = k \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{k+3}$$

Solución: $x = \dfrac{8+2k}{k+3}$, $y = \dfrac{-k^2-k+8}{k+3}$, $z = \dfrac{k^2-k-16}{k+3}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y \quad = k \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$

- Si $k = -1$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*.

- Si $k \neq -1$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \quad + z = 1 \\ y \quad + kz = 1 \\ (-1-k)z = k - 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k\left(\frac{2-k}{1+k}\right) = 1 \ \rightarrow \ y = 1 - \frac{2k-k^2}{1+k} = \frac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} = \frac{-2+3k-k^2}{1+k}$$

Solución: $x = \dfrac{-2+3k-k^2}{1+k}$, $y = \dfrac{1-k+k^2}{1+k}$, $z = \dfrac{2-k}{1+k}$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 44

1. Método de Gauss

Hazlo tú. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y + z - 2t = -5 \\ 2x - y - t = 0 \\ x + z - 3t = -2 \\ -x + y - 2z + t = 0 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -y + z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Soluciones: $(-1,\ 1 + \lambda,\ \lambda)$

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+2\cdot(1.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\\(4.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

La tercera ecuación no se puede cumplir nunca. El sistema no tiene solución.

Página 45

2. Discusión de sistemas aplicando el método de Gauss

Hazlo tú. Discute y resuelve, en función del parámetro, aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a)+2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 1$, el sistema es *compatible determinado*.

$$\left.\begin{array}{r} -x \qquad\qquad - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ (m-1)y \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } x = -1,\ y = 0,\ z = 1$$

- Si $m = 1$, el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} -x \qquad - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ 0y \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones: } x = 2 - 3\lambda,\ y = 4 - 4\lambda,\ z = \lambda$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array}\right)$

- Si $a \neq 2$, el sistema es *compatible determinado*.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución:}\ \ x = 3,\ \ y = -\frac{3a-4}{a-2},\ \ z = \frac{2}{a-2}$$

Los tres planos se cortan en un punto.

- Si $a = 2$, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema es *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos.

Página 46

3. Sistemas con más incógnitas que ecuaciones

Hazlo tú. Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 4y + 6z = 2 \\ x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$

a) Pasamos z al segundo miembro y hacemos $z = \lambda$ (parámetro). Así el sistema tendrá tantas ecuaciones como incógnitas.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $(2, \lambda, \lambda)$. Son dos planos que se cortan en una recta.

b) Las dos ecuaciones representan al mismo plano puesto que una es el doble de la otra. Nos quedamos solo con la segunda ecuación, pasamos y y z al segundo miembro y hacemos $y = \lambda$ y $z = \mu$.

Las soluciones del sistema son $(1 + 2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu)$. Son dos planos coincidentes.

4. Planteamiento y discusión de un problema

Hazlo tú. El dinero que tienen entre A, B y C es el 150 % del que tienen entre A y B, y es el doble del que tienen entre A y C. Si C tiene el doble que A, ¿podemos saber cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x, y, z al dinero que tienen A, B y C, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{150}{100}(x + y) \\ x + y + z = 2(x + z) \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 15x + 15y \\ x + y + z = 2x + 2z \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x - 5y + 10z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado, luego no podemos saber cuánto dinero tiene cada uno.

Ejercicios y problemas guiados

Página 47

1. Añadir una ecuación a un sistema

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$ ***de modo que sea:***

a) incompatible.

b) compatible determinado.

c) compatible indeterminado.

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

Hacemos $2 \cdot (1.^a) + (2.^a) \ \to \ 5x - y + 3z = 5$

Cambiamos el término independiente $\to \ 5x - y + 3z = 0$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 5x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

es *incompatible*.

b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \ \to \ x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda, \ \ y = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\lambda, \ \ z = \lambda$

Una solución es: $x = 1, \ \ y = 3, \ \ z = 1$

Añadimos la ecuación $x + y + z = 5$.

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

es *compatible determinado*.

c) Hacemos $2 \cdot (1.^a) + 3 \cdot (2.^a) \ \to \ 7x + y + z = 11$

Ponemos esta nueva ecuación que es combinación lineal de las anteriores.

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 7x + y + z = 11 \end{cases}$$

es *compatible indeterminado*.

2. Sistemas con infinitas soluciones

Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas que difieren solo en los términos independientes. Si S es compatible indeterminado, ¿lo será también S'?

Si S es compatible indeterminado significa que la columna de términos independientes es linealmente dependiente de las columnas de los coeficientes.

Al cambiar los términos independientes, cambiamos la columna correspondiente y puede que sera linealmente independiente con las anteriores, luego puede que el sistema resulte ser incompatible.

3. Sistema compatible

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de a y resolverlo en todos los casos que sea posible:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y + az = a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array}\right)$$

- Si $a = -1$, el sistema es *compatible indeterminado*:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 1 - \lambda \\ 3y = 4 - 3\lambda \end{array}\right\} \textit{Soluciones: } x = \frac{1}{3},\ y = \frac{4}{3} - \lambda,\ z = \lambda$$

- Si $a \neq -1$, el sistema es *compatible determinado*:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 3y + 3z = 4 \\ (a+1)z = (a+1) \end{array}\right\} \textit{Solución: } x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{3},\ z = 1$$

4. Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

Estudiar para qué valores de m el siguiente sistema tiene solución y resolverlo cuando esta sea única:

$$\begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ -mx + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + m \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ 0 & 1-m^2 & -1-m \end{array}\right)$$

$1 - m^2 = 0 \ \to \ m = 1,\ m = -1$

- Si $m \neq \pm 1$, el sistema es *compatible determinado*:

$$\left.\begin{array}{r} x - my = -1 \\ (1-m^2)y = -(1+m) \end{array}\right\} \textit{Solución: } x = -\frac{1}{1-m},\ y = -\frac{1}{1-m}$$

- Si $m = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 0y = -2 \end{array}\right\} \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $m = -1$, el sistema es *compatible indeterminado*:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -1 \\ 0y = 0 \end{array}\right\} \textit{Soluciones: } x = -1 - \lambda,\ y = \lambda$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 48

Para practicar

Resolución e interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales

1 **Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -5 \\ (3/2)\,x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} + 2\cdot\text{(1.ª)} \\ (2/3)\cdot\text{(3.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} + \text{(1.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2y = -2 \\ y = -1 \end{array}$$

Solución: (–2, –1)

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto (–2, –1).

b) Si dividimos la 3.ª ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1.ª ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1.ª y la 3.ª ecuación representan dos rectas paralelas; la 2.ª las corta.

c) $$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(2.ª)} \\ \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} - 3\cdot\text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(1.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} : 5 \\ \text{(3.ª)} : 2 \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(2.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ -y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -y = 1 \\ y = -1 \end{array}$$

Solución: (1, –1)

Son tres rectas que se cortan en el punto (1, –1).

d) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} - \text{(1.ª)} \\ \text{(3.ª)} - 2\cdot\text{(1.ª)} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

La 2.ª y 3.ª filas son contradictorias. No tiene solución.

Son tres rectas que se cortan dos a dos.

2 **Resuelve e interpreta geométricamente.**

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) - 3 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podemos prescindir de las dos últimas filas, pues coinciden con la primera.

Quedaría:

$$4y = -1 \;\to\; y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \;\to\; x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -9 & 13 \end{array}\right)$

De la 2.ª ecuación, obtenemos $y = -1$; de la 3.ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-13}{9}$.

Luego el sistema es *incompatible*.

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

3 **Resuelve e interpreta geométricamente estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} y - z = 5 \\ -y + z = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

La 2.ª ecuación contradice la opuesta de la 1.ª. No tiene solución.

Geométricamente, se trata de tres planos que se cortan dos a dos.

b) La 1.ª y la 2.ª ecuación son contradictorias. No tiene solución.

Geométricamente, se trata de dos planos paralelos que son cortados por un tercero.

4 Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividimos la 2.ª ecuación entre 2, obtenemos:

$x + 2y - z = \dfrac{1}{2}$, que contradice la 1.ª.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multiplicamos por $-\dfrac{2}{3}$ la 1.ª ecuación, obtenemos:

$\dfrac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradice la 2.ª ecuación.

El sisgtema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

5 Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = \dfrac{7 + y}{2} = 2 \end{array}\right\}$

Solución: (2, –3)

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} z = \dfrac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \dfrac{-7}{9} \qquad x = \dfrac{3 + y - z}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solución: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 5 \\ x = 2 - z + y = 7 - z \end{array}$

Soluciones: $(7 - \lambda, 5, \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 - z \\ y = 2 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2 - z \\ x = \dfrac{4 - z - y}{2} = \dfrac{4 - z - 2 + z}{2} = 1 \end{array}$

Soluciones: $(1, 2 - \lambda, \lambda)$

6 **Resuelve los siguientes sistemas escalonados:**

a) $\begin{cases} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ y + z - t = 3 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{array}\right\} \quad x = 0 \qquad z = x - 2 = -2 \qquad y = 9 + z - x = 7$

Solución: (0, 7, –2)

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right\} \quad y = \dfrac{1}{2} \qquad x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6} \qquad z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solución: $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y - z + t = 4 \\ y + z - t = 3 \\ z + 2t = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y - z = 4 - t \\ y + z = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{array}\right\}$

$z = 1 - 2t \qquad y = 3 + t - z = 2 + 3t \qquad x = 4 - t + z - y = 3 - 6t$

Soluciones: $(3 - 6\lambda, 2 + 3\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Soluciones: $(-5 + 3\lambda, 4 - \lambda, \lambda, -3 + 2\lambda)$

Método de Gauss

7 **Resuelve aplicando el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = 0 \end{array}\right\} \quad z = 0 \qquad y = -2 - z = -2 \qquad x = 1 - y = 3$

Solución: (3, –2, 0)

b) $\left.\begin{array}{r}x+\ \ y+\ \ z=0\\ x+3y+2z=0\\ 2x+4y+3z=0\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&3&2&0\\2&4&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to$

$\to\left.\begin{array}{r}x+\ y+z=0\\ 2y+z=0\end{array}\right\}\ y=-\dfrac{z}{2}\qquad x=-y-z=-\dfrac{z}{2}$

Soluciones: $\left(-\dfrac{\lambda}{2},-\dfrac{\lambda}{2},\lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{r}x+\ \ y-\ \ z=1\\ 3x+2y+\ \ z=1\\ 5x+3y+3z=1\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\3&2&1&1\\5&3&3&1\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)-5\cdot(1.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&4&-2\\0&-2&8&-4\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-2\cdot(2.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&4&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left.\begin{array}{r}x+y-\ z=1\\ -y+4z=-2\end{array}\right\}$

$y=4z+2$

$x=1-y+z=1-(4z+2)+z=-1-3z$

$z=\lambda$

Soluciones: $(-1-3\lambda,\ 2+4\lambda,\ \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r}3x+4y-\ \ z=3\\ 6x-6y+2z=-16\\ x-\ \ y+2z=-6\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}3&4&-1&3\\6&-6&2&-16\\1&-1&2&-6\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a):2\\(1.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\3&-3&1&-8\\3&4&-1&3\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&0&-5&10\\0&7&-7&21\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a):(-5)\\(3.^a):7\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&0&1&-2\\0&1&-1&3\end{array}\right)\to$

$\to\left.\begin{array}{r}x-\ y+2z=-6\\ z=-2\\ y-\ \ z=3\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}y=3+z=3-2=1\\ x=-6+y-2z=-6+1+4=-1\end{array}$

Solución: $(-1,\ 1,\ -2)$

8 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left\{\begin{array}{l}2x+5y\qquad\ =16\\ x+3y-2z=-2\\ x\qquad\ +\ z=4\end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l}3x+\ 2y+\ \ z=\ 1\\ 5x+\ 3y+\ 3z=\ 3\\ x+\ \ y+\ \ z=\ 0\end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l}x\ +y\ -z=\ 2\\ 2x\qquad\ +z=\ 2\\ x\ -y\qquad=\ 0\end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l}2x\ +y\qquad=3\\ x\ -y\ +z\ =1\\ 3x\qquad +z\ =4\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+5y\qquad=16\\ x+3y-2z=-2\\ x\qquad+\ z=4\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}2&5&0&16\\1&3&-2&-2\\1&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+2\cdot(3.^a)\\(3.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&5&0&16\\3&3&0&6\\1&0&1&4\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a):3\\(3.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&5&0&16\\1&1&0&2\\1&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)-5\cdot(2.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}-3&0&0&6\\1&1&0&2\\1&0&1&4\end{array}\right)\to\left.\begin{array}{r}-3x\qquad=6\\ x+y\qquad=2\\ x\qquad+z=4\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}x=-2\\ y=2-x=4\\ z=4-x=6\end{array}$

Solución: $(-2,\ 4,\ 6)$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-5\cdot(1.^a)\\(3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\-2\cdot(3.^a)+(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -2y-2z=3 \\ 2z=1 \end{array}\right\}\ z=\dfrac{1}{2} \qquad y=\dfrac{3+2z}{-2}=-2 \qquad x=-y-z=\dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -2, \dfrac{1}{2}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 2x\quad\ \ +z=2 \\ x-y\quad\ \ =0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-2 \\ -2z=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-2 \\ z=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y\quad=2 \\ -2y\quad=-2 \\ z=0 \end{array}\right\}$ $z=0 \qquad y=1 \qquad x=2-y=1$

Solución: (1, 1, 0)

d) $\left.\begin{array}{l} 2x+y\quad\ \ =3 \\ x-y+z=1 \\ 3x\quad\ \ +z=4 \end{array}\right\}$

Observamos que la 3.ª ecuación es la suma de la 1.ª y la 2.ª: podemos prescindir de ella.

$\left.\begin{array}{r} 2x+y\quad=3 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x=3-y \\ x+z=1+y \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=\dfrac{3-y}{2} \\ z=1+y-x=1+y-\dfrac{3-y}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3y}{2} \end{cases}$

Tomamos $y=2\lambda$.

Solución: $\left(x=\dfrac{3}{2}-\lambda,\ y=2\lambda,\ z=-\dfrac{1}{2}+3\lambda\right)$

9 **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - \ y - z = -10 \\ 2x - \ y + z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - \ y + z = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ x - \ y - z = -10 \\ 2x - \ y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ -(2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{array}\right\} \ y = 1 \quad z = \dfrac{19 - 3y}{2} = 8 \quad x = 9 - 2y - z = -1$

Solución: $(-1, 1, 8)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - \ y + z = -1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ -(2.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \dfrac{14}{5} + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3z}{5} \end{array}$

Si tomamos $z = 5\lambda$, las *soluciones* son: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda, \ \dfrac{7}{5} - \lambda, \ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

La segunda ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es *incompatible*.

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ y \ \ = 0 \\ 4x + \ y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ y \ \ = 0 \end{array}\right\} \ y = 3x \quad z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \quad x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 **Estudia y resuelve por el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad y = -\dfrac{1}{2} \qquad x = y + 3z + 2 = \dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \quad x = 1 + y \qquad z = -1 - y \qquad y = \lambda$

Soluciones: $(1 + \lambda, \lambda, -1 - \lambda)$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 3 \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$

Solución: $(1, 1, -1)$

d) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\-4 \cdot (2.^a) + 3 \cdot (3.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 0 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \quad t = 0 \qquad z = 0 \qquad x = y \qquad y = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

11 **Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ *Compatible indeterminado*

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - (1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & -1 & | & -4 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$ *Compatible determinado*

12 **Estudia y resuelve por el método de Gauss:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 5 & | & 11 \\ 1 & -5 & 6 & | & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - (1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 7 \\ 0 & -6 & 5 & | & 27 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) + 6 \cdot (2.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 7 \\ 0 & 0 & 23 & | & 69 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 3 \\ y = 7 - 3z = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}$

El sistema es *compatible determinado*, con *solución* (1, –2, 3).

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) + (1.^a)\\(3.^a) + (1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 6 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - 2 \cdot (2.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{array}$

El sistema es *compatible indeterminado*, con *soluciones* $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$.

Página 49

Para resolver

Discusión de sistemas de ecuaciones

13 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 \end{array}\right)$

- Si $m = 4 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.
- Si $m \neq 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado* para todo m.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array}\right)$

- Si $m = 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.
- Si $m \neq 0 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

d) $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 5 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.
- Si $m \neq 5 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado* con *solución* $(0, 0, 0)$.

14 **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ -x + (y/2) = -2 \\ x + ky = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$2x - y = 4 \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases}$

Soluciones: $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\frac{1}{2} \to$ Sistema *compatible determinado*.

$$\left.\begin{aligned} 2x - \quad\quad y &= 4 \\ (2k+1)y &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Solución: (2, 0)

b) $$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(2.^a)\\(1.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 5 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$$

- Si $m = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 5y - 3z &= -5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y &= \frac{-5+3z}{5} = -1 + \frac{3z}{5} \\ x &= 3 + 2y - z = 3 - 2 + \frac{6z}{5} - z = 1 + \frac{z}{5} \end{aligned}$$

Tomamos $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \to$ Sistema *incompatible*.

15 **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 1 \\ 4x + 3y &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 4 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a) : (-5)\\(3.^a) - (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7 \to$ Sistema *compatible determinado*.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} x = 3 - 2y = 1$$

Solución: (1, 1)

- Si $m \neq 7 \to$ Sistema *incompatible*.

b) $$\left.\begin{aligned} x - y - 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 1 \\ 3x \quad\quad + z &= 3 \\ x + 2y + 5z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\\(4.^a) - (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - (2.^a)\\(4.^a) - (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} x - \ y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3-7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Tomamos $z = 3\lambda$.

Soluciones: $(1 - \lambda,\ -1 - 7\lambda,\ 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

16 **Discute estos sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - 5 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2k+3 & -7 & 0 \\ 0 & 19 & -7 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2k-16 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & -7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -2k - 16 = 0 \rightarrow k = -8$

- Si $k \neq -8 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*; como es un sistema homogéneo, solo tiene la *solución trivial*: $(0, 0, 0)$.
- Si $k = -8 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 2.ª ecuación y lo resolvemos en función de $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -z \\ 19y = 7z \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones: } \left(\frac{1}{19}\lambda,\ \frac{7}{19}\lambda,\ \lambda\right)$$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{array}\right\}$ Cambiamos el orden de las dos primeras ecuaciones:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & k+2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right) \rightarrow k = 0$

- Si $k \neq 0 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \\ kz = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 0 \\ y = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

- Si $k = 0 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 3.ª ecuación para resolverlo:

$$\left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = -1 - z \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 - \lambda, \lambda)$

17 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y - z &= k \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y + kz &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado* para todo k.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 3x + ay + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 7 \cdot (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $a = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.
- Si $a \neq 10 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

c) $$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ mx + y - z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (3.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Compatible determinado para todo m.

d) $$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + az &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$$

$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.
- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

18 Discute y resuelve en función del parámetro:

a) $\begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} -x + my + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 0 \\ -x - 3z &= -2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{matrix}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a) + 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - (1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) + (2.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado.*

$$\left.\begin{aligned} -x \qquad - 3z &= -2 \\ -y - 4z &= -4 \\ (m-1)y \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solución:}\ (-1, 0, 1)$$

- Si $m = 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{aligned} -x \qquad - 3z &= -2 \\ -y - 4z &= -4 \\ 0y \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Soluciones:}\ (2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y + az &= 5 \\ 2x + y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a) - 3 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 2 \cdot (1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - (1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array}\right)$

- Si $a \neq 2 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado.*

$$\left.\begin{aligned} x + y + \qquad z &= 0 \\ -y + (a-3)z &= 5 \\ (2-a)z &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solución:}\ \left(3, -\frac{3a-4}{a-2}, \frac{2}{a-2}\right)$$

- Si $a = 2$, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema es *incompatible.*

19 **Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sean compatibles e interpreta geométricamente las soluciones obtenidas.**

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(2.ª)\\(1.ª)\\(3.ª)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.ª)\\(2.ª) - 2 \cdot (1.ª)\\(3.ª) - 5 \cdot (1.ª)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.ª)\\(2.ª)\\(3.ª) - (2.ª)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

  $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{array}\right\}$ $x = 2y - z + 3 = \dfrac{z+5}{5}$ $y = \dfrac{3z-5}{5}$

  Tomamos $z = 5\lambda$.

  Soluciones: $(\lambda + 1, 3\lambda - 1, 5\lambda)$

  Son tres planos que se cortan en una recta.

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ el sistema es *incompatible*.

  Son tres planos que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & 2 \\ 1 & m & 1 & m \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.ª)\\(2.ª) - m \cdot (1.ª)\\(3.ª) - (1.ª)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & -1 & 2-m \\ 0 & m-1 & 0 & m-1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.ª)\\(2.ª)\\(3.ª) + (2.ª)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & -1 & 2-m \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

De la 3.ª ecuación se deduce que $z = -1$. El sistema quedaría así:

$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ (1-m)y = 1-m \end{array}\right\}$

- Si $m = 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

  $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 0y = 0 \end{array}\right\}$

  Soluciones: $(2 - \lambda, \lambda, -1)$

  Son tres planos que se cortan en una recta.

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*.

  $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ (1-m)y = 1-m \end{array}\right\}$ $y = \dfrac{1-m}{1-m} = 1$ $x = 2 - 1 = 1$

  Solución: $(1, 1, -1)$

  Son tres planos que se cortan en un punto.

20 Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:

a) $\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)\cdot\alpha - (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$

- Si $\alpha = 1$, queda:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + 3y - 5z &= -16 \\ x + \alpha y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ 5\cdot(3.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$

- Si $\alpha \neq 0$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.
- Si $\alpha = 0$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

21 Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 6y + az = 0 \end{cases}$$

a) Deduce para qué valores de a el sistema solo tiene la solución (0, 0, 0).

b) Resuelve el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 5x + 6y + az &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 5\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a-5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-7 & 0 \end{array}\right)$

a) Como el sistema es homogéneo, si $a \neq 7$ solo tiene la solución trivial (0, 0, 0).

b) Si $a = 7$ $\rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad z = \lambda \qquad y = -2\lambda \qquad x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, -2\lambda, \lambda)$

22 Una tienda ha vendido 225 memorias USB de tres modelos diferentes, A, B, C, y ha ingresado un total de 10 500 €. La memoria A cuesta 50 €, y los modelos B y C son, respectivamente, un 10 % y un 40 % más baratos que el modelo A. La suma de las unidades vendidas de los modelos B y C es la mitad de las vendidas del modelo A. Calcula cuántas unidades se han vendido de cada modelo.

x = n.º de memorias vendidas del modelo A

y = n.º de memorias vendidas del modelo B

z = n.º de memorias vendidas del modelo C

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=225 \\ 50x+0,9\cdot 50y+0,6\cdot 50z=10\,500 \\ y+z=\dfrac{x}{2}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=225 \\ 50x+45y+30z=10\,500 \\ x-2y-2z=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=225 \\ -x+2y+2z=0 \\ 10x+9y+6z=2\,100\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 10 & 9 & 6 & 2\,100 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)-10\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 3 & 3 & 225 \\ 0 & -1 & -4 & -150 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\3\cdot(3.^a)+(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 3 & 3 & 225 \\ 0 & 0 & -9 & -225 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} x+y+z=225 \\ y+z=75 \\ z=25 \end{array}\right.$$

Se han vendido 150 memorias del modelo A, 50 del modelo B y 25 del modelo C.

23 Un barco transporta 400 vehículos (coches, camiones y motos). Por cada 2 motos hay 5 camiones. Los coches representan las 9/7 partes de los otros vehículos. ¿Cuántos vehículos de cada tipo transporta el barco?

x = n.º de coches

y = n.º de camiones

z = n.º de motos

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ \dfrac{z}{2}=\dfrac{y}{5} \\ x=\dfrac{9}{7}(y+z)\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=400 \\ 2y-5z=0 \\ 7x-9y-9z=0\end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 7 & -9 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-7\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -16 & -16 & -2\,800 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+8\cdot(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -56 & -2\,800 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} x+y+z=400 \\ 2y-5z=0 \\ z=50 \end{array}\right.$$

El barco transporta 225 coches, 125 camiones y 50 motos.

24 **a) Halla un número de tres cifras tal que la suma de las centenas y las unidades con el doble de las decenas es 23; la diferencia entre el doble de las centenas y la suma de las decenas más las unidades es 9 y la media de las centenas y decenas más el doble de las unidades es 15.**

b) ¿Es posible encontrar un número de tres cifras si cambiamos la tercera condición por "el triple de las centenas más las decenas es 25"?

a) El número buscado es xyz.

El sistema que expresa las condiciones del problema es:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ \dfrac{x+y}{2}+2z=15 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y+\ \ z=23 \\ 2x-\ \ y-\ \ z=9 \\ x+\ \ y+4z=30 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)-2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\5\cdot(3.^a)-(2.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & 0 & 18 & 72 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} x+2y+\ \ z=23 \\ -5y-3z=-37 \\ z=4 \end{array}\right.$$

El número es 954.

b) El sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ 3x+y\qquad=25 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y+z=23 \\ 2x-\ \ y-z=9 \\ 3x+\ \ y\qquad=25 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)-2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & -5 & -3 & -44 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Este sistema no tiene solución, luego no hay ningún número que verifique esas condiciones.

Página 50

25 **Las toneladas de combustible consumidas en una fábrica en el turno de mañana son igual a m veces las toneladas consumidas en el turno de tarde.**

Además, se sabe que el turno de tarde consume m toneladas menos que el turno de mañana.

a) Plantea y discute el problema en función de m.

b) ¿Es posible que el turno de mañana consuma el doble de combustible que el de tarde?

c) Si se supone que $m = 2$, ¿cuánto consume el turno de tarde?

x = n.º de toneladas de combustible consumidas en el turno de mañana.

y = n.º de toneladas de combustible consumidas en el turno de tarde.

a) $$\left.\begin{array}{l} x=my \\ y=x-m \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-my=0 \\ x-\ \ y=m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & -1 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 0 & -1+m & m \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 1$, se pueden despejar todas las incógnitas, luego el problema tiene solución única.

$$\left.\begin{array}{l} x-my=0 \\ (-1+m)y=m \end{array}\right\} \; x=\frac{m^2}{m-1} \qquad y=\frac{m}{m-1}$$

Solución: $\left(\dfrac{m^2}{m-1}, \dfrac{m}{m-1}\right)$

- Si $m = 1$, la segunda ecuación sería $0y = 1$, que es una expresión imposible, luego el sistema no tiene solución.

b) Sí, porque $x = 2y$ para $m = 2$.

c) Si $m = 2 \to y = \dfrac{m}{m-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$. El turno de tarde consume 2 toneladas de combustible.

26 **Una panadería utiliza tres ingredientes A, B y C para elaborar tres tipos de tarta.**

La tarta T_1 se hace con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C.

La tarta T_2 lleva 4 unidades de A, 1 de B y 1 de C.

Y la T_3, necesita 2 unidades de A, 1 de B y 2 de C.

Los precios de venta al público son 7,50 € la T_1; 6,50 € la T_2 y 7 € la T_3.

Sabiendo que el beneficio que se obtiene con la venta de cada tarta es de 2 €, calcula cuánto le cuesta a la panadería cada unidad de A, B y C.

x = precio por unidad de A

y = precio por unidad de B

z = precio por unidad de C

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=5,50 \\ 4x+\;y+\;z=4,50 \\ 2x+\;y+2z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5,50 \\ 4 & 1 & 1 & 4,50 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-4\cdot(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5,50 \\ 0 & -7 & -7 & -17,50 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\7\cdot(3.^a)-3\cdot(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5,50 \\ 0 & -7 & -7 & -17,50 \\ 0 & 0 & 7 & 10,5 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} x+2y+2z=5,50 \\ -7y-7z=-17,50 \\ z=1,50 \end{array}\right.$$

La unidad de A cuesta 0,50 €, la unidad de B cuesta 1 € y la unidad de C cuesta 1,50 €.

27 **Tres comerciantes invierten en la compra de ordenadores de los modelos A, B y C de la siguiente forma:**

El primero invierte 50 000 € en los de tipo A, 25 000 € en los de tipo B y 25 000 € en los de tipo C.

El segundo dedica 12 500 € a los de tipo A, 25 000 € a los de tipo B y 12 500 € a los de tipo C.

Y el tercero, 10 000 €, 10 000 € y 20 000 €, respectivamente, en los modelos A, B y C.

Después de venderlos todos, la rentabilidad que obtiene el primero es el 15 %, el segundo el 12 % y el tercero el 10 %. Determina la rentabilidad de cada uno de los modelos vendidos.

x = rentabilidad del modelo A

y = rentabilidad del modelo B

z = rentabilidad del modelo C

$$\left.\begin{array}{r} 50\,000x+25\,000y+25\,000z=0,15\cdot 100\,000 \\ 12\,500x+25\,000y+12\,500z=0,12\cdot 50\,000 \\ 10\,000x+10\,000y+20\,000z=0,10\cdot 40\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 50x+25y+\;\;25z=15 \\ 12,5x+25y+12,5\,z=6 \\ 10x+10y+\;\;20z=4 \end{array}\Bigg\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 25 & 25 & 15 \\ 12,5 & 25 & 12,5 & 6 \\ 10 & 10 & 20 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\50\cdot(2.^a)-12,5\cdot(1.^a)\\5\cdot(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 25 & 25 & 15 \\ 0 & 937,5 & 312,5 & 112,5 \\ 0 & 25 & 75 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(3.^a)\\25\cdot(2.^a)-937,5\cdot(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 25 & 25 & 15 \\ 0 & 25 & 75 & 5 \\ 0 & 0 & -62\,500 & -1\,875 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} 50x+25y+25z=15 \\ 25y+75z=5 \\ z=0,03 \end{array}\right.$$

La rentabilidad del modelo A es del 23 %, la rentabilidad del modelo B es del 11 % y la rentabilidad del modelo C es del 3 %.

28 **La suma de las tres cifras de un número es 13. Si se intercambian la cifra de las unidades y la de las centenas, el número aumenta en 495. La cifra de las centenas excede en m unidades a la de las decenas.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones y razona para qué valores de m es compatible determinado.

b) ¿Qué valores puede tomar m para que el problema tenga solución? Calcula la solución para $m = 4$.

Número: $xyz = 100x + 10y + z$

Si intercambiamos unidades y centenas, el número es: $zxy = 100z + 10y + x$

a) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z+495 \\ x=y+m \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ -99x+99z=495 \\ x-y=m \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ -x+z=5 \\ x-y=m \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & -2 & -1 & m-13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+2\cdot(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & m+23 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ y+2z=18 \\ -3z=m+23 \end{array}\right.$$

El sistema es siempre compatible determinado porque se pueden despejar todas las incógnitas.

La solución sería: $x = \dfrac{m+8}{3}$, $y = \dfrac{8-2m}{3}$, $z = \dfrac{m+23}{3}$

b) Como las cifras tienen que ser números naturales entre 0 y 9, debe verificarse que $m \le 4$ para que $y > 0$. Por tanto, los posibles valores de m serán:

$m = 1$, se obtienen números naturales $\to$ $x = 3$, $y = 2$, $z = 8$

$m = 2$ o $m = 3$, no se obtienen números naturales. No sirven.

$m = 4$, se obtienen números naturales $\to$ $x = 4$, $y = 0$, $z = 9$

Si $m = 4$, el número buscado es 409.

29 **Nos cobran 200 € por dos chaquetas y una blusa. Si compramos una chaqueta y un pantalón y devolvemos la blusa, nos cobran 100 €.**

¿Cuánto nos cobrarán por cinco chaquetas, un pantalón y una blusa?

x = precio de una chaqueta

y = precio de una blusa

z = precio de un pantalón

$\left.\begin{array}{l} 2x+y=200 \\ x+z-y=100 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} y=200-2x & (1) \\ z=100-x+y & (2) \end{array}$

Sustituyendo (1) en (2), $z = 100 - x + 200 - 2x \to z = 300 - 3x$

Por tanto:

$5x + z + y = 5x + 300 - 3x + 200 - 2x = 500$ euros

30 **Un país importa 21 000 vehículos de tres marcas, A, B y C, al precio de 10 000, 15 000 y 20 000 euros. El total de la importación es de 322 millones de euros. Se sabe que hay 21 000 vehículos contando los de la marca B y k veces los de la A.**

a) Plantea un sistema con las condiciones del problema en función del número de vehículos de cada marca.

b) Resuelve el sistema en el caso $k = 3$.

c) Comprueba que el sistema no tiene solución en el caso $k = 2$.

a) x = n.º de vehículos de la marca A

y = n.º de vehículos de la marca B

z = n.º de vehículos de la marca C

$$\begin{cases} x + y + z = 21\,000 \\ 10\,000x + 15\,000y + 20\,000z = 322\,000\,000 \\ kx + y = 21\,000 \end{cases}$$

b) Si $k = 3$:

$$\left.\begin{array}{r} x + \ y + \ z = 21\,000 \\ 2x + 3y + 4z = 64\,400 \\ 3x + \ y \qquad = 21\,000 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 2 & 3 & 4 & 64\,400 \\ 3 & 1 & 0 & 21\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & -2 & -3 & -42\,000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & 0 & 1 & 2\,800 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 2\,800 \\ y + 2z = 22\,400 \ \rightarrow \ y = 22\,400 - 5\,600 \ \rightarrow \ y = 16\,800 \\ x + y + z = 21\,000 \ \rightarrow \ x = 21\,000 - 16\,800 - 2\,800 \ \rightarrow \ x = 1\,400 \end{cases}$$

Se importaron 1 400 vehículos de la marca A, 16 800 de la marca B y 2 800 de la marca C.

c) Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 2 & 3 & 4 & 64\,400 \\ 2 & 1 & 0 & 21\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & -1 & -2 & -21\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & 0 & 0 & 1\,400 \end{array}\right)$$

Sistema *incompatible*.

Cuestiones teóricas

31 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas y pon ejemplos.**

a) A un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas que es compatible indeterminado, podemos añadirle una ecuación que lo transforme en incompatible.

b) Si S y S' son dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes, entonces los coeficientes de las incógnitas también son iguales.

c) El sistema $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 4y - 2z = 2a + 1 \end{cases}$ **es incompatible cualquiera que sea el valor de a.**

d) El sistema $\begin{cases} 3x + 2y = a \\ x - y = b \end{cases}$ **es compatible indeterminado para cualesquiera valores de a y b.**

e) A un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que es compatible determinado podemos añadirle una ecuación que lo transforme en compatible indeterminado.

a) Verdadero.

Tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2yz = 4 \end{array}\right\} \to \textit{Compatible indeterminado.}$$

Le añadimos la ecuación: $x - y = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2yz = 4 \\ x - y = 3 \end{array}\right\} \to \textit{Incompatible.}$$

b) Falso. Los siguientes sistemas son equivalentes, tienen iguales los términos independientes y no tienen los mismos coeficientes en las incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \to x = 2,\ \ y = 1 \qquad \left.\begin{array}{r} 3y = 3 \\ \dfrac{x}{2} = 1 \end{array}\right\} \to x = 2,\ \ y = 1$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 & 2a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 2\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Verdadero. La última fila indica que el sistema siempre es *incompatible*.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) - 3\cdot(2.^a)\\(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & a-3b \\ 1 & -1 & b \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} 5y = a - 3b \\ x - y = b \end{array}\right\}\ x = \dfrac{a+2b}{5},\ \ y = \dfrac{a-3b}{5}$

Falso. En todos los casos el sistema es *compatible determinado*.

e) Falso. Si añadimos una ecuación más, puede pasar que la ecuación sea incompatible con las anteriores o que no aporte más información. En el primer caso, el sistema se transforma en *incompatible* y en el segundo, sigue siendo *compatible determinado*.

32 ¿Es posible convertir este sistema en compatible indeterminado cambiando un signo?

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Sí. Si cambiamos la 2.ª ecuación por $x + y + z = 1$, o bien, si cambiamos la 3.ª ecuación por $x + y + z = 1$, el sistema resultante será *compatible indeterminado*.

33 Define cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Justifica si son equivalentes o no los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando todas las soluciones del 1.^er^ sistema lo son también del 2.°, y al revés.

Los dos sistemas dados no son equivalentes, puesto que el 1.° es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y el 2.° es determinado (solo tiene una solución).

34 Comprueba que la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y = 2-2a \\ x + ay = a-1 \end{cases} \quad \text{es} \quad (x, y) = \left(\frac{-2a-1}{a+1}, \frac{a+2}{a+1}\right) \quad \text{si} \quad a \neq \pm 1.$$

¿Podemos decir que el sistema es compatible indeterminado si $a \neq \pm 1$?

Sustituimos la solución que nos dan en las ecuaciones:

$$a\frac{-2a-1}{a+1} + \frac{a+2}{a+1} = \frac{-2a^2-a+a+2}{a+1} = \frac{2(1-a^2)}{a+1)} = \frac{2(1+a)(1-a)}{a+1} = 2-2a$$

$$\frac{-2a-1}{a+1} + a\frac{a+2}{a+1} = \frac{-2a-1+a^2+2a}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = a-1$$

No. El sistema es compatible determinado si $a \neq \pm 1$.

Página 51

Para profundizar

35 ¿Para qué valor de a este sistema es incompatible?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a-1)x = 1 \\ x + 3z = 2 \\ (a-2)z = 0 \end{cases}$$

- **¿Puede ser compatible indeterminado para el valor $a = 2$?**
- **Resuélvelo si $a = 2$.**
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, ¿puede ser compatible determinado?**

Para estudiar la compatibilidad de este sistema, nos fijamos en la última ecuación. Si $a \neq 2$, entonces $z = 0$. Y, por tanto, de la tercera ecuación se obtiene que $x = 2$. Pero de la segunda ecuación se deduce que $x = \frac{1}{a-1}$. Igualando obtenemos:

$$\frac{1}{a-1} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

En resumen, si $a \neq 2$ y $a \neq \frac{3}{2}$, el sistema es incomaptible. Y si $a \neq 2$ y $a = \frac{3}{2}$, el sistema es compatible determinado.

- Si $a = 2$, la última ecuación no da información, luego se puede suprimir. El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x = 1 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$$

  Es un sistema escalonado, por tanto, *compatible determinado*. No puede ser compatible indeterminado.

- Resolvemos el sistema anterior para $a = 2$:

$$x = 1, \; y = -\frac{5}{3}, \; z = \frac{1}{3}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, como ya hemos visto al principio, es un sistema *compatible determinado* solo en el caso de $a = \frac{3}{2}$.

36 **Discute estos sistemas en función de a y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados.**

a) $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax+y-z=0 \\ 2x+ay=2 \\ -x+z=1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=a-1 \\ 2x+y+az&=a \\ x+ay+z&=1 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$

- Si $a=1$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ Sistema *incompatible.*

- Si $a=2$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(3.^a) \\ (3.^a)}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema *compatible indeterminado.*

  Lo resolvemos en este caso:

  $\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ y\quad\;\; &=0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &x+z=1 \to x=1-z \\ &y=0 \\ &z=\lambda \end{aligned}$

  Soluciones: $(1-\lambda, 0, \lambda)$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 2 \to$ Sistema *compatible determinado.*

b) $\left.\begin{aligned} ax+y-z&=0 \\ 2x+ay\quad&=2 \\ -x\quad+z&=1 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(1.^a)}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ -a\cdot(3.^a)+(2.^a)}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2+a+2 & 0 & 0 & 2-a \end{array}\right)$

$-a^2+a+2=0 \to a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}$ $\begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$

- Si $a=-1$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$ Sistema *incompatible.*

- Si $a=2$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a):2 \\ (3.^a)}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{aligned} -x\quad\;+z&=1 \\ x+y\quad\;&=1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &z=1+x \\ &y=1-x \\ &x=\lambda \end{aligned}$

  Sistema *compatible indeterminado.*

  Soluciones: $(\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$

- Si $a\neq -1$ y $a\neq 2 \to$ Sistema *compatible determinado.*

37 **Encuentra razonadamente dos valores del parámetro a para los cuales el siguiente sistema sea incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)-2\cdot(3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema es *incompatible*.

38 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{cases}$$

***** ***Si sumas las cinco igualdades, obtendrás otra con la que se te pueden simplificar mucho los cálculos.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$ Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, es decir: $4(x + y + z + t + w) = 76$, o bien: $x + y + z + t + w = 19$

Por tanto: $(x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 \to w = 2$

$(x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 \to t = 3$

$(x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 \to z = 4$

$(x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 \to y = 5$

$(y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 \to x = 5$

39 **Una cuadrilla de cinco jardineros debía podar una plantación trabajando de lunes a viernes. Cada día, cuatro podaban y el otro les ayudaba.**

Cada jardinero podó el mismo número de árboles cada día. Los resultados de la poda fueron:

— Lunes, 35 árboles podados. **— Martes, 36.**

— Miércoles, 38. **— Jueves, 39**

— Y el viernes no sabemos si fueron 36 o 38.

Calcula cuántos árboles diarios podó cada uno, sabiendo que fueron números enteros y que ninguno podó los cinco días.

Llamamos:

w = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el lunes.

t = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el martes.

z = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el miércoles.

y = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el jueves.

x = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el viernes.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bien:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{k}{4}$$

Si x, y, z, t, w son números enteros, su suma también lo será; luego, k debe ser múltiplo de 4. Como nos dicen que vale 36 o 38, tenemos que ha de ser $k = 36$ (pues 38 no es múltiplo de 4).

Resolvemos el sistema, ahora que sabemos que $k = 36$:

La suma de las cinco igualdades dará lugar a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Por tanto: $(x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \rightarrow w = 11$

$(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \rightarrow t = 10$

$(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \rightarrow z = 8$

$(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \rightarrow y = 7$

$(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \rightarrow x = 10$

Así, el jardinero que descansa el lunes poda 11 árboles; el que descansa el martes, 10; el que descansa el miércoles, 8; el que descansa el jueves, 7, y el que descansa el viernes, 10.

Autoevaluación

Página 51

1 Resuelve e interpreta geométricamente estos sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{array}\right\}$ Sumando la 1.ª fila con 3 veces la 2.ª:

$$\begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 33 \\ \hline 11x \quad\quad = 33 \end{array} \to x = 3 \to y = -1$$

Comprobamos en la 3.ª ecuación:

$-3 + 3(-1) \neq 0$

El sistema es *incompatible*. Son tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$ Hacemos $y = \lambda$: $\begin{cases} 2x = 5 + \lambda \to x = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$

El sistema es *compatible indeterminado*.

Solución: $\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2}, \lambda, -3 + \lambda\right)$

Representa dos planos que se cortan en una recta.

2 La suma de las tres cifras de un número es 9. Si al número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198 y la suma de las cifras de las unidades y las centenas es el doble de las decenas. ¿Cuál es el número?

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 198 \\ x + z = 2y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 99x - 99z = 198 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x - z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\left.\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + y + z = 9 \\ -y - 2z = -7 \\ -3y = -9 \end{cases}$$

Sistema escalonado cuya solución es $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$.

El número es el 432.

3 Discute este sistema y resuélvelo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y + z &= 2 \\ x + my + 3z &= 7 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-2\cdot(2.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ (m-4)y = 0 \end{cases}$$

- Si $m \neq 4 \to$ Sistema *compatible determinado*. *Solución:* (1, 0, 2)
- Si $m = 4 \to$ Sistema *compatible indeterminado*. Pasamos z al segundo miembro como parámetro:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

Soluciones: $(\lambda - 1, 2 - \lambda, \lambda)$

4 Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. Lo invertido en A y B fue m veces lo invertido en C, y los beneficios fueron el 5 % en A, el 10 % en B y el 20 % en C.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad invertida en cada empresa.

b) Prueba que si $m > 0$, el sistema es compatible determinado, y resuélvelo para $m = 5$.

a) Sean x, y, z las cantidades invertidas en A, B y C, respectivamente. Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 60\,000 \\ x + y &= mz \\ 0,05x + 0,1y + 0,2z &= 6\,000 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 60\,000 \\ x + y - mz &= 0 \\ 0,05x + 0,1y + 0,2z &= 6\,000 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 6\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-0,05\cdot(1.^a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 0 & 0 & -m-1 & -60\,000 \\ 0 & 0,05 & 0,15 & 3\,000 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \to$ El sistema es *incompatible*.
- Si $m \neq -1 \to$ El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, si $m > 0$, el sistema es *compatible determinado*.

Para $m = 5$ la solución es la siguiente: $x = 20\,000$ €, $y = 30\,000$ €, $z = 10\,000$ €.

5 Sean las ecuaciones: $\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$.

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que sea compatible determinado.

c) Añade una ecuación para que sea compatible indeterminado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

a) Para que sea *incompatible*, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$$a(3x-2y+z)+b(2x-3y+z)=k, \quad \text{con} \quad k \neq 5a-4b$$

Si tomamos, por ejemplo, $a=1$, $b=0$, $k=1$, queda:

$$3x-2y+z=1$$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería *incompatible*.

b) Por ejemplo, añadiendo $y=0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=-4 \\ y \quad\quad\;\; =0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x \quad +z=5 \\ 2x \quad +z=-4 \\ y \quad\quad\;\; =0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=9 \\ y=0 \\ z=-22 \end{array}\right\} \textit{Compatible determinado}$$

c) El sistema será compatible indeterminado si añadimos una ecuación proporcional a una de las existentes. Por ejemplo, añadimos la 2.ª ecuación multiplicada por (–1):

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=-4 \\ -2x+3y-z=4 \end{array}\right\}$$

6 Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+ \quad 2y+3z=1 \\ x+ \quad ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{cases}$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a=0$.

$$\left.\begin{array}{l} x+ \quad 2y+3z=1 \\ x+ \quad ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3.ª) – 2 · (1.ª)}]{\text{(1.ª)},\ \text{(2.ª) – (1.ª)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(3.ª) – (2.ª)}]{\text{(1.ª)},\ \text{(2.ª)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Si $a=2$, la 2.ª ecuación no tiene solución: $0y=1$. El sistema es *incompatible*.

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea *compatible determinado*, porque la 3.ª ecuación se puede suprimir $(0x+0y+0z=0)$ y el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas.

c) Si $a=0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ -2y \quad\quad\;\; =1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-1/2 \\ x-1+3z=1 \;\to\; x=2-3z \\ z=\lambda \end{array}$$

Soluciones: $\left(2-3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$

7 Discute este sistema según los valores de a. Interprétalo geométricamente:

$$\begin{cases} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(2.^a)\\(1.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

  Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

- Si $a = -1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

  Los dos últimos planos son paralelos y el primero los corta.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.