5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Página 129

REFLEXIONA Y RESUELVE

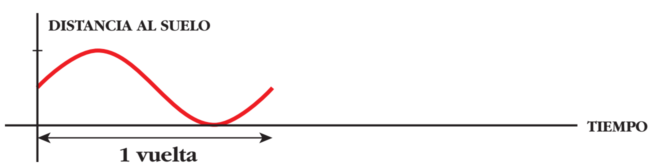
A vueltas con la noria

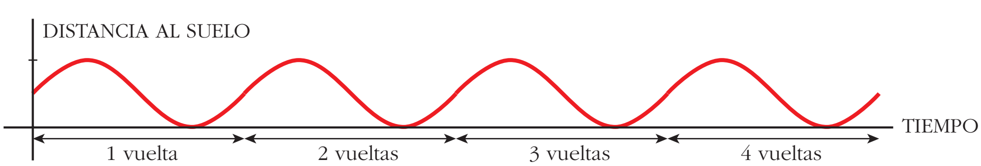
■ **Modificando la escala, representa la función:**

x: tiempo transcurrido

y: distancia al suelo

correspondiente a cuatro vueltas de la noria.



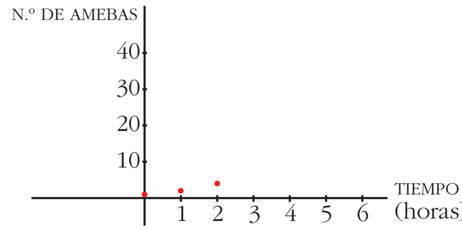


Muchas, muchas amebas

a) Calcula el número aproximado de amebas que habrá según pasan las horas y completa esta tabla en tu cuaderno:

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
N.° DE AMEBAS	1	2	4				

b) **Representa gráficamente estos datos en una hoja de papel cuadriculado.**



c) **Cambia los ejes y representa la función cuyas variables sean, ahora:**

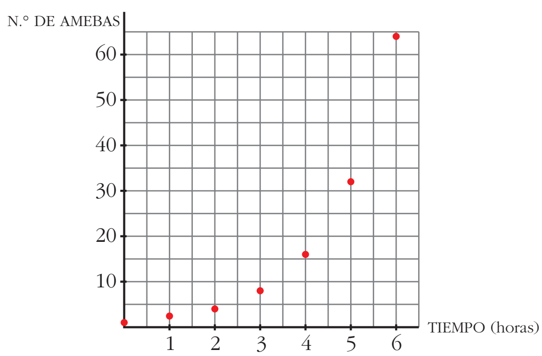
***x*: número de amebas**

***y*: tiempo (en horas)**

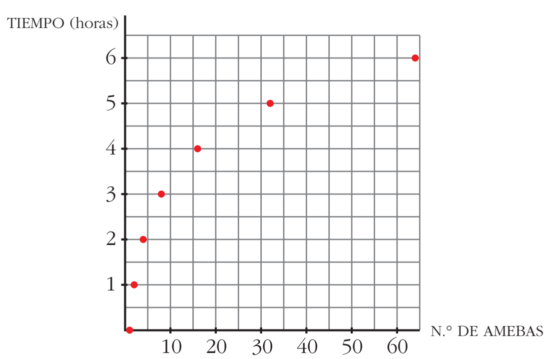
a)

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE AMEBAS	1	2	4	8	16	32	64

b)



c)

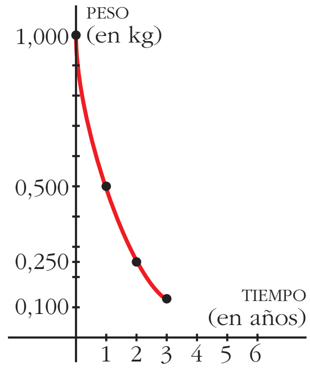


Desintegración radiactiva

a) **Completa la tabla siguiente (utiliza la calculadora para obtener los valores con tres cifras decimales):**

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUSTANCIA (kg)	1	0,5	0,250	0,125			

b) Representa gráficamente los datos en papel cuadriculado.



c) Cambia los ejes y representa la función cuyas variables son, ahora:

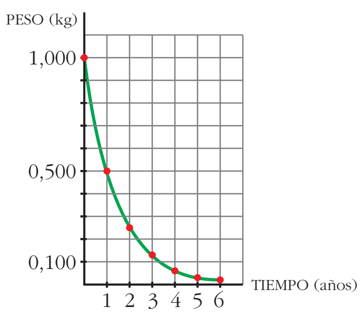
***x*: peso de la sustancia radiactiva (en kg)**

***y*: tiempo transcurrido (en años)**

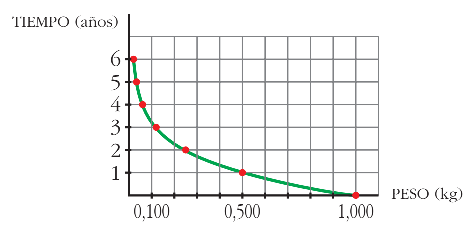
a)

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUSTANCIA (kg)	1	0,5	0,250	0,125	0,063	0,031	0,016

b)



c)



Página 130

1. **Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.**

Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179; \quad g[f(4)] = 1$

2. **Si $f(x) = sen\ x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.**

$f \circ g(x) = sen\,(x^2 + 5)$; $f \circ g(0) = -0{,}96$; $f \circ g(2) = 0{,}41$

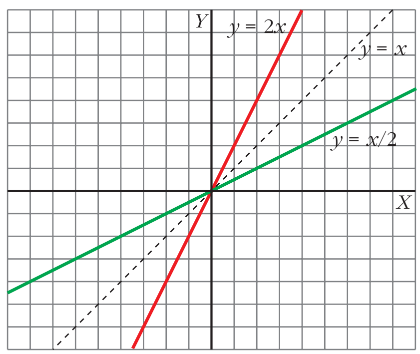
$g \circ f(x) = sen^2\, x + 5$; $g \circ f(0) = 5$; $g \circ f(2) = 5{,}83$

$f \circ f(x) = sen\,(sen\ x)$; $f \circ f(0) = 0$; $f \circ f(2) = 0{,}79$

$g \circ g(x) = (x^2 + 5)^2 + 5$; $g \circ g(0) = 30$; $g \circ g(2) = 86$

Página 131

1. **Representa $y = 2x$, $y = x/2$ y comprueba que son inversas.**



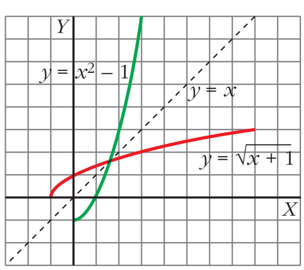
2. **Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas respecto de la recta $y = x$. Averigua cuáles son.**

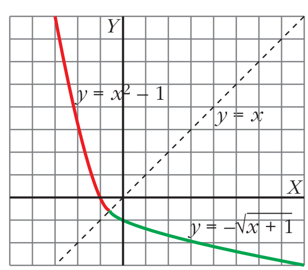
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x + 1}$

b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x + 1}$

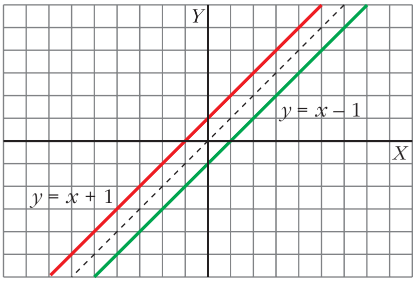




3. **Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, comprueba que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones inversas? Comprueba que el punto $(a, a + 1)$ está en la gráfica de f y que el punto $(a + 1, a)$ está en la gráfica de g. Representa las dos funciones y observa su simetría respecto de la recta $y = x$.**

$f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$

Son funciones inversas.



Página 133

1. La masa de madera de un bosque aumenta en un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (*biomasa*) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo 100 años, la función $M = 1{,}4^t$ nos da la cantidad de masa vegetal, M, en un instante cualquiera, t expresado en siglos *a partir de 1800* (razona por qué).

a) Averigua cuándo habrá una masa de madera triple que en 1800 ($1{,}4^t = 3$) y cuándo había la tercera parte. Observa que los dos periodos de tiempo son iguales.

b) Calcula la cantidad de madera que habrá, o había, en 1900, 1990, 2000, 1600 y 1550.

$M = 1{,}4^t$

a) • Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = 3$:

$$1{,}4^t = 3 \;\rightarrow\; ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3) \;\rightarrow\; t\,ln\,(1{,}4) = ln\,(3) \;\rightarrow\; t = \frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx 3{,}27$$

Cuando pasen $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, se habrá triplicado la masa de madera. Esto es, en el año $1800 + 327 = 2127$.

• Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$:

$$1{,}4^t = 3^{-1} \;\rightarrow\; ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3)^{-1} \;\rightarrow\; t\,ln\,(1{,}4) = -ln\,(3) \;\rightarrow\; t = -\frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx -3{,}27$$

Hace $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, había la tercera parte de masa de madera. Esto es, en el año $1800 - 327 = 1473$.

b) $1900 \;\rightarrow\; t = 1 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^1 = 1{,}4$

$$1990 \;\rightarrow\; t = \frac{1990 - 1800}{100} = 1{,}9 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^{1{,}9} \approx 1{,}90$$

$$2000 \;\rightarrow\; t = \frac{2000 - 1800}{100} = 2 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^2 = 1{,}96$$

$$1600 \;\rightarrow\; t = \frac{1600 - 1800}{100} = -2 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^{-2} \approx 0{,}51$$

$$1550 \;\rightarrow\; t = \frac{1550 - 1800}{100} = -2{,}5 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^{-2{,}5} \approx 0{,}43$$

2. Comprueba que, en el ejemplo anterior referente a la desintegración de una cierta sustancia radiactiva, $M = m \cdot 0{,}76^t$ (t expresado en miles de años), el *periodo de semidesintegración* (tiempo que tarda en reducirse a la mitad la sustancia radiactiva) es de, aproximadamente, 2 500 años.

Para ello, comprueba que una cantidad inicial cualquiera se reduce a la mitad (aproximadamente) al cabo de 2 500 años ($t = 2{,}5$).

$M = m \cdot 0{,}76^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } t = 0 \;\rightarrow\; M = m \cdot 0{,}76^0 = m \\ \text{Si } t = 0{,}25 \;\rightarrow\; M = m \cdot 0{,}76^{2{,}5} \approx m \cdot 0{,}5 = \dfrac{m}{2} \end{array}\right\}$$

La cantidad inicial se ha reducido (aproximadamente) a la mitad en 2 500 años.

Página 143

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Composición y función inversa

1 **Dadas las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = \frac{5x}{2}$, halla:**

a) $f[g(2)]$ b) $g[f(-1)]$ c) $f[g(x)]$ d) $g[f(x)]$

a) $f[g(2)] = f\left[\frac{5 \cdot 2}{2}\right] = f(5) = 5 + 3 = 8$

b) $g[f(-1)] = g(-1 + 3) = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

c) $f[g(x)] = f\left(\frac{5x}{2}\right) = \frac{5x}{2} + 3$

d) $g[f(x)] = g(x + 3) = \frac{5(x + 3)}{2}$

2 **Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$ obtén la expresión de las siguientes funciones:**

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2x^2 - 4x + 3$

b) $g \circ f(x) = g[2x + 3] = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

c) $f \circ f(x) = f(2x + 3) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

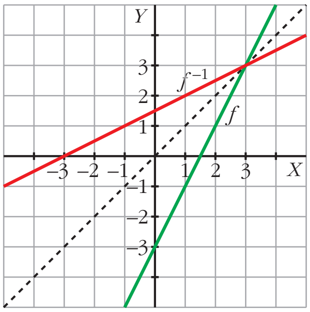
d) $g \circ g(x) = g(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$

3 **¿Cuál es la función inversa de $f(x) = 2x - 3$?**

Representa $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes coordenados y comprueba su simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

$y = 2x - 3 \rightarrow x = 2y - 3 \rightarrow \frac{x + 3}{2} = y$

$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$



4 **Considera las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.**

Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$ **b)** $(g \circ f)(-3)$ **c)** $(g \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

b) $(g \circ f)(-3) = g[f(-3)] = g(10) = \frac{1}{10}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$

d) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$

5 **Dadas las funciones $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:**

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$ **c)** $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 2$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x + 2) = \sqrt{3x + 2}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

6 **Con las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = x - 2$, hemos obtenido por composición las funciones $p(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ y $q(x) = \frac{1}{x^2} - 2$. Indica cuál de estas expresiones corresponde a $f \circ g$ y cuál a $g \circ f$.**

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{(x-2)^2} \rightarrow (f \circ g)(x) = p(x)$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{x^2} - 2 \rightarrow (g \circ f)(x) = q(x)$

7 **Halla la función inversa de estas funciones:**

a) $y = 3x$ **b)** $y = x + 7$ **c)** $y = 3x - 2$

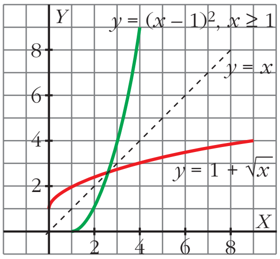
a) $y = 3x \rightarrow x = 3y \rightarrow y = \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

b) $y = x + 7 \rightarrow x = y + 7 \rightarrow y = x - 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

c) $y = 3x - 2 \rightarrow x = 3y - 2 \rightarrow y = \frac{x+2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

8 **Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.**

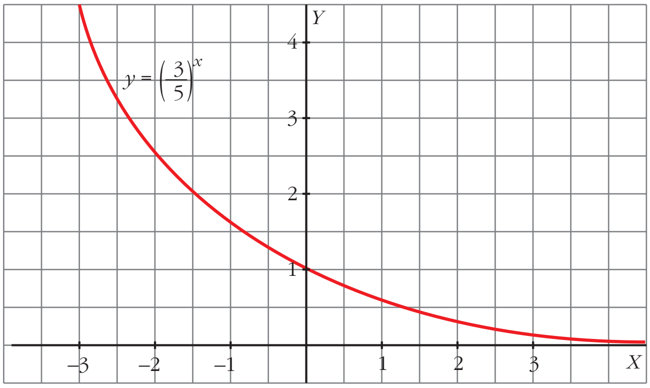
$y = 1 + \sqrt{x} \rightarrow x = 1 + \sqrt{y} \rightarrow (x-1)^2 = y \rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2$



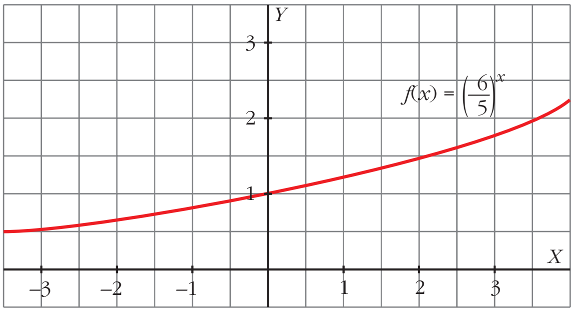
Funciones exponenciales y logarítmicas

9 **Con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores de la función $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ y represéntala gráficamente.**

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22



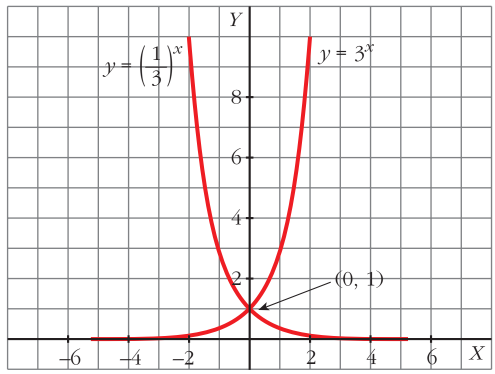
10 **Representa la función $y = \left(\frac{6}{5}\right)^x$. ¿Es creciente o decreciente?**



Es creciente.

11 **Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje *OY*.**

☛ ***Represéntalas en los mismos ejes.***

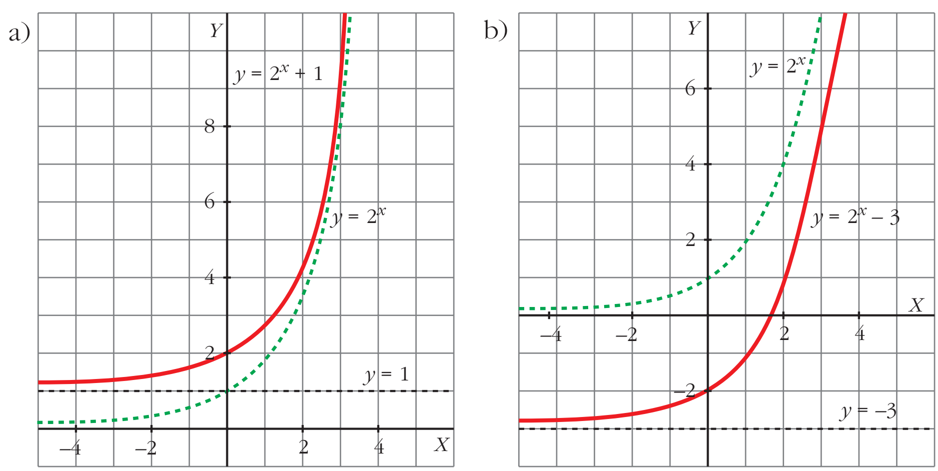


12 **Representa las funciones:**

a) $y = 2^x + 1$

b) $y = 2^x - 3$

☛ ***Utiliza la gráfica de*** $y = 2^x$.



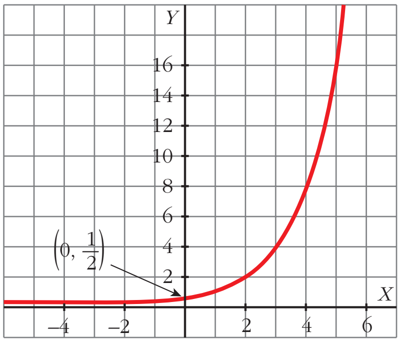
13 **Representa las siguientes funciones:**

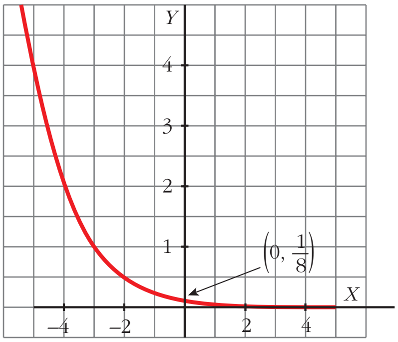
a) $y = 2^{x-1}$

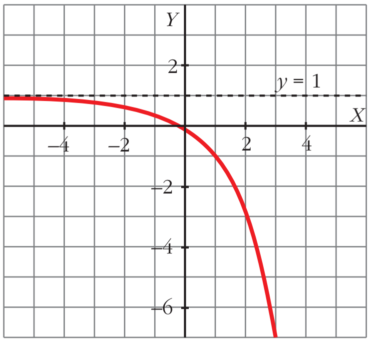
b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

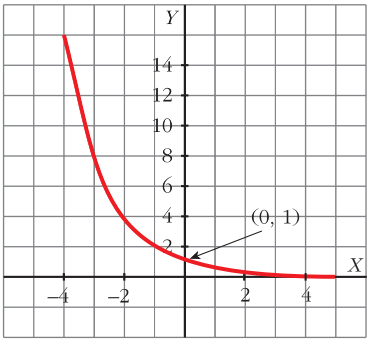
c) $y = 1 - 2^x$

d) $y = 2^{-x}$

a)


b)


c)


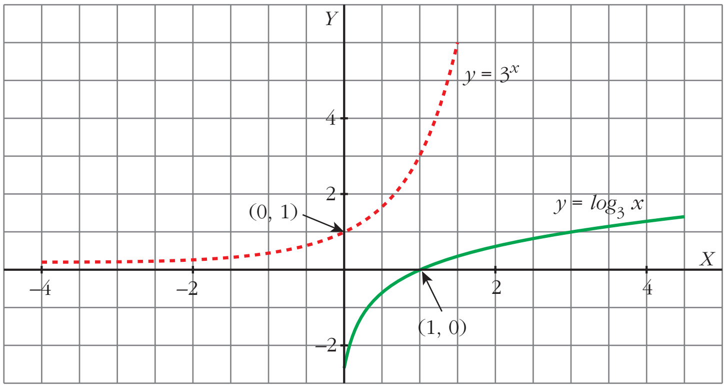
d)


14 **Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa la función $y = log_3\, x$.**

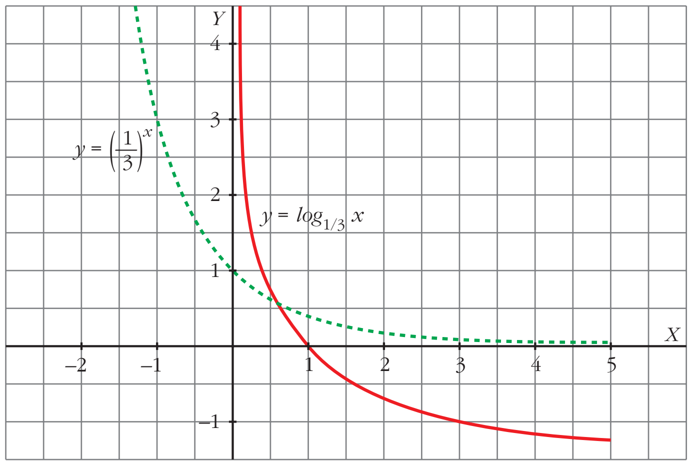
☛ ***Si el punto (2, 9) pertenece a $y = 3^x$, el punto (9, 2) pertenecerá a $y = log_3\, x$.***

x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3 x$	–2	–1	0	1	2

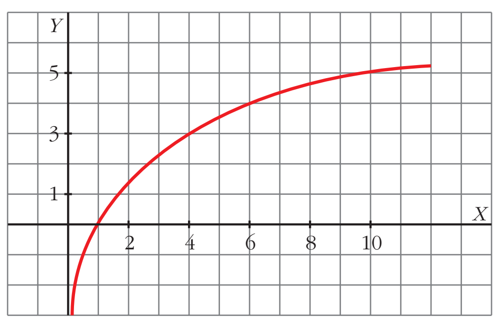


15 **Representa la gráfica de $y = log_{1/3}\ x$ a partir de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.**



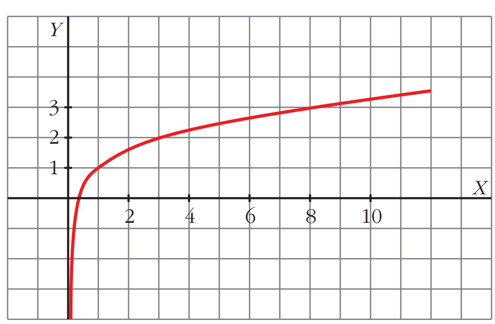
16 **Haz, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = 5log\ x$ y representala gráficamente.**

x	0,5	1	1,5	2	3	6	10
y	–1,5	0	0,88	1,5	2,38	3,89	5



17 **Representa la función $y = 1 + ln\ x$.**

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 2.***



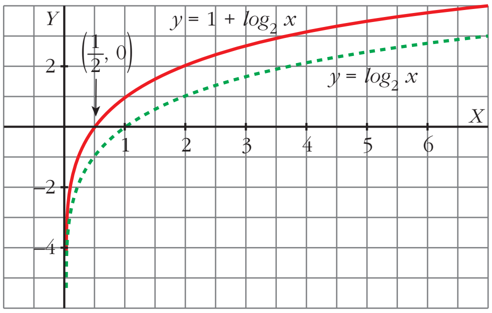
18 **Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = log_2\, x$:**

a) $y = 1 + log_2\, x$

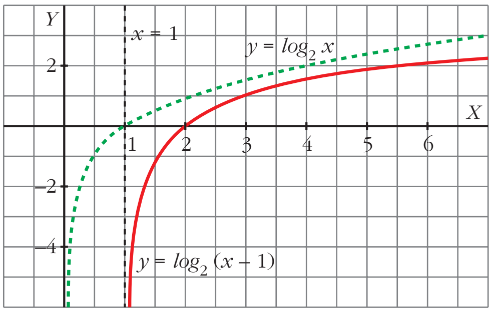
b) $y = log_2\, (x - 1)$

☛ ***En b), el dominio es $(1, +\infty)$.***

a) $y = 1 + log_2\, x$



b) $y = log_2\, (x - 1)$

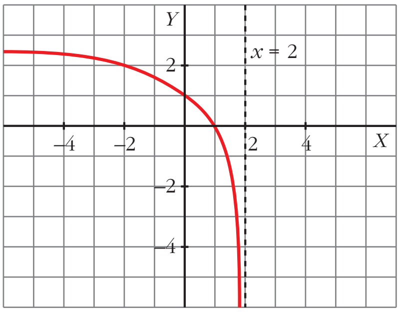


19 **¿Cuál es el dominio de esta función?**

$$y = log_2\, (2 - x)$$

Represéntala.

Dominio: $(-\infty, 2)$



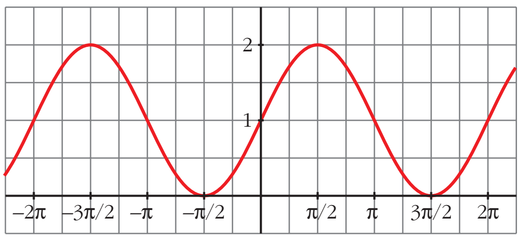
Página 144

Funciones trigonométricas

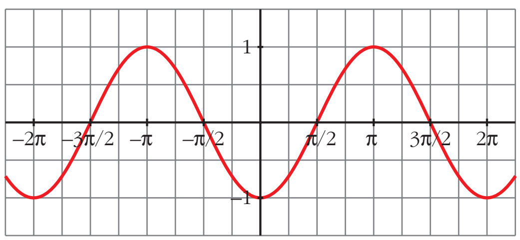
20 **Representa las funciones:**

a) $y = 1 + \text{sen}\ x$ **b)** $y = -\cos x$

a)



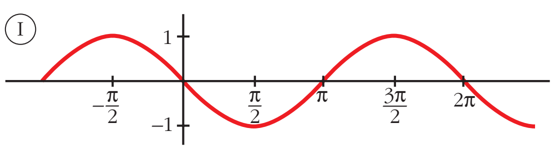
b)



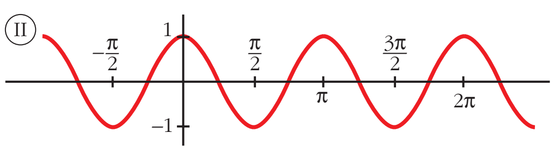
21 **Asocia a cada una de las siguientes funciones, la gráfica que le corresponde:**

a) $y = \cos 2x$ **b)** $y = -\text{sen}\ x$ **c)** $y = 2\,\text{sen}\ x$ **d)** $y = 1 + \cos x$

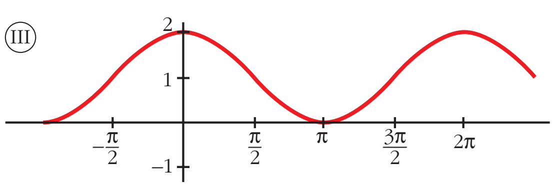
I



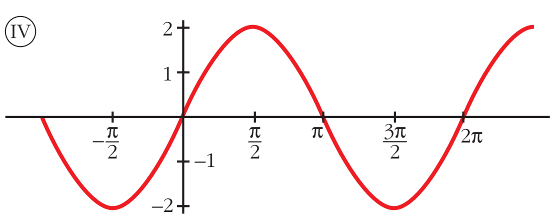
II



III



IV



a) → II

b) → I

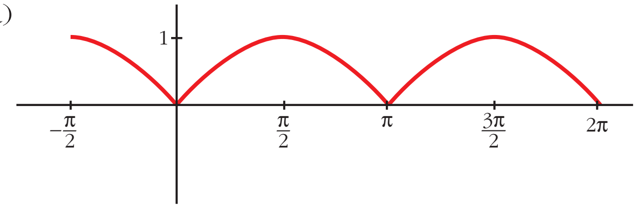
c) → IV

d) → III

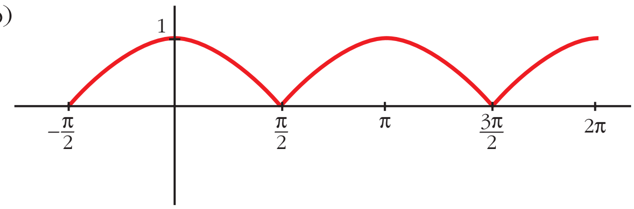
22 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = |sen\ x|$ **b)** $y = |cos\ x|$

a)



b)



23 **Busca, en cada caso, los valores de x comprendidos entre 0 y 2π que verifiquen:**

a) $sen\ x = 0$ **b)** $sen\ x = -1$

c) $cos\ x = 1$ **d)** $cos\ x = 0$

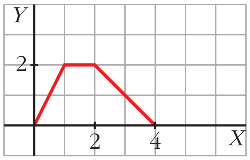
a) $sen\ x = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \pi;\ x = 2\pi$

b) $sen\ x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

c) $cos\ x = 1 \rightarrow x = 0;\ x = 2\pi$

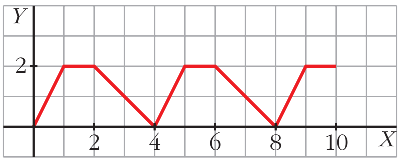
d) $cos\ x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2};\ x = \frac{3\pi}{2}$

24 **La siguiente gráfica representa la variación de un movimiento que se repite periódicamente:**



a) Represéntala en el intervalo [0, 10]. **b) Calcula $f(7)$, $f(10)$ y $f(20)$.**

a)



b) $f(7) = 1;\ f(10) = 2;\ f(20) = 0$

PARA RESOLVER

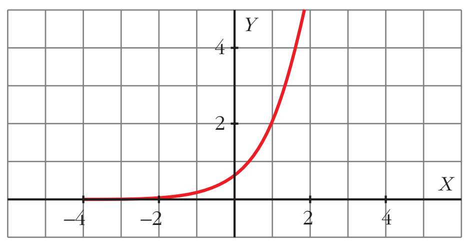
25 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = k\,a^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).**

Calcula k y a, y representa la función.

☛ ***Mira el problema resuelto 4.***

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5 = k \cdot a^0 \\ 1{,}7 = k \cdot a^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}5 = k \\ 1{,}7 = k \cdot a \end{array} \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} k = 0{,}5 \\ a = 3{,}4 \end{array}\right.$$

La función es $y = 0{,}5 \cdot (3{,}4)^x$



26 **Se llama inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 € al cabo de un año cuesta 104 €, la inflación ha sido del 4%. Si la inflación se mantiene constante en el 4% anual, ¿cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 12 000 €?**

$12\,000 \cdot (1{,}04)^5 = 14\,599{,}83$ €

27 **Un capital de 10 000 € se deposita en un banco al 8,4% de interés anual con pago mensual de intereses. Escribe la función que nos dice en cuánto se transforma ese capital en m meses.**

Calcula cuánto tarda en duplicarse el capital.

$$C = 10\,000\left(1 + \frac{8{,}4}{1\,200}\right)^m = 10\,000 \cdot (1{,}007)^n$$

$$20\,000 = 10\,000 \cdot (1{,}007)^m \to 2 = 1{,}007^m \to m = \frac{\log 2}{\log 1{,}007} = 99{,}36$$

Tarda 100 meses en duplicarse.

28 **La concentración de un fármaco en sangre viene dada por $y = 100\,(0{,}94)^t$ (y en mg, t en h).**

a) Di cuál es la dosis inicial y la cantidad de ese fármaco que tiene el paciente al cabo de 3 h.

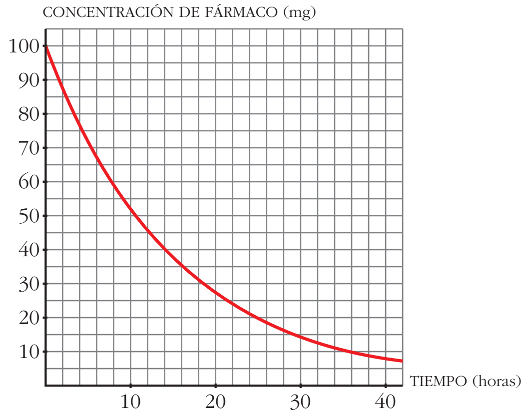
b) Representa la función.

c) Si queremos que la concentración no baje de 60 mg, ¿al cabo de cuánto tiempo tendremos que inyectarle de nuevo?

a) $t = 0 \;\rightarrow\; y = 100$ mg

$t = 3 \;\rightarrow\; y = 83$ mg en 3 horas

b)



c) $100 \cdot (0{,}94)^t = 60 \;\rightarrow\; t \approx 8$ h 15 min

Al cabo de, aproximadamente, 8 h 15 min.

29 **Considera estas funciones:**

$$f(x) = x - 5 \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = \frac{1}{x+2}$$

Explica cómo, a partir de f, g y h, se pueden obtener, por composición, p, q y r:

$$p(x) = \sqrt{x-5}; \quad q(x) = \sqrt{x} - 5; \quad r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$p = g \circ f \qquad q = f \circ g \qquad r = h \circ g$$

30 **Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = log_2\, x$, ¿cuál es la función $(f \circ g)(x)$? ¿Y $(g \circ f)(x)$?**

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

31 **Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 2^{x/10}$ (y: miles de bacterias, x: horas). ¿Cuántas había en el momento inicial? ¿Y al cabo de 10 horas? ¿Cuánto tardarán en duplicarse?**

$x = 0 \;\rightarrow\; y = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 \;\rightarrow\;$ 2 000 bacterias en el momento inicial.

$x = 10 \;\rightarrow\; y = 1 + 2 = 3 \;\rightarrow\;$ 3 000 bacterias al cabo de 10 horas.

$$1 + 2^{x/10} = 4 \;\rightarrow\; x = \frac{10\, log\, 3}{log\, 2} \approx 15{,}8 \text{ h} \approx 16 \text{ h}$$

Tardarán en duplicarse unas 16 horas.

32 **Halla la función inversa de estas funciones:**

a) $\boldsymbol{y = 3 \cdot 2^{x-1}}$

b) $\boldsymbol{y = 1 + 3^{x}}$

a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}$; $\frac{x}{3} = 2^{y-1}$; $log_2 \frac{x}{3} = y - 1$

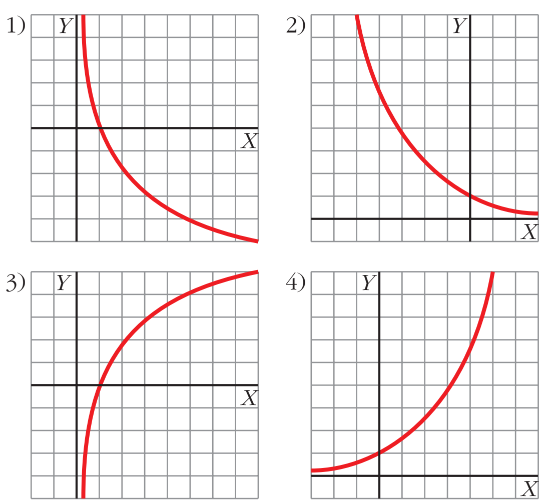
$y = 1 + log_2 \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + log_2 \frac{x}{3}$

b) $x = 1 + 3^{y}$; $x - 1 = 3^{y}$; $log_3(x-1) = y \rightarrow f^{-1}(x) = log_3(x-1)$

Página 145

CUESTIONES TEÓRICAS

33 **Estas gráficas corresponden a funciones del tipo $y = a^x$, $y = log_a x$. Identifícalas e indica, en cada caso, si es $a > 1$ ó $0 < a < 1$.**



1) $y = log_a x$, $0 < a < 1$

2) $y = a^x$, $0 < a < 1$

3) $y = log_a x$, $a > 1$

4) $y = a^x$, $a > 1$

34 **En las funciones $y = a^x$ e $y = log_a x$, ¿puede ser negativa la y? ¿Podemos dar a x valores negativos?**

Para $y = a^x$: La y no puede ser negativa y podemos dar a x valores negativos.

Para $y = log_a x$: La y puede ser negativa y no podemos dar a x valores negativos.

35 **Las gráficas de las funciones $y = log_a x$ tienen un punto en común. ¿Cuál es ese punto? ¿Cuál es el punto común de las funciones $y = a^x$?**

(1, 0) es el punto común de las funciones $y = log_a x$.

(0, 1) es el punto común de las funciones $y = a^x$.

36 **Di para qué valores de a es creciente y para cuáles es decreciente cada una de las funciones $y = a^x$ e $y = log_a\, x$.**

Para $a > 1$ la función $y = log_a\, x$ es creciente.

Para $0 < a < 1$ la función $y = log_a\, x$ es decreciente.

Para $a > 1$ la función $y = a^x$ es creciente.

Para $0 < a < 1$ la función $y = a^x$ es decreciente.

37 **¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$, siendo $a > 1$?**

$x < 0$

38 **Considera las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$.**

a) ¿Cuál es su periodo?

b) ¿Entre qué valores están acotadas?

c) ¿Para qué valores de x es $sen\, x < 0$? ¿Y $cos\, x < 0$?

a) 2π

b) Entre –1 y 1.

c) Entre 0 y 2π: $sen\, x < 0$ para $x \in (\pi, 2\pi)$

$cos\, x < 0$ para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Página 145

AUTOEVALUACIÓN

1. **Dadas las funciones:**

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^2 - 5$, halla:

a) $g[f(-2)]$

b) $f[g(0)]$

c) $f \circ f(x)$

d) $f \circ g(x)$

a) $g[f(-2)] = g[2 \cdot (-2) + 1] = g(-3) = (-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$

b) $f[g(0)] = f[0^2 - 5] = f(-5) = 2(-5) + 1 = -9$

c) $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 2 + 1 = 4x + 3$

d) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 5) = 2(x^2 - 5) + 1 = 2x^2 - 10 + 1 = 2x^2 - 9$

2. **¿Cuál es la función inversa de $f(x) = \sqrt{3x - 2}$?**

Comprueba que $f \circ f^{-1}(4) = 4$.

Para hallar la inversa de $y = \sqrt{3x - 2}$, cambiamos la x por la y, y despejamos la y:

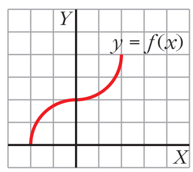
$$x = \sqrt{3y - 2} \;\to\; x^2 = 3y - 2 \;\to\; 3y = x^2 + 2 \;\to\; y = \frac{x^2 + 2}{3}$$

Así, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3}$

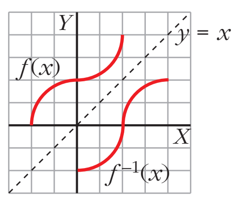
Por otra parte:

$$f \circ f^{-1}(4) = f\left(\frac{4^2 + 2}{3}\right) = f\left(\frac{18}{3}\right) = \sqrt{3 \cdot \frac{18}{3} - 2} = \sqrt{16} = 4$$

3. **Representa la gráfica de la función inversa de $y = f(x)$.**



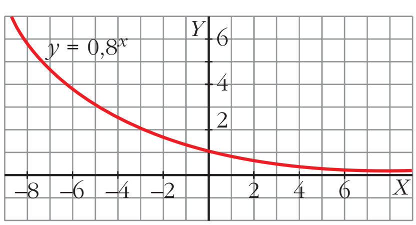
La función $f^{-1}(x)$ es simétrica a $f(x)$ respecto a la recta $y = x$. Así:



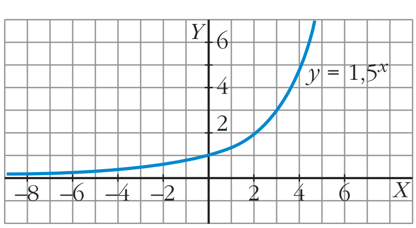
4. **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 0{,}8^x$ **b)** $y = 1{,}5^x$ **c)** $y = \ln x$

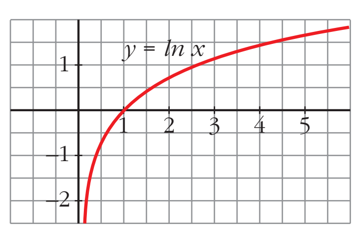
a)



b)



c)



5. **La gráfica de la función $y = ka^x$ pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ y (5; 6,4). Halla k y a y di si se trata de una función creciente o decreciente.**

- Pasa por $\left(0, \frac{1}{5}\right)$:

$\frac{1}{5} = k \cdot a^0 = k \;\rightarrow\; k = \frac{1}{5}$

- Pasa por (5; 6,4):

$6{,}4 = \frac{1}{5}a^5 \;\rightarrow\; a^5 = 32 \;\rightarrow\; a = 2$

Por tanto, la función es $y = \frac{1}{5}2^x$. Es una función creciente, puesto que la base es mayor que 1.

6. **Justifica cuál de las siguientes funciones es la función inversa de $y = 3^x - 2$.**

a) $y = 2 + \log_3 x$ **b)** $y = \sqrt[3]{x + 2}$ **c)** $y = \log_3 (x + 2)$

La función es $f(x) = 3^x - 2$. Veamos cada uno de los casos:

a) $f(2 + \log_3 x) = 3^{(2 + \log_3 x)} - 2 = 3^2 \cdot 3^{\log_3 x} - 2 = 9x - 2 \neq x$

$y = 2 + \log_3 x$ no es la inversa de $f(x)$.

b) $f\left(\sqrt[3]{x + 2}\right) = 3^{\sqrt[3]{x + 2}} - 2 \neq x$

$y = \sqrt[3]{x + 2}$ no es la inversa de $f(x)$.

c) $f[\log_3 (x + 2)] = 3^{\log_3 (x + 2)} - 2 = (x + 2) - 2 = x$

$y = \log_3 (x + 2)$ sí es la inversa de $f(x)$.

7. **El precio de una furgoneta baja un 10% por año de utilización. Si costó 18 000 €, ¿cuánto tardará en reducirse a la mitad?**

La función que describe esta situación es:

$$C = 18\,000 \cdot 0{,}9^t$$

Como queremos que el capital final sea 9 000 €:

$$9\,000 = 18\,000 \cdot 0{,}9^t \;\rightarrow\; 0{,}9^t = 0{,}5 \;\rightarrow\; t = \log_{0{,}9} 0{,}5 = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9} = 6{,}58$$

Por tanto, el capital se habrá reducido a la mitad entre el 6.º y el 7.º año.

8. **Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x}$ (x = tiempo en días; y = número de insectos en miles).**

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en duplicarse.

a) La población inicial se calcula haciendo $x = 0$.

$$y(0) = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4 \cdot 0} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

La población inicial es de 1 500 insectos.

b) Se duplicará al llegar a 3 000 insectos, es decir:

$$3 = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x} \rightarrow 2^{0{,}4x} = \frac{2}{0{,}5} \rightarrow 2^{0{,}4x} = 4 \rightarrow 2^{0{,}4x} = 2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}4x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{0{,}4} \rightarrow x = 5$$

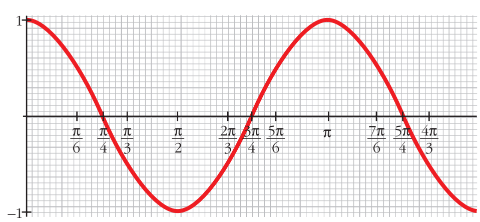
Por tanto, la población de insectos se duplicará en 5 días.

9. **Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**

a) $y = \cos x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = 2\cos x$



Completa estos puntos para que pertenezcan a la gráfica:

(5π/6, …), (4π/3, …), (–π/4, …).

La gráfica corresponde a la función b), $y = \cos 2x$.

Su periodo es $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$.

Los puntos buscados son: $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$