Determinantes

2

ACTIVIDADES

1. Página 36

a) $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-4) - 2\ \ 5 = 12 - 10 = 2$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\ \ 1 - 0\ \ (-2)\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot 1 - 5\cdot 1\ \ (-1) - 0\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 1 = 16$

2. Página 36

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-2) - 2x\cdot 1 = -8 - 2x \rightarrow -2x - 8 = 0 \rightarrow x = -4$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & x & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot x\cdot 2 - (-2)\cdot(-5)\cdot 1 + (-3)\ \ 2\cdot 1 - (-3)\ \ x\cdot 1 - (-2)\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot(-5)\cdot 1 = 9x - 27 \rightarrow 9x - 27 = 0 — x = -3$

3. Página 37

a) $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\ \ 1 - 7\cdot(-2)\cdot 2 - 4\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 2 - 7\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-2)\cdot(-1) = -57$

b) $|A| = |A^t| = -57$

c) $|2A| = 2^3\ |A| = 8\cdot(-57) = -456$

d) $|-A| = (-1)^3\ |A| = -(-57) = 57$

4. Página 37

a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^t \rightarrow \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$

b) $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$

c) $\begin{vmatrix} 5b & 5d \\ 3a & 3c \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = 3\cdot 5\ \ (-1)\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$

5. Página 38

$$\begin{vmatrix} 3a & b-2a & c-a \\ 3d & e-2d & f-d \\ 3g & h-2g & i-g \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} a & b-2a & c-a \\ d & e-2d & f-d \\ g & h-2g & i-g \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) = -6$$

6. **Página 38**

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{2}F_1 \\ F'_3=F_3+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-1) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{4}F_1 \\ F'_3=F_3+\frac{1}{2}F_1}}{=} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. **Página 39**

$$\begin{vmatrix} a & a-1 & a-2 \\ a & a-3 & a-4 \\ a & a-5 & a-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & 3 & a \\ a & 5 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & 2 \\ a & a & 4 \\ a & a & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_3=F_3-F_2 \\ F'_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

8. **Página 39**

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 7\cdot(-7)\cdot 10 - 8\cdot 3\cdot 1 = -466$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot(-2)\cdot 4 = 10 \qquad |A|\cdot|B| = -466\cdot 10 = -4\,660$$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{vmatrix} = (-16)\cdot 12\cdot 1 - 21\cdot(-14)\cdot 30 + 23\cdot 23\cdot 43 - 23\cdot 12\cdot 30 - 21\ 23\cdot 1 - (-16)\cdot(-14)\cdot 43 = -4\,660$$

9. **Página 40**

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-3F_1 \\ F'_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3-\frac{4}{3}F_2 \\ F''_4=F'_4-F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{F'''_4=F''_4+6F''_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\ 3\left[-\frac{2}{3}\right]\cdot 9 = -18$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} \overset{F''_4=F'_4-\frac{2}{3}F'_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \end{vmatrix} = 0$$

10. **Página 40**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{F_3\leftrightarrow F_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ a & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-aF_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1-a & -1-a & 1-2a \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3+2F'_2 \\ F''_4=F'_4+(1+a)F'_2}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -5-5a & 7-4a \end{vmatrix} \overset{F'''_4 = F''_4 - \left(\frac{5+5a}{8}\right) F''_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = -1 \cdot 1\ (-8)\ (2-a)$$

Por tanto, el determinante será 0 si y solo si $a = 2$.

11. Página 41

a) [illegible]$_{21} = 3$

b) [illegible]$_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 18 = -4$

12. Página 41

a) $A_{12} = \ -1^{1+2} \cdot 1 = -1$

b) $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(8 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)) = 4$

13. Página 42

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5A_{11} + (-4)A_{12} - 0A_{13} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5(3-2) + 4(-12) = -43$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 10 - 48 = -43$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3A_{11} - 2A_{12} - 1A_{13} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$- 3(8-6) - 2(4-6) - (-2-4) - 32$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 12 - 2 - 4 - 18 + 8 = 32$

14. Página 42

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\ A_{11} - 0\ A_{12} - 1 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = -(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-15) - 2 \cdot 7 = 1$

15. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1-a & 2-a & 3+a & 4-a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{F'_2 = F_2 - F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

16. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & 7 \\ 0 & 2 & a & 6 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

17. Página 44

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 6 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 3 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 1 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 4 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 4 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 6$$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 0$ Y cada uno de los elementos de la matriz es un menor de orden 1.

18. Página 44

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad 6 \quad 4 \quad 2 \cdot 0$; por tanto, el rango de *A* es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 4 \quad 4 \quad 8 \,/\, 0$; por tanto, el rango de *B* es 2.

19. Página 45

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \text{ ı } 1 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3$$

Por tanto, el rango de la matriz A es 2.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 2 \quad 3 \quad 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2.$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0 \text{ , } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3$$

Por tanto, el rango de la matriz B es 2.

20. Página 45

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 15 - 4 - 10 - 2m - 3 = 3m - 24 \rightarrow 3m - 24 = 0 \rightarrow m = 8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 5m - 4 - 10 - 12 - m = -6m - 12 \rightarrow -6m - 12 = 0 \rightarrow m = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 5 & m & 6 \end{vmatrix} = 18 + 10m + 4m - 30 - 24 - m^2 = -m^2 - 14m - 36 \rightarrow -m^2 + 14m - 36 = 0 \rightarrow m = 7 + \sqrt{13}$$

Ningún valor de m anula los tres menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de A es 3.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \quad 2 \quad 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m - m - 1 - 2 - m^2 = -m^2 + 3m - 2 \rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = 1 \text{ y } m = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + m - 1 + m^2 - m^2 \quad m - 1 \quad - 1 - m = -m^3 - 2m^2 - m - 2 \rightarrow -m^3 + 2m^2 + m - 2 = 0 - \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + 2 \quad m - 1 \quad - m - m \quad m - 1 \quad - 2 - m = -m^2 + 4m - 4 \rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 0 \rightarrow m = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m \quad m - 1 \quad + m - \quad m - 1 \quad - 2 - m^2 = m^2 - 2m \rightarrow m^2 \quad 2m \quad 0 \begin{cases} m & 0 \\ m & 2 \end{cases}$$

Solo el valor $m = 2$ anula los cuatro menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de B es 3 para todo valor $m \neq 2$ y para $m = 2$ el rango de B es 2.

21. Página 46

a) $\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

22. Página 46

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 16 & -16 \\ 2 & -16 & 10 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}=40-96-72-120-64-36=-12 \qquad A\cdot Adj(A)^t=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}=-12\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Página 47

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1 \longrightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $|B|=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=24 \longrightarrow Adj(B)=\begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 20 & -11 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(B)^t=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 20 \\ 7 & -1 & -11 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj(B)^t=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 20 \\ 7 & -1 & -11 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{7}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{11}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

24. Página 47

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+4m-3 \longrightarrow \quad m^2 \; 4m \quad 3 \quad 0 \; \begin{cases} m & 1 \\ m & 3 \end{cases}$ $\longrightarrow$ *A* es invertible si y solo si $m \neq 1$ y $m = 3$.

b) $|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=12-12-m^2-9m+2m+8=-m^2-7m-8 \longrightarrow \quad m^2 \quad 7m \quad 8 \quad 0 \; \begin{cases} m & 1 \\ m & 8 \end{cases}$ $\longrightarrow$ *B* es invertible si y solo si $m \neq 1$ y $m = -8$.

SABER HACER

25. Página 48

a) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1+x)^3 - 1 - 1 - (1-x) - (1-x) - (1+x) = x^3 + 3x^2 \longrightarrow x^3 \quad 3x^2 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 3 \\ x & 0 \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 \longrightarrow x^2 \quad 1 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 1 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 3 - 2\ x - 1 + 4 - 4x = x^2 - 2x - 1 \longrightarrow x^2 - 2x - 1 = -2 \longrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

26. Página 48

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ x & 0 & 2 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = x^2 - 4x = -4 — x^2 - 4x - 4 = 0 — x = \frac{4 \quad \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$$

27. Página 48

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 3m - 2 - 9 - 4m = -m - 9$ $\qquad -m - 9 = 0 \rightarrow m = -9$

Si $m \neq 9$ el rango de la matriz es 3. Si $m = 9$, tiene rango 2.

28. Página 49

$$\begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) - m^2(m-1) + m^2(m-1) - m^2(m-1) - m(m-1)^2 - m^2 = m^2 - 2m = m(m-2)$$

$m(m \quad 2) \quad 0 \cdot \begin{cases} m & 0 \\ m & 2 \end{cases}$ $\qquad$ Si $m = 0$ y $m = 2$, el rango de la matriz A es 3.

Si $m = 0 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2. $\qquad$ Si $m = 2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2.

29. Página 49

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \quad 3 \cdot 0 \longrightarrow$ Rango ≥ 2.

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 - 3k - 9 + 9 = 3k - 9 \longrightarrow 3k - 9 = 0 \longrightarrow k = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 3k \rightarrow 9 - 3k = 0 \rightarrow k = -3$

Como no hay ningún valor que anule simultáneamente todos los menores de orden 3, el rango de A es 3.

30. Página 50

$$|A| = -2 \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \to x = -\frac{1}{2}$$

31. Página 50

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m\left[(m-1)^2-1\right]-\left[m-(m-1)\right] = m^3 - 2m^2 - m + 2 \longrightarrow m^3 - 2m^2 - m - 2 = 0 \to \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Por tanto, *A* es invertible si y solo si $m = -1$, $m = 1$ y $m = 2$.

32. Página 50

Tomamos $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = B \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\, B \longrightarrow X = A^{-1}B$$

Vamos a calcular A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

33. Página 51

Consideramos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$AX - B = C^2 \longrightarrow AX = C^2 - B \longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C^2 - B) \longrightarrow X = A^{-1}(C^2 - B)$$

$$|A| - -3 \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C^2 - B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 & -22 & -4 \\ -26 & 23 & -1 \\ -50 & 44 & -10 \end{pmatrix}$$

34. Página 51

$$AX+X=B \longrightarrow AX-IX=B \longrightarrow (A-I)X=B \longrightarrow (A-I)^{-1}(A+I)X=(A+I)^{-1}B \longrightarrow X=(A-I)^{-1}B$$

$$X=(A-I)^{-1}B=\left(\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5&20\\-10&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5&20\\-10&5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&20\\-10&5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15&15\\-20&55\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\-4&11\end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

35. Página 52

$$|A| \quad \begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix} \quad 4 \qquad\qquad |B| \quad \begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix} \quad 11$$

$$A \quad B \quad \begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4&1\\1&1\end{pmatrix} \longrightarrow |A \quad B| \quad \begin{vmatrix}4&1\\1&1\end{vmatrix} \quad 5$$

$$A \quad B \quad \begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&5\\3&5\end{pmatrix} \longrightarrow |A \quad B| \quad \begin{vmatrix}2&5\\3&5\end{vmatrix} \quad 25$$

36. Página 52

$$|A| \quad \begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix} \quad 5 \qquad\qquad |B| \quad \begin{vmatrix}1&5\\1&2\end{vmatrix} \quad 3$$

$$A\cdot B \quad \begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&5\\1&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&7\\1&4\end{pmatrix} \longrightarrow |A\cdot B| \quad \begin{vmatrix}2&7\\1&4\end{vmatrix} \quad 15 \quad |A|\cdot|B|$$

$$B\cdot A \quad \begin{pmatrix}1&5\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}9&16\\3&7\end{pmatrix} \longrightarrow |B\cdot A| \quad \begin{vmatrix}9&16\\3&7\end{vmatrix} \quad 15 \quad |B|\cdot|A|$$

37. Página 52

a) $\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix} \quad 1$

c) $\begin{vmatrix}a&2\\b&3\end{vmatrix} \quad 3a \quad 2b$

e) $\begin{vmatrix}a \quad 4&2\\6&a \quad 3\end{vmatrix} \quad a^2 \quad 7a$

b) $\begin{vmatrix}12&4\\9&3\end{vmatrix} \quad 0$

d) $\begin{vmatrix}x&x^2\\1&x\end{vmatrix} \quad 0$

f) $\begin{vmatrix}a \quad 1&a \quad 1\\1 \quad a&a \quad 1\end{vmatrix} \quad 2a^2 \quad 2$

38. Página 52

a) $\begin{vmatrix}4&2\\3&a\end{vmatrix} \quad 4a \quad 6,\ 4a-6=26 \longrightarrow a=5$

b) $\begin{vmatrix}b&4\\3b&3\end{vmatrix} \quad 15b,\ -15b=45 \longrightarrow b=-3$

c) $\begin{vmatrix}c \quad 3c&1\\4&c\end{vmatrix} \quad c^2 \quad 12c \quad 4,\ c^2-12c+4=32 \longrightarrow c=-2$ o $c=14$

d) $\begin{vmatrix}\frac{1}{d}&\frac{-2}{d}\\3&8\end{vmatrix}=\frac{14}{d},\ \frac{14}{d} \quad 7 \longrightarrow d=2$

e) $\begin{vmatrix}\sqrt{e}&2\\2&\sqrt{e-6}\end{vmatrix}=\sqrt{e^2-6e}-4,\ \sqrt{e^2 \quad 6e} \quad 4 \quad 0 \longrightarrow e=8$

f) $\begin{vmatrix}1&2f\\f&1\end{vmatrix} \quad 1 \quad 2f^2,\ 2f^2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 2f^2 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 4f^2 \quad 1 \quad 0 \quad f \quad \frac{1}{2}$

39. Página 52

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A - B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A - B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

40. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x-1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot b\ c$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 - c^3 - 3 \cdot a \cdot b\ c$

41. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 3a - 4\ ,\ 3a - 4 = 2 \longrightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 - 5b - 1\ ,\ b^2 - 5b - 1 = 5 \longrightarrow b = -6$ o $b = 1$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c-2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 - 23c + 3\ ,\ c^2 - 23c + 3 = -197 \longrightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -2d^3 - d\ ,\ -2d^3 - d = -18 \longrightarrow d = 2$

42. Página 52

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{vmatrix} = -3456 - 4158 - 2618 + 4896 - 1848 - 2376 = -1112$$

43. Página 52

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\quad 6$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

44. Página 52

a) $|A|\ \begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}\ 11,\ 2|A| - 22$

$2A\ \begin{pmatrix}6 & 10\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ |2A|\ \begin{vmatrix}6 & 10\\ 2 & 4\end{vmatrix}\ 44 \rightarrow$No se cumple.

b) $A\quad B\ \begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1 & 9\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ |A\quad B|\ \begin{vmatrix}1 & 9\\ 2 & 3\end{vmatrix}\ 15$

$|A|\ 11,\ |B|\ \begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}\ 14,\ |A|\ |B|\ 3 \rightarrow$No se cumple.

c) $C\quad 2B\ \begin{pmatrix}6 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\ 2\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}10 & 11\\ 10 & 1\end{pmatrix},\ |C\quad 2B|\ \begin{vmatrix}10 & 11\\ 10 & 1\end{vmatrix}\ 100$

$|B|\ 14,\ |C|\ \begin{vmatrix}6 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}\ 6,\ |C|\ 2|B|\ 34 \rightarrow$No se cumple.

d) $A\cdot B\ \begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}9 & 17\\ 8 & 2\end{pmatrix},\ |A\cdot B|\ \begin{vmatrix}9 & 17\\ 8 & 2\end{vmatrix}\ 154$

$|A|\ 11,\ |B|\ 14,\ |A|\cdot|B| - -154 \rightarrow$Se cumple por la propiedad 9.

45. Página 52

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-5 \qquad |A^t|=|A|=-5 \qquad |2A| - 2^3|A| - -40$$

$$|A^2|=|A\cdot A|=|A|\cdot|A|=25 \qquad \left|\frac{1}{2}A^3\right|\ \frac{1}{2^3}|A|\cdot|A|\cdot|A|\ \frac{1}{8}(\ 5)^3\ \frac{125}{8}$$

46. Página 52

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -2\end{vmatrix}=2$$

a) $F_3 - F_2 \rightarrow \begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 7 & -3\end{vmatrix}=2$

b) $C_3 - C_1 \rightarrow \begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}=2$

c) $C_2 - 3C_1 - C_3 \rightarrow \begin{vmatrix}3 & 12 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 9 & -2\end{vmatrix}=2$

d) $F_3 - F_1 - 2F_2 \rightarrow \begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -3 & 1\end{vmatrix}=2$

47. Página 52

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2c - b + 2a \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c-5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - b - 2c - 3$$

Por tanto, se cumple la igualdad: $\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c-5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

48. Página 52

$|A| \quad 3$, $|2A| \quad 48$

$2^n|A| - 48 \longrightarrow 2^n \cdot 3 = 48 \longrightarrow 2^n = 16 \longrightarrow n = 4$

La matriz *A* es de orden 4.

49. Página 52

$|3A| \quad 54$, $n = 3$

$3^3|A| - 54 \longrightarrow |A| \quad 2$

50. Página 52

a) $|M^t| = 5$

Propiedad 1

b) $|2M| \quad 2^2|M| \quad 4 \cdot 5 \quad 20$

Propiedad 3

c) $|5M| \quad 5^2|M| \quad 25\ \ 5 \quad 125$

Propiedad 3

d) $|2M| \quad 2^3|M| \quad 8 \cdot 5 \quad 40$

Propiedad 3

e) $|5M| - 5^3|M| - 125\ \ 5 - 625$

Propiedad 3

f) $|2M| \quad 2^4|M| \quad 16 \cdot 5 \quad 80$

Propiedad 3

51. Página 53

a) Propiedad 3 – Propiedad 5 – Propiedad 2

b) Propiedad 5 $F'_1 = F_1 - 10F_2$

c) Propiedad 5 $F'_1 = F_1 - 10F_2$ y $F'_2 = F_2 - 10F_3$

d) Propiedad 8 – Propiedad 6

52. Página 53

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+2F_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dot{5}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{C'_3=100C_1+10C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 125 \\ 3 & 7 & 375 \\ 6 & 2 & 625 \end{vmatrix} = 25 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 15 \\ 6 & 2 & 25 \end{vmatrix} = \dot{25}$$

$$c)\ \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 7 & -3 \end{vmatrix} \overset{F_3=-F_1-F_2+8F_3}{=} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -14 & 56 & -35 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 8 & -5 \end{vmatrix} = \dot{7}$$

53. Página 53

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\ 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

54. Página 53

$$|A| \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad 2 \qquad |B| \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \quad 3 \qquad |A| \mid |B| \quad 2 \quad 3 \quad 5 \qquad A \quad B \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 3 \end{bmatrix} \qquad |A \mid B| \quad 18 \quad 13 \quad 5$$

No, no es cierto para todas las matrices, por ejemplo $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $|A| \quad 0$. Y sea $B \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|B| \quad 0$ y, sin embargo, $A \quad B \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A - B| - 1$.

55. Página 53

$$\begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 2g & 2i & 2h \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} d & f & e \\ g & i & h \\ a & c & b \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} 2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2^3 \cdot \frac{1}{2} = -4$$

56. Página 53

$$| M^3 | - | M | \cdot | M | \cdot | M | - 6^3 - 216$$

$$| 2M | \quad 2^{(\text{Orden de } M)} \cdot | M | \quad 6 \cdot 2^{(\text{Orden de } M)}$$

57. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\ \ 5\cdot 3 = 45$

b) $\begin{vmatrix} a-2b & c & b \\ d-2e & f & e \\ g-2h & i & h \end{vmatrix} \overset{C'_1 = C_1 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$

58. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\ 6 = 4$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-d & b-e & c-f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b-e & c-f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\left[\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right] = 3(0+6) = 18$

c) $\begin{vmatrix} b & 2a & \frac{c}{5} \\ e & 2d & \frac{f}{5} \\ h & 2g & \frac{i}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\cdot 6 = -\frac{12}{5}$

59. Página 53

a) $C_3 = -2C_1$ b) $F_3 = F_1 + F_2$ c) $C_3\ \ \frac{1}{2}C_1\ \ \ C_2$ d) $F_3 = 3F_2 - 2F_1$

60. Página 53

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2d & b-2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F'_2 = F_2 - F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F'_3 = F_3 + F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x-y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+y & y-z & z-x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x-y-z & x-y-z & x+y-z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(x+y-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

61. Página 53

a) Cierta, por las propiedades de los determinantes.

b) Falsa, se debería multiplicar por 4 el determinante.

c) Falsa, solo se multiplica por 4 el elemento *ad*, pero no *bc*.

d) Cierta, por las propiedades de los determinantes.

62. Página 53

$$\begin{vmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 8 \longrightarrow a \cdot b \cdot c = 8$$

a) $\begin{vmatrix} a-f & d-a & f \\ c-e & b & c-e \\ e & b & e \end{vmatrix} \overset{C_1=C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} a & d-a & f \\ 0 & b & c+e \\ 0 & b & e \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & c-e \\ b & e \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & c-e \\ 1 & e \end{vmatrix} \overset{F_1-F_2}{=} ab\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & e \end{vmatrix} = ab(-c) = -8$

b) $abc = 8 \longrightarrow a \cdot 1 \cdot 2 = 8 \longrightarrow a = 4$

63. Página 54

a) Es una matriz triangular, su determinante es 5 · 1 · 3 · 1 = 15.

b) Es una matriz triangular, su determinante es 2 · 2 · 3 · 3 = 36.

64. Página 54

$|B| = |2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A|\ |A| = 8 \cdot |A|^2 \longrightarrow 8 \cdot |A|^2 = -32 \longrightarrow |A|^2 = -4$ No puede ser; por tanto, no es posible que el valor del determinante de B sea -32.

65. Página 54

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 2x \longrightarrow 3x^2 \quad 9x \mid 6 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 2 \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} x & x-2 & x-1 \\ x & x-4 & x-3 \\ x & x-6 & x-6 \end{vmatrix} = -10 \longrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ x & 4 & -3 \\ x & 6 & -6 \end{vmatrix} = -10 \longrightarrow -2x = -10 \longrightarrow x = 5$

c) $\begin{vmatrix} 2x & 4 & -2 \\ x & 2 & x \\ -1 & 3 & 2x \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow -6x^2 - 10x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & x-3 \\ 1 & x-2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 7x \longrightarrow x^2 - 4x - 3 = 1 - 7x \longrightarrow x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 2 \\ x & 1 \end{cases}$

66. Página 54

$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \end{vmatrix} \quad (x \quad a)(x \quad b) \quad ab \quad x^2 \quad (a \quad b)x \quad 0 \cdot x^2 \quad 3x \quad 0 \cdot x \quad 0 \text{ o } x \quad 3$

67. Página 54

$|M| - 3 \longrightarrow |4M| - 4^2 |M| \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{-} - 4^2 |M| \overset{\frac{1}{2}F_2}{-} - 4^2 \cdot \frac{1}{2}|M| - -24 - |P|$

68. Página 54

$|M| \quad 5 \longrightarrow |3M| \quad 3^3 |M| \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\cdot} \quad 3^3 |M| \overset{-2C_2}{\cdot} \quad 3^3 \quad 2\ |M| \quad 270 \quad |P|$

69. Página 54

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$ $\qquad |A^2| = (abcd)^2$

b) $A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^3 \end{pmatrix}$ $\qquad |A^3| = (abcd)^3$

c) $|A^n| = (abcd)^n$

70. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 - 6 - 84 - 9 = -80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-39) + 7 = -80$

71. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 - 24 - 8 - 10 - 54 = 117$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{C'_2 = C_2 - 6C_1 \\ C'_3 = C_3 - 5C_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 117$

72. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -(-8 + 10 - 24 - 24 - 20 - 4) - (-30 - 36 - 16 - 40 - 6 - 72) = 34$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 3(-8 - 24 - 20 + 30 - 16 - 8) - 3(8 - 24 - 16 + 24 - 16 + 8) - (8 - 20 - 8 - 16 - 8 - 10) = -92$

73. Página 54

Lo desarrollamos por la última fila:

$$2\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix} - 2\cdot 2\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix} = 4\cdot(6-(-2)) = 16$$

Efectivamente es divisible entre 4.

74. Página 54

$$|A| = \begin{vmatrix}-a & 1 & 0\\ 1 & -a & 1\\ 0 & 1 & -a\end{vmatrix} = -a^3 + 2a = a(2-a^2)$$

Si $a \neq 0$ y $a = -\sqrt{2}$ el determinante es distinto de 0.

75. Página 54

$$\begin{vmatrix}3a & a & a & a\\ a & 3a & a & a\\ a & a & 3a & a\\ a & a & a & 3a\end{vmatrix} = a^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix} \overset{\substack{C'_2 = C_2 - C_1\\ C'_3 = C_3 - C_1\\ C'_4 = C_4 - C_1}}{=} a^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} =$$

$$= a^4\cdot -1\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = a^4\ -(-8) - 2(12+4+4) = 48a^4$$

76. Página 54

Para que el determinante sea 0, el rango de la matriz no puede ser tres, es decir, las tres columnas no pueden ser linealmente independientes. La segunda y tercera columnas son linealmente independientes, de modo que la primera tiene que ser dependiente; para ello es igual a una de las dos, o bien es combinación lineal de ambas.

Es igual a la segunda si $x = 2$. Es igual a la tercera si $x = -3$. Y no existe una combinación lineal de la segunda y la tercera que nos dé algún valor de x posible para la primera, de modo que solo tenemos dos soluciones.

77. Página 54

$$\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 1\\ 1 & x-2 & 1\\ x & x & 3\end{vmatrix} = 3(x+2)^2 + x - x - x(x-2) - x(x+2) - 3 = 3x^2 - 12x - 12 + 2x - 2x^2 - 4x - 3 = x^2 + 10x - 9 = 0$$

$$x \quad \frac{10\ \text{I}\ \sqrt{100 \quad 36}}{2} \quad \frac{10 \quad 8}{2} \quad \begin{cases} x_1 & 1\\ x_2 & 9\end{cases}$$

78. Página 54

a) $f(a) = \begin{vmatrix}2a & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2a\\ a & -1 & a\end{vmatrix} = 2a^2 - 2 - 4a^2 - a = -2a^2 - a - 2$

b) $f(0) = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -1 & -a & 2a \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 - 2a^2 + 2a^2 = 2a^2 - 2$

c) $f(1) = \begin{vmatrix} 1-a & 1 & -2 \\ -1 & 1-a & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(1-a) + 2a^2 - 2 - 2a(1-a) - 2a(1+a) - 1 = 1 - a^2 - 2a^2 - 2 - 4a + 1 = a^2 + 4a = 5$

$a \quad \frac{4 \quad \sqrt{16 \mid 20}}{2} \quad \frac{4 \quad 6}{2} \quad \begin{cases} a_1 & 1 \\ a_2 & 5 \end{cases}$

79. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad 6 \neq 0 \longrightarrow \text{Rango} = 2$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} \quad 0, \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} \quad 0$ y $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} \quad 0 \longrightarrow \text{Rango} = 1$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \text{Rango} < 3, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 7 \neq 0 \longrightarrow \text{Rango} = 2$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 = 0 \longrightarrow \text{Rango} = 3$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 24 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 24 & 19 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \text{Rango} < 3$

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 18 \neq 0 \longrightarrow \text{Rango} = 2$

f) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 24 & 1 \end{vmatrix} \quad 78 \quad 0 \longrightarrow \text{Rango} = 2$

80. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \longrightarrow \text{Rango} = 3$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \text{Rango} < 3$

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 23 \quad 0 \longrightarrow \text{Rango} = 2$

81. Página 55

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 3$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ $8 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 2$

82. Página 55

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 3$

Una combinación sería, por ejemplo: $C_4 = C_1 - C_2 - 2C_3$.

83. Página 55

a) Si consideramos el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ tenemos que su determinante es distinto de 0; por lo tanto, el rango es 2.

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 8 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

84. Página 55

a) Consideramos los menores $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \end{pmatrix}$ y vemos para que valores de a se anulan sus determinantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a - 9 = 0 \rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9-72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4} = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4a - 12 = 0 \rightarrow a = 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = 5a - 15 = 0 \rightarrow a = 3$$

Si $a = 3$, no hay ningún menor cuyo determinante sea distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango menor que 3, pero sí que podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, así que el rango será 2.

Si $a \neq 3$, podemos encontrar un menor de orden 3 con determinante distinto de 0, por lo que el rango es 3.

b) Consideramos los menores $\begin{vmatrix} 1 & 1 & b-1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ b & 2 & 0 \end{vmatrix}$ y vemos para qué valores de a se anulan sus determinantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b-1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{vmatrix} = b^2(b-1) - 2b = b(b^2 + b - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b^2 - b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$b^2 - b - 2 = 0 — b = \frac{-1 + \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1-3}{2} = \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b = b(b-2) = 0 — \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ b & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b(b-1) - 4 = 2b^2 + 2b - 4 = 0 \rightarrow b = \frac{-2 - \sqrt{4-32}}{4} = \frac{-2+6}{4} = \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

No hay ningún valor que anule los tres menores de orden 3, de modo que siempre podremos encontrar un menor de orden 3 con determinante distinto de 0 y, por tanto, el rango de la matriz es siempre 3.

85. Página 55

$A' = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $|A'| = 6 - 18 = -12$. El determinante es distinto de 0, el rango es 3.

No es posible añadir una columna a B y obtener rango 3, ya que las dos columnas que hay son linealmente dependientes y el rango de B es 1; al añadir una columna lo máximo que tendríamos es rango 2.

86. Página 55

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^2 \qquad |C| = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & m \end{vmatrix} = -2m^2 - 4m + 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3m \qquad |D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -m & m & -3m \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| - -m^2 - 0 \rightarrow m - 0 \qquad |B| - 3m^2 - 3m - 0 — \begin{cases} m - 0 \\ m - 1 \end{cases} \qquad |C| - -2m^2 + 4m - 2 - 0 \rightarrow m - \frac{-2 = \sqrt{4+4}}{-2} - \begin{cases} m - 1 + \sqrt{2} \\ m - 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

La matriz D tiene rango 1 para cualquier valor de m.

a) La matriz A tiene rango 3 si $m \neq 0$.

La matriz B tiene rango 3 si $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

La matriz C tiene rango 3 si $m \neq 1 - \sqrt{2}$ y $m \neq 1 - \sqrt{2}$.

b) No hay ningún valor para el que la matriz A tenga rango 2.

Si $m = 0$ o $m = 1$, en la matriz B podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango 2.

Si $m = 1 - \sqrt{2}$ o $m = 1 - \sqrt{2}$, en la matriz C podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango 2.

87. Página 55

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix} \quad a^2 + 2a \quad 1 \text{, } a^2 - 2a - 1 = 0 \ \longrightarrow a = -1 \text{; por tanto, } |A| \quad 0 \longrightarrow \text{Rango } A = 1.$$

88. Página 55

$$A \quad tI \quad \begin{pmatrix} 2 & t & 2 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix} \qquad |A \quad tI| \quad \begin{vmatrix} 2 & t & 2 \\ 3 & 1 & t \end{vmatrix} \quad t^2 + 3t \quad 4 \text{, } t^2 \quad 3t \quad 4 \quad 0 \quad \begin{cases} t & 4 \\ t & 1 \end{cases}$$

Por tanto, si $t = -4$ o $t = 1$ el rango de $A - tI$ es 1.

89. Página 55

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a(a^5 - a^3 - a^2 - 1) \text{, } \ a(a^5 - a^3 - a^2 + 1) = 0 - \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el rango es 1.

Si $a = -1 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 2 \neq 0$, el rango es 2.

Si $a = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \neq 0$, el rango es 2.

90. Página 55

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & a-1 \\ a-1 & a-1 & 2a \end{vmatrix} \text{, } C_3 = C_1 - C_2 \longrightarrow \text{Rango } A < 3$$

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \quad a & 1 \end{vmatrix} \quad a^2 \quad 1$, $-a^2 - 1 = 0$ para cualquier valor de $a \longrightarrow$ Rango $A = 2$.

91. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad 8 \quad 0 \longrightarrow$ rango $\geq$ 2 $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -16a - 48$, $-16a - 48 = 0 \ \longrightarrow a = -3$

Si $a = -3$ $\longrightarrow$ rango $= 3$

Si $a = -3$ $\longrightarrow$ rango $= 2$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \quad 4 \neq 0 \ \longrightarrow$ rango ≥ 2

$$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b-1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -6b^2 - 10b + 4 \text{, } -6b^2 - 10b - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

Si $b = 2$ y $b \cdot \quad \dfrac{1}{3} \longrightarrow$ rango $= 3$ $\qquad$ Si $b = 2$ o $b \quad \dfrac{1}{3} \longrightarrow$ rango $= 2$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $3 \neq 0 \longrightarrow$ rango $\geq$ 2

Como $C_1 = -C_4$ todos los menores se pueden reducir a uno.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ c & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 3c\ ,\ -6 - 3c = 0 \longrightarrow c = 2$$

Si $c \neq 2$ $\longrightarrow$ rango = 3

Si $c = 2$ $\longrightarrow$ rango = 2

d) $\begin{vmatrix} 1 & -d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36\ ,\ 9d^2 - 36d - 36 = 0 \longrightarrow d = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -d & -2 \\ -3 & 6 & 6 \\ d & -4 & -4 \end{vmatrix} = -6d^2 - 24d - 24\ ,\ -6d^2 - 24d - 24 = 0 \longrightarrow d = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \\ d & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0\ ,\ \begin{vmatrix} -d & 3 & -2 \\ 6 & -9 & 6 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Si $d \neq 2$ $\longrightarrow$ rango = 3Si $d = 2$ $\longrightarrow$ rango = 1, ya que todas las filas son proporcionales.

92. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a\ ,\ a(a^2 - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a = 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \longrightarrow$ rango = 3

Si $a = 1$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $1 \neq 0$ $\longrightarrow$ rango = 2

Si $a = 0$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $1 \quad 0 \longrightarrow$ rango = 2

Si $a = -1$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $3 \neq 0$ $\longrightarrow$ rango = 2

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -2 \\ 2a-1 & a-1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a\ ,\ a(a^2 - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a = 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \longrightarrow$ rango = 3

Si $a = 0$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $1 \quad 0$ $\longrightarrow$ rango = 2

Si $a = 1$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ $1 \quad 0$ $\longrightarrow$ rango = 2

Si $a = -1$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $1 \quad 0$ $\longrightarrow$ rango = 2

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 4 \cdot 0 \longrightarrow$ rango ≥ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4 \,,\; a^2 \quad 3a \quad 4 \quad 0 \cdot \begin{cases} a & 4 \\ a & 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2a & a & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 4 \,,\; -a^2 - 4 = 0$$ no se cumple para ningún valor de a.

El rango de la matriz es 3, ya que para cualquier valor de a existe un menor de orden 3 distinto de cero.

93. Página 56

a) $|A| \quad 2 \neq 0 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| \quad 1 \neq 0 \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| \quad 20 \neq 0 \longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| \quad 10 \neq 0 \longrightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

94. Página 56

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| \quad \frac{1}{|B|} \quad \frac{1}{4}$

c) $|AB| \quad |A|\,|B| \quad 20$

d) $|A^{-1}B| \quad |A^{-1}|\,|B| \quad \frac{1}{|A|}\,|B| \quad \frac{4}{5}$

e) $|BC^{-1}| \quad \frac{1}{|BC|} \quad \frac{1}{|B|\,|C|} \quad \frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| \quad \frac{1}{|C|} \cdot |B^t| \quad \frac{1}{|C|}\,|B| \quad 2$

95. Página 56

$$|A| \quad 4 \,,\; |B| \quad 4 \,,\; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\; B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 9 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\; A - B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 10 & 5 & -5 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) $|A - B^{-1} \cdot A| = 0$

b) $|A^3 \; B^{-1}| \quad |A^3|\,|B^{-1}| \quad |A|^3 \cdot \frac{1}{|B|} \quad 16$

96. Página 56

$A^2 = I \rightarrow |A^2| = |I| = 1 \rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \rightarrow |A| = \pm 1 \neq 0 \longrightarrow$ La matriz A es invertible.

$A^2 = A \cdot A = I \longrightarrow A^{-1} = A \rightarrow (A^{-1})^2 = A^{-1} \; A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \rightarrow (A^{-1})^2 = I$

97. Página 56

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = -A - I \rightarrow I = -A - A^3 = A(-I - A^2) \rightarrow A^{-1} = -I - A^2 \quad A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

98. Página 56

$|M| \quad a^2 \quad a$, $|M| \quad 0$ si $a^2 \quad a \quad 0 \cdot \begin{matrix} a & 0 \\ a & 1 \end{matrix}$; por tanto, la matriz M no tiene inversa para $a = 0$ y $a = 1$.

Si $a = 2$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $|M| \quad 2 \longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

99. Página 56

$|A| \quad m \quad 1$, $|A| \quad 0 \longrightarrow -m - 1 = 0 \longrightarrow m = -1 \longrightarrow$ La matriz A es singular para $m = -1$.

Si $m = 2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| - -3 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

100. Página 56

a) A es invertible, si y solo si, $|A| \neq 0$; $|A| - a^2 - 2ab - b^2$

$|A| \quad 0 \longrightarrow a^2 - 2ab - b^2 = 0 \longrightarrow a = b \longrightarrow$ A es invertible si y solo si $a = b$.

b) $A \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $|A| \quad 4 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$

101. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}15 & 5\\ 30 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15 & 5\\ 30 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

b) $Y=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}11 & 10 & 0\\ 14 & 4 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & \frac{3}{16}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11 & 10 & 0\\ 14 & 4 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

102. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix}66 & 14\\ -13 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}66 & 14\\ -13 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

b) $Y=\begin{pmatrix}17 & 9\\ 0 & -11\\ 6 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}17 & 9\\ 0 & -11\\ 6 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & -\frac{2}{11}\\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

103. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}14 & 9\\ -17 & -10\\ 17 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14 & 9\\ -17 & -10\\ 17 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

b) $Y=\left[\begin{pmatrix}10 & -10 & -10\\ -10 & 10 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -4 & -2\\ 13 & -2 & -3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -6 & -8\\ -23 & 12 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 8 & 6 & \frac{3}{2}\\ -4 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 9 & 1 & 2\end{pmatrix}$

104. Página 56

a) $Z=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\ 8\\ 10\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ -5\\ -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 0\end{pmatrix}$

b) $T=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}32 & 28 & 111\\ 54 & 52 & 194\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}32 & 28 & 111\\ 54 & 52 & 194\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4}\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}10 & 4 & 28\\ -8 & 12 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4}\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 9\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$

105. Página 56

$$C=\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{pmatrix}35&-23&9\\-2&10&6\\15&1&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\3&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{pmatrix}212&-122&-235\\-36&20&46\\4&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-5&3&6\\3&-2&-3\end{pmatrix}$$

$CD = BA^{-1}AB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I \longrightarrow C$ y D son inversas, $C = D^{-1}$.

106. Página 56

a) La ecuación $AX + 2B = 3C$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A| \neq 0$.

$|A|\; m \longrightarrow$ La ecuación tiene solución si y solo si $m = 0$

b) Si $m = 1 \longrightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $|A| = 1 \longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left(3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&3&0\\3&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-5&5&2\\5&-3&3\end{pmatrix}$$

107. Página 56

a) A es invertible si $|A| \neq 0$, $|A| = 2a - 1$

$|A| = 0$ si $2a - 1 = 0 \longrightarrow a = \frac{1}{2}$; por tanto, A es invertible si y solo si $a \neq \frac{1}{2}$.

b) $XA - A = A^t \longrightarrow X = (A^t - A)A^{-1}$

Si $a = 0 \longrightarrow A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{pmatrix}$, $A^T - A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&1\\2&1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

108. Página 56

A no es invertible $\longrightarrow |A| = 0$, $|A| = x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$.

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\qquad A^4=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&-8\\0&1&0\\-8&0&8\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{pmatrix}\qquad A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n2^{n-1}&0&(-1)^{n-1}2^{n-1}\\0&(-1)^n&0\\(-1)^{n-1}2^{n-1}&0&(-1)^n2^{n-1}\end{pmatrix}$$

109. Página 57

a) No existe matriz inversa si $|A| = 0$.

$|A| = a^2 - 3$, $|A| = 0$ si $a^2 - 3 = 0$ si $a = \pm\sqrt{3}$

Por tanto, A no tiene inversa si $a = \pm\sqrt{3}$.

b) $a = 2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 1 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $(A^t)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$$B = \frac{1}{2}\cdot(A^t)^2 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 3 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

c) $a = 2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = A^{-1}\cdot A^t - A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

110. Página 57

a) La ecuación $AX - A^t = A$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A| \neq 0$.

$|A| = 1 - 7m$, $1 - 7m = 0$ si $m = \frac{1}{7}$; por tanto, la ecuación tiene solución cuando $m \neq \frac{1}{7}$.

b) Si $m = 0 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 1 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

111. Página 57

a) A no es invertible si y solo si $|A| = 0$. $|A| = 3t^2 - 18t + 16 = 0 \to t = 3 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}$.

b) $t = 1 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$A^4 = (-I)\cdot A = -A$ $\qquad A^5 = -A\cdot A = -A^2$ $\qquad A^6 = A^5\cdot A = -A^2\cdot A = -(-I)\cdot A = A$

$A^n = A^{(\text{Resto de la división } n:6)}$, por ejemplo $\frac{100}{6} = 16 + \frac{4}{6} \longrightarrow A^{100} = A^4 = -A$

112. Página 57

a) A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$, $|A| \quad m^3 \;\; 4m$.

$|A| \quad 0 \longrightarrow -m^3 - 4m = 0$ si $m = 0$, $m = 2$ o $m = -2$; por tanto, A es invertible si y solo si $m = 0$ y $m = \quad 2$.

b) Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| \quad 3$

$$|6 \quad A^{-1}| \quad 6^3 \; |A^{-1}| \quad 6^3 \frac{1}{|A|} \longrightarrow |6 \cdot A^{-1}| \quad \frac{6^3}{3} \quad 72$$

c) $m = 1$, $XA = B \longrightarrow X = BA^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (3 \quad 0 \quad 3) \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \quad 3 \quad 2)$$

113. Página 57

a) $|A| \quad 0 \longrightarrow$ rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \quad 0 \longrightarrow$ rango $= 2$.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 2 \neq 0 \longrightarrow$ rango ≥ 2.

$|B| \quad m \longrightarrow |B| \quad 0$ si $m = 0$

Por tanto, si $m = 0 \longrightarrow |B| \neq 0$ y el rango es 3; si en cambio $m = 0$, el rango es 2.

c) B no es invertible si $|B| \quad 0$, es decir, si $m = 0$.

d) Si $m = -1$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$B \cdot X \cdot B = A \longrightarrow X = B^{-1} \quad A \cdot B^{-1} \quad X = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

114. Página 57

a) A tiene inversa si $|A| \neq 0$, $|A| \quad a^2(a \quad 1)$.

$$|A| \quad 0 \longrightarrow a^2(a \quad 1) \quad 0 \quad \cdot \begin{cases} a & 0 \\ a & 1 \end{cases}$$

Por tanto, A tiene inversa si y solo si $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

b) Si $a = 3 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $|A| \quad 18 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5a \\ 2a-2 & 0 \\ -a & -2a \end{pmatrix} \longrightarrow (AB)^t \quad \begin{pmatrix} a & 2(a \quad 1) & a \\ 5a & 0 & 2a \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & 2(a \quad 1) \\ 5a & 0 \end{vmatrix} \quad 10a(a \quad 1), \quad 10a(a \quad 1) \quad 0 \cdot \begin{cases} a & 0 \\ a & 1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} a & a \\ 5a & 2a \end{vmatrix} \quad 3a^2, \; 3a^2 = 0 \longrightarrow a = 0$

$\begin{vmatrix} 2(a \quad 1) & a \\ 0 & 2a \end{vmatrix} \quad 4a(a \quad 1), \quad 4a(a \quad 1) \quad 0 \cdot \begin{cases} a & 0 \\ a & 1 \end{cases}$

Si $a = 0 \longrightarrow (AB)^t \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

Si $a = 1 \longrightarrow (AB)^t \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 3 \neq 0$ tiene rango 2.

115. Página 57

a) Para que exista inversa el determinante tiene que ser distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

La inversa existe para $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

b) Para $x = 3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A| = 6 \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

116. Página 57

$$A + 2XB = C \rightarrow 2XB = C - A \rightarrow XB = (C - A)/2 \rightarrow X \quad \frac{C \quad A}{2} B^{-1}$$

$$\frac{C-A}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad Adj(B) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(B)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

117. Página 57

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow XC = C + A^2 - A \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$X = (C + A^2 - A)C^{-1} = (C + A - A)C^{-1} = CC^{-1} = I$$

X es la matriz identidad de orden 3.

118. Página 57

a) $X + XA + B^t = 2C \rightarrow X + XA = 2C - B^t \rightarrow X\,(I + A) = 2C - B^t \rightarrow X = (2C - B^t)\,(I + A)^{-1}$

Tiene orden 2×3.

b) $2C \quad B^t \quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |I - A| = -1 \qquad Adj(I - A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj(I + A)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

119. Página 57

$(A-B)X-A^tX=I \to (A-B-A^t)X=I \to X=(A-B-A^t)^{-1}$

$$A-B-A^t=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\left|A-B-A^t\right|=-2 \qquad Adj(A-B-A^t)=\begin{pmatrix}0&2&-2\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix} \qquad Adj(A-B-A^t)^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$(A-B-A^t)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

120. Página 57

a) No, por ejemplo $X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0 \qquad X^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=0$

b) Se tiene que verificar cualquiera que sea A, de modo que sí es cierta. $XA=0 \to X=0A^{-1}=0$

c) Es cierto. $X^2=AX \to XX=AX \to XXX^{-1}=AXX^{-1} \to X=A$

121. Página 57

Si A es diagonal: $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{pmatrix}$

$$AB=BA \to B=A^{-1}BA=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\j&k&l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&\frac{be}{a}&\frac{cf}{a}\\\frac{ag}{b}&h&\frac{ci}{b}\\\frac{aj}{c}&\frac{bk}{c}&l\end{pmatrix}$$

a) No se cumple necesariamente.

b) Para que se cumpla, los tres términos de la diagonal tienen que ser iguales.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 58

Porque los lados de los triángulos son líneas rectas.

2. Página 58

La triangulación no es única, puede haber tantas triangulaciones diferentes como imaginemos.

3. Página 58

No, porque no hay un triángulo cuya superficie sea nula.

4. Página 58

Respuesta abierta, puede ser cualquiera. No obstante, se recomienda dibujar la figura irregular sobre la cuadrícula previamente dibujada, de esa manera haremos coincidir los vértices de la triangulación con puntos de coordenada entera.