Derivada de una función

8

ACTIVIDADES

1. Página 190

a) $T.V.M.([2,3])=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{-\frac{8}{3}+1}{1}=-\frac{5}{3}$ $\quad T.V.M.([-3,-2])=\frac{f(-2)-f(-3)}{-2+3}=\frac{-1+\frac{8}{3}}{1}=\frac{5}{3}$

b) $T.V.M.([2,3])=\frac{g(3)-g(2)}{3-2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{1}=-\frac{1}{6}$ $\quad T.V.M.([-3,-2])=\frac{g(-2)-g(-3)}{-2+3}=\frac{-2+1}{1}=-1$

2. Página 190

a) $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2(-1+h)+(-1+h)^2+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=0$

b) $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{2}{-1+h}+2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2}{-1+h}=-2$

3. Página 191

$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-2+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3$

La ecuación de la recta tangente es: $y+1=3(x-1)\rightarrow y=3x-4$

4. Página 191

$f(3)=2$

$f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)\cdot(\sqrt{4+h}+2)}{h\cdot(\sqrt{4+h}+2)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+\cancel{h}-\cancel{4}}{\cancel{h}\cdot(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{1}{4}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=-4(x-3)\rightarrow y=-4x+14$

5. Página 192

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le -2 \\ -\frac{4}{x} & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

$f'(-2^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{-\frac{4}{-2+h}-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{4-4\cancel{h}}{(-2+h)\cdot\cancel{h}}=-\infty\rightarrow$ No existe.

$f'(-2^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{(-2+h)^2-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h^2-4h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h-4)=-4$

6. Página 192

a) $f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

Las derivadas laterales no existen, por lo que la función no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = +\infty$

$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = \nexists$

$f'(0^-)$ no existe, ya que h es un número negativo y la función no está definida para números negativos.

Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$.

7. Página 193

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 12x-x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

- Si $x < 3 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 3)$.
- Si $x > 3 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3, +\infty)$.
- Si $x = 3$:

$f(3^+) = \lim_{x \to 3^+} (12x - x^2) = 27$ $\qquad$ $f(3^-) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3$

La función no es continua en $x = 3$ por no coincidir los límites laterales.

Como la función no es continua en $x = 3$, se puede afirmar que tampoco es derivable en ese punto.

8. Página 193

$$f(x) = 2x + |x+2| \rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x < -2 \\ 3x+2 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -4$ $\qquad$ $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -4 \rightarrow$ La función es continua en $x = -2 \rightarrow$ Es continua en toda la recta real.

$f'(-2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3(-2+h)+2+4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$

$f'(-2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(-2+h)-2+4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = -2$.

9. Página 194

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h)^2 - x^3 - 2x^2}{h} = 3x^2 + 4x$$

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 4(x+h) - 3x^2 - 4x}{h} = 6x + 4$$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6(x+h)+4-6x-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6\cancel{h}}{\cancel{h}} = 6$$

$$f^{IV}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'''(x+h)-f'''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6-6}{h} = 0$$

A partir de la cuarta derivada todas las derivadas son iguales a 0.

10. Página 194

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot x\cdot(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+h)^2}+\frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-x^2+(x+h)^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(x+h)^3}-\frac{2}{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-6h^2x-6hx^2-2h^3}{h\cdot x^3\cdot(x+h)^3} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

11. Página 195

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$

$$h'(x) = 7\cdot f'(x) + 3\cdot g'(x)$$

$$h'(x) = 7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} + 3\lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} + 3\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 14x+3$$

b) $f(x) = x$ y $g(x) = x+1$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} + 2\cdot f(x) \rightarrow h'(x) = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)} + 2\cdot f'(x)$$

Así: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)-(x+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Entonces: $h'(x) = \frac{1\cdot x - (x+1)\cdot 1}{x^2} + 2\cdot 1 = \frac{-1}{x^2} + 2$

c) $f(x) = x$ y $g(x) = x+1$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Entonces: $h'(x) = \frac{1\cdot x - (x+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = x^2$

$$h(x) = f(x) + 5\cdot g(x) \rightarrow h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}x - h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\cdot x^2\cdot(x+h)^2} + 5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = -\frac{2}{x^3} + 10x$$

12. Página 195

$$[f(x)-g(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-g(x+h)]-[f(x)-g(x)]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)-g'(x)$$

Sea $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.

Entonces: $h(x)=3\cdot f(x)-g(x)\to h'(x)=3\cdot f'(x)-g'(x)$

Así: $h'(x)=3\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=3\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=3-2x$

13. Página 196

a) $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $f'(x)=\frac{-(x-1)\cdot sen\,x-cos\,x}{(x-1)^2}=\frac{-sen\,x}{x-1}-\frac{cos\,x}{(x-1)^2}$

c) $f'(x)=e^x\cdot(sen\,x+cos\,x)$

d) $f'(x)=2e^{2x}$

14. Página 196

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\ln e^{\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{x+h}{x}-1\right)\frac{1}{h}\right]}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

15. Página 197

a) $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-e^{-x^2}\right)$

b) $f'(x)=2cos\,x\cdot e^{2sen\,x}$

c) $f'(x)=-2x\cdot 2\cdot cos(x^2+1)\cdot sen(x^2+1)=-2x\cdot sen(2x^2+2)$

d) $f'(x)=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

16. Página 197

a) $f'(x)=-\frac{3}{1-3x}$

b) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)=\ln(2x+1)-\ln(1-2x)\to f'(x)=\frac{2}{2x+1}+\frac{2}{1-2x}=\frac{4}{1-4x^2}$

c) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln(5x+3)\to f'(x)=\frac{5}{10x+6}$

d) $f(x)=\frac{1}{2}[\ln(2x+1)-\ln(1-2x)]\to f'(x)=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{2x+1}+\frac{\cancel{2}}{1-2x}\right)=\frac{2}{1-4x^2}$

17. Página 198

a) $\ln(f(x))=\ln(x^{\cos x}) \rightarrow \ln(f(x))=\cos x\cdot\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\operatorname{sen}x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x} \rightarrow f'(x)=\left(-\operatorname{sen}x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)\cdot x^{\cos x}$$

b) $\ln(f(x))=\ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^x\right) \rightarrow \ln(f(x))=\frac{x}{2}\cdot\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\cdot\ln x+\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(\ln x+1)\cdot\left(\sqrt{x}\right)^x$$

c) $\ln(f(x))=\ln\left((\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)^{\sqrt{x}}\right) \rightarrow \ln(f(x))=x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{arc}\operatorname{sen}x}$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{arc}\operatorname{sen}x}\right)\cdot(\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)^{\sqrt{x}}$$

d) $\ln(f(x))=\ln(x-\operatorname{sen}x)^x$

$$\ln(f(x))=x\cdot\ln(x-\operatorname{sen}x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(x-\operatorname{sen}x)+x\cdot\frac{1-\cos x}{x-\operatorname{sen}x} \rightarrow f'(x)=\left(\ln(x-\operatorname{sen}x)+\frac{x\cdot(1-\cos x)}{x-\operatorname{sen}x}\right)\cdot(x-\operatorname{sen}x)^x$$

18. Página 198

a) $\ln(f(x))=\ln(x^n)\rightarrow\ln(f(x))=n\cdot\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=n\cdot\frac{1}{x} \rightarrow f'(x)=n\cdot\frac{1}{x}\cdot x^n=n\cdot x^{n-1}$$

b) $\ln(f(x))=\ln(a^x)\rightarrow\ln(f(x))=x\cdot\ln a$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1\cdot\ln a \rightarrow f'(x)=a^x\cdot\ln a$$

19. Página 199

a) $3x^2-3+2yy'=0\rightarrow 2yy'=3-3x^2\rightarrow y'=\frac{3-3x^2}{2y}$

$$y'(7,-2)=\frac{3-3\cdot7^2}{2\cdot(-2)}=36$$

b) $10x+3y+3xy'+12yy'-1+13y^2+26xyy'=0\rightarrow$

$$\rightarrow(3x+12y+26xy)y'=1-10x-3y-13y^2\rightarrow y'=\frac{1-10x-3y-13y^2}{3x+12y+26xy}$$

$$y'(7,-2)=\frac{1-10\cdot7-3\cdot(-2)-13\cdot(-2)^2}{3\cdot7+12\cdot(-2)+26\cdot7\cdot(-2)}=\frac{115}{367}$$

20. Página 199

$f'(x)=2x$

- $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- $(f^{-1})'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

SABER HACER

21. Página 200

Primero se halla la derivada de la función: $f'(x)=\ln x+1$

Después, se calcula la derivada de la función en el punto, que es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto: $f'(e)=\ln e+1=2$

Se calcula el valor de la función en el punto: $f(e)=e\cdot\ln e=e$

Así: $y-e=2(x-e)\to y=2x-e$

22. Página 200

Primero se calcula la pendiente de las rectas tangentes. Como son paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, forman un ángulo de 45º:

$$m=tg\,45°\to m=1$$

Después, se halla la derivada de la función: $f'(x)=9x^2$.

A continuación, se calcula la derivada de la función en el punto:

$$f'(a)=9a^2\ \longrightarrow\ 9a^2=1\to a=\pm\frac{1}{3}$$

Para terminar, se hallan los puntos $(a,f(a))=\begin{cases}\left(\frac{1}{3},f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{19}{9}\right)\\ \left(-\frac{1}{3},f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{17}{9}\right)\end{cases}$

23. Página 201

Se calcula la derivada de la función: $f'(x)=(a-1)\cdot cos\,x+b$

Se obtiene el valor de la derivada de la función en el punto dado:

$$f'(\pi)=(a-1)\cdot cos\,\pi+b=1-a+b$$

Como la pendiente de la recta tangente es –1: $(a-1)\cdot cos\,\pi+b=-1\to b-a=-2$

Con la ecuación de la recta tangente en $x=\pi$, se obtiene el valor $y(\pi)\ \longrightarrow\ y(\pi)=-\pi+1$

Se determina el valor de la función en dicho punto: $f(\pi)=(a-1)\cdot sen\,\pi+b\pi=b\pi$

Ambas funciones se cortan en el punto, luego $b\pi=-\pi+1\to b=\dfrac{1-\pi}{\pi}$

Así, $a=b+2\to a=\dfrac{1+\pi}{\pi}$

24. Página 201

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x < 1$ o $x > 1$, la función es continua por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$

$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 - 4x + 3) = 1 - 4 + 3 = 0$ $\qquad$ $f(1^+) = \lim_{x\to 1^+}(-x^2 + 4x - 3) = -1 + 4 - 3 = 0$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

A continuación, se estudia la derivabilidad de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x < 1$ o $x > 1$, la función es derivable por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$x = 1 \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2 - 4 = -2 \\ f'(1^+) = -2 + 4 = 2 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

25. Página 202

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x < 0$ o $x > \pi$, la función es continua por ser un polinomio. Si $0 < x < \pi$, la función es continua por ser una función trigonométrica. Veamos qué sucede en los puntos donde cambia su expresión algebraica.

• Si $x = 0$:

$f(0) = 0$ $\qquad$ $f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\qquad$ $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = sen(a \cdot 0) = 0$

En $x = 0$, la función siempre es continua, independientemente del parámetro a.

• Si $x = \pi$:

$f(\pi) = (\pi - \pi)^2 + 1 = 1$ $\qquad$ $f(\pi^-) = \lim_{x\to \pi^-} f(x) = sen(a \cdot \pi)$ $\qquad$ $f(\pi^+) = \lim_{x\to \pi^+} f(x) = (\pi - \pi)^2 + 1 = 1$

Para que la función sea continua en $x = \pi$ debe cumplirse que:

$$sen(a \cdot \pi) = 1 \rightarrow a\pi = \frac{(2k+1)\cdot \pi}{2} \rightarrow a = \frac{2k+1}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

A continuación, se calcula la derivabilidad de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2k+1}{2} \cdot cos\left(\dfrac{(2k+1)\cdot x}{2}\right) & \text{si } 0 < x < \pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2(x - \pi) & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Si $x < 0$ o $x > \pi$, la función es derivable por ser un polinomio. Veamos qué sucede en los puntos en los que cambia su expresión algebraica:

$f'(0^-) = 2$ $\qquad$ $f'(0^+) = \dfrac{2k+1}{2}$ $\qquad$ $f'(\pi^-) = \dfrac{2k+1}{2} \cdot cos\left(\dfrac{2k+1}{2} \cdot \pi\right)$ $\qquad$ $f'(\pi^+) = 0$

En $x = 0$, la función no es derivable, porque $2 = \dfrac{2k+1}{2} \longrightarrow k = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

En $x = \pi$, la función es derivable para cualquier valor entero de k.

26. Página 202

a) $g'(x)=2e^x \qquad g'(f(x))=2e^{tg(x^2+1)} \longrightarrow (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=\dfrac{4x\cdot e^{tg(x^2+1)}}{cos^2(x^2+1)}$

b) $f'(x)=\dfrac{2x}{cos^2(x^2+1)} \qquad f'(g(x))=\dfrac{4e^x}{cos^2\left((2e^x)^2+1\right)}$

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{8e^{2x}}{cos^2\left((2e^x)^2+1\right)}$$

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{cos^2(x^2+1)} \qquad f'(f(x))=\dfrac{2tg(x^2+1)}{cos^2\left((tg(x^2+1))^2+1\right)}$

$$(f\circ f)'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)=\frac{2\cdot tg(x^2+1)}{cos^2\left((tg(x^2+1))^2+1\right)}\cdot\frac{2x}{cos^2(x^2+1)}$$

27. Página 203

$$f'(x)=\ln(h(x))+\frac{x\cdot h'(x)}{h(x)}+\frac{2h(x)h'(x)x-h^2(x)}{x^2}$$

Como $h(1)=3$ y $h'(1)=2$, resulta: $f'(1)=\ln(h(1))+\dfrac{1\cdot h'(1)}{h(1)}+\dfrac{2h(1)h'(1)-h^2(1)}{1^2}=\ln 3+\dfrac{1\cdot 2}{3}+\dfrac{2\cdot 3\cdot 2-(3)^2}{1^2}=\ln 3+\dfrac{11}{3}$

28. Página 203

$$\ln(f(x))=\ln(tg\,x)^{x+3}\rightarrow \ln(f(x))=(x+3)\ln(tg\,x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(tg\,x)+(x+3)\cdot\frac{\frac{1}{cos^2x}}{tg\,x}=\ln(tg\,x)+\frac{x+3}{cos\,x\cdot sen\,x}$$

$$f'(x)=\left(\ln(tg\,x)+\frac{x+3}{cos\,x\cdot sen\,x}\right)\cdot f(x)=\cdot\left(\ln(tg\,x)+\frac{x+3}{cos\,x\cdot sen\,x}\right)\cdot(tg\,x)^{x+3}$$

29. Página 203

$(a, b) = (1, 1)$ es el centro de la circunferencia.

$A(3, 3)$ es un punto por el que pasa la circunferencia.

r es el radio.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \;\longrightarrow\; r^2=(3-1)^2+(3-1)^2=8 \longrightarrow r^2=8$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es ecuación es:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=8$$

Derivamos implícitamente la ecuación respecto de la variable x:

$2(x-1)+2(y-1)y'=0 \;\longrightarrow\; y'=-\dfrac{2(x-1)}{2(y-1)}=-\dfrac{x-1}{y-1}$

El valor de y' en el punto $A(3, 3)$ es $y'=-\dfrac{3-1}{3-1}=-1$. Así, la pendiente de la recta tangente es -1.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-3=-1\cdot(x-3) \;\longrightarrow\; y=-x+6$

ACTIVIDADES FINALES

30. Página 204

$$T.V.M.([-1,2])=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

$$T.V.M.([-1,3])=\frac{f(3)-f(-1)}{3+1}=\frac{5+3}{4}=2$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-4+3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=-2$$

31. Página 204

$$T.V.M.([1,6])=\frac{f(6)-f(1)}{6-1}=\frac{\frac{3}{8}-1}{5}=-\frac{1}{8}$$

$$T.V.M.([1,4])=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{(1+h)+2}-\frac{3}{1+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3}-\cancel{3}-\cancel{h}}{\cancel{h}(3+h)}=-\frac{1}{3}$$

32. Página 204

$$f(x)=\ln(x+b)$$

$$T.V.M.([0,2])=\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{\ln(2+b)-\ln b}{2}=\frac{\ln\left(\frac{2+b}{b}\right)}{2}=\ln 2 \;\rightarrow\; b=\frac{2}{3}$$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(0+h+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(0+\frac{2}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3h+2}{2}\right)}{h}=\frac{3}{2}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(2+h+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(2+\frac{2}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3h+8}{8}\right)}{h}=\frac{3}{8}$$

33. Página 204

$$T.V.M.([0,6])=\frac{s(6)-s(0)}{6}=\frac{116-2}{6}=19$$

34. Página 204

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio *x* es: $f(x)=\pi x^2$

$$T.V.M.([1,3])=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9\pi-\pi}{2}=4\pi \qquad T.V.M.([3,5])=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{25\pi-9\pi}{2}=8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la variación de la superficie no permanece constante.

35. Página 204

a) $T.V.M.([1,7])=\frac{f(7)-f(1)}{7-1}=\frac{245-5}{6}=40$

$T.V.M.([1,5])=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{125-5}{4}=30$

b) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(1+h)^2-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10\cancel{h}+5h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=10$

36. Página 204

a) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

b) $f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{h}=-2$

c) $f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^3-(-2)^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-6h^2+12h}{h}=12$

d) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-3(2+h)+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=1$

e) $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\left(\frac{1}{2}+h\right)^2+2-\frac{11}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+3h}{h}=3$

f) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h-2)^2+3-(-1)^2-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h}=-2$

g) $f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(-1+h)^2}{2}-\frac{(-1+h)^3}{3}+4(-1+h)-5-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-4-5\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-2h^2+9h+12)}{6h}=2$

37. Página 204

a) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah+\cancel{b}-\cancel{b}}{h}=a$

b) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(0+h)^2+b(0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah^2+bh}{h}=\lim_{h\to 0}(ah+b)=b$

c) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah^2+bh+\cancel{c}-\cancel{c}}{h}=\lim_{h\to 0}(ah+b)=b$

d) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah^3+bh^2+ch+\cancel{d}-\cancel{d}}{h}=\lim_{h\to 0}(ah^2+bh+c)=c$

38. Página 204

a) $f'(x)=4x+4x^3\rightarrow f'(2)=40$

b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\rightarrow f'(2)=-\frac{1}{4}$

c) $f'(x)=-\frac{2}{x^3}\rightarrow f'(2)=-\frac{1}{4}$

d) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}$

e) $f'(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\geq -3 \\ -x-3 & \text{si } x<-3 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x>-3 \\ -1 & \text{si } x<-3 \end{cases} \rightarrow f'(2)=1$

f) $f'(x)=\begin{cases} x-2 & \text{si } x\geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x<2 \end{cases}$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-2}{h}=1$$

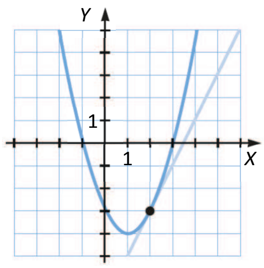
$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(2+h)+2}{h}=-1$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales; por tanto, la función no es derivable en $x = 2$.

39. Página 204

$f(2)=-3$ $\quad\quad f'(x)=2x-2\rightarrow f'(2)=2$

La ecuación de la recta tangente es: $y+3=2(x-2)\rightarrow y=2x-7$



40. Página 204

$f(1)=1-a+6=2\rightarrow a=5$

$f'(x)=2x-5\rightarrow f'(1)=-3$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=-3(x-1)\rightarrow y=-3x+5$

41. Página 204

a) $f(-1)=-1$ $\quad\quad f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}\rightarrow f'(-1)=-\frac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y+1=-\frac{1}{2}(x+1)\rightarrow y=-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$

b) $f(0)=\ln 1=0$ $\quad\quad f'(x)=\frac{3}{3x+1}\rightarrow f'(0)=3$

La ecuación de la recta tangente es: $y=3x$

c) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ $\quad\quad f'(x)=-senx\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow y=-x+\frac{\pi+4}{2}$

d) $f(1)=2$ $\quad\quad f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\rightarrow y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$

42. Página 204

$f(-1) = \ln 1 = 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2x+3} \to f'(-1) = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = x + 1$

La ecuación de la recta normal es: $y = -x - 1$

43. Página 204

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = e^0 - 3 = -2$ $\qquad f'(x) = 4e^{4x+2} \to f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 2 = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \to y = 4x$

44. Página 204

$\dfrac{x-2}{x+1} = 0 \to x = 2$ es el punto de corte de *f* con el eje de abscisas.

$f(2) = 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} \to f'(2) = \dfrac{1}{3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{1}{3}(x-2) \to y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{3}$

La ecuación de la recta normal es: $y = -3(x-2) \to y = -3x + 6$

45. Página 204

$f(3) = \sqrt{4} = 2$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x(4-x)+(x^2-5)}{2(4-x)^2\sqrt{\dfrac{x^2-5}{4-x}}} = \dfrac{-x^2+8x-5}{2(4-x)^2\sqrt{\dfrac{x^2-5}{4-x}}} \to f'(3) = \dfrac{10}{4}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = \dfrac{10}{4}(x-3) \to y = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{11}{2}$

46. Página 204

$x^3 + x^2 - 6x + 1 = 1 \to x^3 + x^2 - 6x = 0 \to x(x^2 + x - 6) = 0 \to x = 0, x = 2, x = -3$

Tenemos que hallar las rectas que pasan por el punto (2, 1): $f'(x) = 3x^2 + 2x - 6 \to f'(2) = 10$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 10(x-2) \to y = 10x - 19$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\dfrac{1}{10}(x-2) \to y = -\dfrac{1}{10}x + \dfrac{6}{5}$

47. Página 204

r pasa por $A = (1, f(1) = 4)$ y $B = (3, f(3) = 8) \longrightarrow$ Pendiente $= \dfrac{8-4}{3-1} = 2$

$f'(x) = 2x - 2 = 2 \to x = 2 \to f(2) = 5$

La ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a *r* es: $y - 5 = 2(x-2) \to y = 2x + 1$

48. Página 205

$$f'(x)=\frac{-2}{x^2}\rightarrow\frac{-2}{x^2}=-2\rightarrow x^2=1\rightarrow\begin{cases}x=\ \ 1\\x=-1\end{cases}$$

$f(1)=2$ $y\rightarrow 2=-2+4\rightarrow (1, 2)$ es un punto de la recta.

$f(-1)=2$ $y\rightarrow -2\neq(-2)\cdot(-1)+4\rightarrow (-1, -2)$ no es un punto de la recta.

Por tanto, y puede ser tangente a la función f en el punto (1, 2).

49. Página 205

r pasa por $A=(2, f(2)=0)$ y $B=(e+1, f(e+1)=1)\rightarrow$ Pendiente $=\frac{1-0}{e+1-2}=\frac{1}{e-1}$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{1}{e-1}\rightarrow x=e\rightarrow f(e)=\ln(e-1)$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-\ln(e-1)=\frac{1}{e-1}(x-e)\rightarrow y=\frac{x}{e-1}-\frac{e}{e-1}+\ln(e-1)$$

50. Página 205

a) $f'(x)=2x-2$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada, entonces:

$$f'(x)=2x-2=4\rightarrow x=3 \qquad f(3)=3\rightarrow P=(3, 3)$$

Así, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-3=4(x-3)\rightarrow y=4x-9$$

b) Resolvemos el sistema formado por la parábola y la recta:

$$\begin{cases}y=x^2-2x\\y=4x-9\end{cases}\rightarrow x^2-2x=4x-9\rightarrow x^2-6x+9=0\rightarrow x=3$$

Es decir, únicamente se cortan en un punto.

51. Página 205

$f'(x)=2x+b\rightarrow f'(1)=2+b$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y=x$.

Si la recta tangente es paralela a ella, entonces: $2+b=1\rightarrow b=-1$

Así, la ecuación de la función es de la forma: $y=x^2-x+c$

Si pasa por el punto (1, 1), tenemos que: $1=1-1+c\rightarrow c=1$

Luego la ecuación de la parábola es: $y=x^2-x+1$

52. Página 205

a) La recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas ⟶ $m = tg\ 45^o = 1$

Buscamos los puntos que verifican que $f'(x) = 1$:

$$2x - 2 = 1 \to x = \frac{3}{2} \to f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3 \cdot 2}{2} - 3 = -\frac{15}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y + \frac{15}{4} = x - \frac{3}{2} \to y = x - \frac{21}{4}$

b) La recta tangente es horizontal ⟶ Buscamos los puntos que verifican $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2x - 2 \ \longrightarrow\ 2x - 2 = 0 \to x = 1 \to f(1) = -4$$

La ecuación de la recta tangente es $y = -4$.

53. Página 205

La recta tangente es paralela a la recta $y = 2x - 123$ ⟶ Buscamos los puntos que verifican $f'(x) = 2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \to 3x^2 - 1 = 2 \to x^2 = 1 \to \begin{cases} x = \ \ 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

- Si $x = 1 \to f(1) = 4$ y la ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 2(x - 1) \to y = 2x + 2$
- Si $x = -1 \to f(1) = 4$ y la ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 2(x + 1) \to y = 2x + 6$

54. Página 205

Para que las rectas tangentes sean paralelas, debe ocurrir que $f'(1) = f'(2)$.

$$f'(x) = 3kx^2 - 2x + 7k \to \begin{cases} f'(1) = 3k - 2 + 7k \\ f'(2) = 12k - 4 + 7k \end{cases} \to 9k = 2 \to k = \frac{2}{9}$$

Sustituyendo este valor ⟶ $\begin{cases} f'(1) = \frac{2}{9} \\ f'(2) = \frac{2}{9} \end{cases} \to \begin{cases} f(1) = \frac{-155}{9} \\ f(2) = \frac{-154}{9} \end{cases}$

- Si $x = 1$, la ecuación de la recta tangente es: $y + \frac{155}{9} = \frac{2}{9}(x - 1) \to y = \frac{2}{9}x - \frac{157}{9}$
- Si $x = -1$, la ecuación de la recta tangente es: $y + \frac{154}{9} = \frac{2}{9}(x - 2) \to y = \frac{2}{9}x - \frac{158}{9}$

55. Página 205

$f(3) = -9a + 11 \qquad f'(x) = -2ax + 5 \to f'(3) = -6a + 5$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3) \to y = (-6a + 5)x + 9a - 4$

La recta pasa por el punto (5, 0) ⟶ $(-6a + 5)5 + 9a - 4 = 0 \to -21a = -21 \to a = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 3) \to y = -x + 5$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = x - 3 \to y = x - 1$

56. Página 205

a) $f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+m}}$

Para que sea paralela a $y=2x-3$ en $x=2$ $\rightarrow f'(2)=2$

$f'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{4+m}}=2\rightarrow 1=4+m\rightarrow m=-3$

El punto de tangencia es: $f(2)=\sqrt{4-3}=1\rightarrow(2,1)$

b) Si la recta tangente pasa por $P(a, 5)$ y $Q(1, 1)$ $\longrightarrow$ Pendiente $=\dfrac{5-1}{a-1}=\dfrac{4}{a-1}$

Si $f(x)$ pasa por $P(a, 5)$ $\rightarrow$ $f(a)=\sqrt{a^2+m}=5$

$f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+m}}\rightarrow f'(a)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+m}}=\dfrac{4}{a-1}$ Sustituyendo el valor de $f(a)=5$ en $f'(a)$:

$\dfrac{a}{5}=\dfrac{4}{a-1}\rightarrow a(a-1)=4\cdot 5\rightarrow a^2-a-20=0\rightarrow\begin{cases}a=5\\a=-4\end{cases}$

Sustituyendo ahora en $f(a)$ los valores de a:

- Si $a=5\rightarrow f(5)=\sqrt{5^2+m}=5\rightarrow 5^2+m=5^2\rightarrow m=0$
- Si $a=-4\rightarrow f(-4)=\sqrt{(-4)^2+m}=5\rightarrow(-4)^2+m=5^2\rightarrow m=9$

57. Página 205

$f(2)=3\qquad f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\rightarrow f'(2)=-2$

La ecuación de la recta tangente es: $y-3=-2(x-2)\rightarrow y=-2x+7$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y: $x=0\rightarrow y=7$
- Con el eje X: $y=0\rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es: $\dfrac{\frac{7}{2}\cdot 7}{2}=\dfrac{49}{4}$ u²

58. Página 205

$f(2)=\sqrt{2^2+5}=3\qquad f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}\rightarrow f'(2)=\dfrac{2}{3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-3=\dfrac{2}{3}(x-2)\rightarrow y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y: $x=0\rightarrow y=\dfrac{5}{3}$
- Con el eje X: $y=0\rightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es: $\dfrac{\left(0-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\frac{5}{3}}{2}=\dfrac{25}{12}$ u²

59. Página 205

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3+\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=3+\ln 1=3$$

$$f'(x)=\left(\frac{(tg\,x)'}{tg\,x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x\cdot tg\,x}=\frac{1}{\cos x\cdot sen\,x}\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{4}{2}=2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y-3=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\rightarrow y=2x+\frac{6-\pi}{2}$

Puntos de corte:

- Con el eje Y: $x=0\rightarrow y=\frac{6-\pi}{2}$
- Con el eje X: $y=0\rightarrow x=\frac{\pi-6}{4}$

$$\text{Área}=\frac{\left(0-\frac{\pi-6}{4}\right)\cdot\left(\frac{6-\pi}{2}\right)}{2}=\frac{(6-\pi)^2}{16}\ \text{u}^2$$

60. Página 205

$f(-2)=3$ $\qquad f(5)=0$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\le 0\\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(-2)=-4\\ f'(5)=\frac{1}{6}\end{cases}$$

Así, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$x=-2\ \rightarrow\ y-3=-4(x+2)\rightarrow y=-4x-5$

$x=5\ \rightarrow\ y=\frac{1}{6}(x-5)\rightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}$

Puntos de corte:

- Entre las dos rectas: $-4x-5=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}\rightarrow\frac{25}{6}x=\frac{-25}{6}\rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$
- La primera recta con el eje X: $y=0\rightarrow x=\frac{-5}{4}$
- La segunda recta con el eje X: $y=0\rightarrow x=5$

$$\text{Área}=\frac{\left(5-\left(-\frac{5}{4}\right)\right)\cdot(0-(-1))}{2}=\frac{25}{8}\ \text{u}^2$$

61. Página 205

La función corta al eje de abscisas $\rightarrow$ $y=0\rightarrow f(x)=(x+1)\cdot e^x=0\rightarrow\begin{cases}x+1=0\\ e^x\neq 0\quad\forall x\end{cases}\rightarrow x=-1$

Así, la función corta al eje de abscisas en $P(-1, 0)$.

$$f'(x)=e^x+(x+1)\cdot e^x=e^x\cdot(2+x)\rightarrow f'(-1)=\frac{1}{e}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y=\frac{1}{e}(x+1)$

La ecuación de la recta normal es: $y=-e\cdot(x+1)\rightarrow y=-ex-e$

Corte de la recta tangente con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=\dfrac{1}{e}$

Corte de la recta normal con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=-e$

$$\text{Área}=\frac{\left(\frac{1}{e}-(-e)\right)\cdot(0-(-1))}{2}=\frac{1+e^2}{2e}\ \text{u}^2$$

62. Página 205

f(*x*) y *g*(*x*) pasan por *P*(−1, 2) ⟶ $f(-1)=1-a+b=2 \qquad g(-1)=c=2$

Tienen la misma recta tangente en *P* ⟶ $f'(-1)=g'(-1)$

$f'(x)=2x+a\rightarrow f'(-1)=-2+a \qquad g'(x)=-2\cdot e^{-(x+1)}\rightarrow g'(-1)=-2$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases}-2+a=-2\\ 1-a+b=2\rightarrow a=0, b=1, c=2\\ c=2\end{cases}$$

63. Página 205

$x=3\rightarrow 9+16y^2-16=0\rightarrow 16y^2=7\rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ⟶ Se considera el punto $\left(3,\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$$2x+32yy'=0\rightarrow 32yy'=-2x\rightarrow y'=-\frac{x}{16y}$$

$$y'\left(3,\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{3}{16\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}=-\frac{3}{4\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{\sqrt{7}}{4}=-\frac{3\sqrt{7}}{28}(x-3)\rightarrow y=\frac{3\sqrt{7}}{28}x+\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

64. Página 205

$x=4\rightarrow 64-9y^2-36=0\rightarrow 9y^2=28\rightarrow y=\pm\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ ⟶ Se considera el punto $\left(4,\dfrac{2\sqrt{7}}{3}\right)$.

$$8x-18yy'=0\rightarrow -18yy'=-8x\rightarrow y'=\frac{4x}{9y}$$

$$y'\left(4,\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{16}{9\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}}=\frac{8}{3\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{21}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{8\sqrt{7}}{21}(x-4)\rightarrow y=\frac{8\sqrt{7}}{21}x-\frac{6\sqrt{7}}{7}$$

65. Página 205

La circunferencia en cuestión tiene ecuación: $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \rightarrow x^2+y^2=5$

$y^2=5-x^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{5-x^2}$, donde: $\begin{cases} f(x)= \sqrt{5-x^2} \\ g(x)=-\sqrt{5-x^2} \end{cases}$

En primer lugar, para *f*(*x*):

$f(1)=2 \qquad f'(x)=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{5-x^2}} \rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

En segundo lugar, para *g*(*x*):

$g(1)=-2 \qquad g'(x)=\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} \rightarrow g'(1)=\frac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y+2=\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

Calculamos el punto de corte de las dos rectas tangentes:

$-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \rightarrow x=5 \rightarrow (5,0)$

Calculamos el punto de corte de las rectas tangentes a *f*(*x*) y *g*(*x*) con el eje de ordenadas:

$x=0 \rightarrow y=0+\frac{5}{2}=\frac{5}{2} \rightarrow \left(0,\frac{5}{2}\right) \qquad x=0 \rightarrow y=0-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2} \rightarrow \left(0,-\frac{5}{2}\right)$

$$A=\frac{\left(\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\cdot 5}{2}=\frac{25}{2}\ \text{u}^2$$

66. Página 205

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

- La pendiente de la recta tangente es nula $\rightarrow$ $f'(0)=c=0 \rightarrow c=0$

  La función pasa por el punto (0, 2) $\rightarrow$ $f(0)=2 \rightarrow d=2$
- La pendiente de esta recta tangente es 1 $\rightarrow$ $f'(1)=1 \rightarrow 3a+2b=1$

  $x-y-2=0 \xrightarrow{x=1} y=-1$ $\rightarrow$ La función pasa por el punto (1, –1) $\rightarrow$ $f(1)=-1 \rightarrow a+b+2=-1 \rightarrow a+b=-3$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores:

$\begin{cases} 3a+2b=1 \\ a+b=-3 \end{cases} \rightarrow a=7, b=-10 \rightarrow f(x)=7x^3-10x^2+2$

67. Página 205

a) $f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=f'(1^-)$

b) $f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty \qquad f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{h}}$

No existe la derivada por la izquierda porque la raíz cuadrada no está definida para valores negativos.

68. Página 205

a) $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x<3\\ x-4 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

La función es continua en $x=3$, porque $f(3^-)=f(3^+)=f(3)=-1$.

$$f'(3^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-1+1}{h}=1$$

$$f'(3^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(3+h)+2+1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

b) $f(x)=\begin{cases}x+9-x^2 & \text{si } x<-3\\ x-9+x^2 & \text{si } -3\leq x\leq 3\\ x+9-x^2 & \text{si } x>3\end{cases}$

La función es continua en $x=3$: $f(3^-)=f(3^+)=f(3)=3$

$$f'(3^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3+h+9-(3+h)^2-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-5h}{h}=-5$$

$$f'(3^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h+\cancel{3}-9+(h+3)^2-\cancel{3}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+7h}{h}=7$$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

69. Página 205

$f(x)=\begin{cases}4-x-x^2 & \text{si } x\leq -2\\ 3x+4 & \text{si } x>-2\end{cases}$

$$f'(-2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3\cdot(-2+h)+4-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h-4}{h}=-\infty\rightarrow \text{No existe.}$$

$$f'(-2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-(-2+h)-(-2+h)^2-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h-h^2}{h}=3$$

70. Página 205

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 5 & \text{si } x=1\end{cases}$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1+h}{1+h-1}-5}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-4h}{h^2}=+\infty=f'(1^-)$$

No existen las derivadas laterales.

71. Página 206

a) Si $x>0$: $f(x)=cosx \rightarrow$ Función trigonométrica continua y derivable en $(0,+\infty)$.

Si $x<0$: $f(x)=-x^2+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.

Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} cosx=1 \qquad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+1)=1 \qquad f(0)=1$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x<0\\ -senx & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{cases}$$

Las derivadas laterales, existen y son iguales, entonces *f*(*x*) derivable en $\mathbb{R}$.

b) Si $x>0$: $f(x)=-x^3+2x+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(0,+\infty)$.

Si $x<0$: $f(x)=2\cdot senx+1 \rightarrow$ Función trigonométrica continua y derivable en $(-\infty,0)$.

Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^3+2x+1)=1 \qquad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2\cdot senx+1)=1 \qquad f(0)=1$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}2\cdot cosx & \text{si } x<0\\ -3x^2+2 & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=2\\ f'(0^+)=2\end{cases}$$

Las derivadas laterales, existen y son iguales, entonces *f*(*x*) derivable en $\mathbb{R}$.

c) Si $x>2$: $f(x)=7-2^x \rightarrow$ Función exponencial continua y derivable en $(2,+\infty)$.

Si $x<2$: $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-5} \rightarrow$ Función racional continua y derivable en $(-\infty,2)$.

Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=2$:

$f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}(7-2^x)=3 \qquad f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{2x-5}=-5$

Así, la función no es continua en $x=2$ y, por tanto, tampoco será derivable en ese punto.

Es decir, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

72. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2} & \text{si } -2\le x<1\\ 1-3\sqrt{2x-1} & \text{si } 1\le x\le 5\end{cases} \qquad \text{Dom}\left(\frac{x^2+2x-3}{1-x^2}\right)=\mathbb{R}-\{-1,1\} \qquad \text{Dom}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

- Si $x\in(-2,-1)\cup(-1,1) \rightarrow f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2} \rightarrow$ Función racional continua y derivable.
- Si $x\in(1,\ 5) \rightarrow f(x)=1-3\sqrt{2x-1} \rightarrow$ Función radical continua y derivable.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=-1$:

$f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{-(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-(x+3)}{x+1}=+\infty \qquad f(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-(x+3)}{x+1}=-\infty$

Así, la función no es continua y, por tanto, no es derivable en $x=-1$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=1$:

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=-2 \qquad f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+3)}{x+1}=-2 \qquad f(1)=-2$$

Así, la función es continua en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x\in[-2,\,-1)\cup(-1,\,1)\\ \dfrac{-3}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x\in(1,\,5]\end{cases} \to \begin{cases}f'(1^-)=\dfrac{1}{2}\\ f'(1^+)=-3\end{cases} \to \text{La función no es derivable en } x=1.$$

73. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+5x+6 & \text{si} \quad x\le -1\\ 2-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -1<x<2\\ \dfrac{5}{4}+2^{-x} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

- Si $x<-1 \to f(x)=2x^2+5x+6 \to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,-1)$.
- Si $-1<x<0$ y $0<x<2 \to f(x)=2-\dfrac{1}{x} \to$ Función continua y derivable en $(-1,\,0)\cup(0,\,2)$.
- Si $x>2 \to f(x)=\dfrac{5}{4}+2^{-x} \to$ Función exponencial continua y derivable en $(2,+\infty)$.
- Si $x=-1$:

$$f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=3 \qquad f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}\left(2x^2+5x+6\right)=3 \qquad f(-1)=3$$

Así, la función es continua en $x=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases}4x+5 & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1<x<0 \text{ o } 0<x<2\\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x>2\end{cases} \to \begin{cases}f'(-1^-)=1\\ f'(-1^+)=1\end{cases} \to \text{La función es derivable en } x=-1.$$

- Si $x=0$:

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty \qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Así, la función no es continua en $x=0$; por tanto, no es derivable en este punto.

- Si $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{5}{4}+2^{-x}\right)=\frac{3}{2} \qquad f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2} \qquad f(2)=\frac{3}{2}$$

Así, la función es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}4x+5 & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1<x<0 \text{ o } 0<x<2\\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x>2\end{cases} \to \begin{cases}f'(2^-)=\dfrac{1}{4}\\ f'(2^+)=\dfrac{-\ln 2}{4}\end{cases} \to \text{La función no es derivable en } x=2.$$

En resumen, la función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$.

74. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}7-2x+6 & \text{si } x\geq 3\\ 7+2x-6 & \text{si } x<3\end{cases}=\begin{cases}13-2x & \text{si } x\geq 3\\ 1+2x & \text{si } x<3\end{cases}$$

- Si $x<3$: $f(x)=13-2x\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 3)$
- Si $x>3$: $f(x)=1+2x\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3, +\infty)$
- Si $x=3$:

$$f(3^-)=\lim_{x\to 3^-}(1+2x)=7 \qquad f(3^+)=\lim_{x\to 3^+}(13-2x)=7 \qquad f(3)=7$$

Por tanto, la función es continua en $x=3$.

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x>3\\ 2 & \text{si } x<3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(3^+)=-2\\ f'(3^-)=2\end{cases}$$

Por tanto, la función no es derivable en $x=3$.

75. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}2x-4+x & \text{si } x\geq 2\\ -2x+4+x & \text{si } x<2\end{cases}=\begin{cases}3x-4 & \text{si } x\geq 2\\ -x+4 & \text{si } x<2\end{cases}$$

- Si $x<2$: $f(x)=-x+4\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 2)$
- Si $x>2$: $f(x)=3x-4\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(2, +\infty)$
- Si $x=2$:

$$f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}(-x+4)=2 \qquad f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}(3x-4)=2 \qquad f(2)=2$$

Entonces la función es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x>2\\ -1 & \text{si } x<2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(2^+)=3\\ f'(2^-)=-1\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen pero son diferentes, entonces la función no es derivable en $x=2$.

76. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}x^3+x+1 & \text{si } x\geq 0\\ -x^3+x+1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

- Si $x<0$: $f(x)=-x^3+x+1\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 0)$
- Si $x>0$: $f(x)=x^3+x+1\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(2, +\infty)$
- Si $x=0$:

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^3+x+1\right)=1 \qquad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^3+x+1\right)=1 \qquad f(0)=1$$

Entonces la función es continua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x>0\\ -3x^2+1 & \text{si } x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(0^+)=1\\ f'(0^-)=1\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces la función es derivable en $x=0$.

- Por otra parte:

$$f(x)=|x|^3+|x|+1=\begin{cases}-x^3-x+1 & \text{si } x<0\\ x^3+x+1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

$f(0^+)=f(0^-)=f(0)\longrightarrow$ Continua en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x>0\\ -3x^2-1 & \text{si } x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(0^+)=1\\ f'(0^-)=-1\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen pero son diferentes, luego la función no es derivable en $x=0$.

77. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\leq 0\\ x^2+a & \text{si } x>0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar debe ser continua.

La función es continua en $x=0$ si los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0)=\cos 0=1$.

$$\left.\begin{array}{l}f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+a)=a\end{array}\right\}\rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)\rightarrow a=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\leq 0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen} x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } x>0\end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=0$ si $a=1$.

78. Página 206

a) • Si $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,-3)\longrightarrow f(x)=\dfrac{x}{x+4}\longrightarrow$ Función racional continua y derivable.

- Si $x\in(-3,+\infty)\longrightarrow f(x)=x^2+ax\longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable.
- Si $x=-4$:

  No es continua ni derivable en $x=-4$, ya que no pertenece al dominio.
- Si $x=-3$:

$$\left.\begin{array}{l}f(-3^-)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x}{x+4}=-3\\ f(-3^+)=\lim\limits_{x\to -3^+}(x^2+ax)=9-3a\end{array}\right\}\rightarrow f(-3^-)=f(-3^+)=f(3)\rightarrow 9-3x=-3\rightarrow a=4$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si } x>-3\\ \dfrac{4}{(x+4)^2} & \text{si } x<-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(-3^+)=-2\\ f'(-3^-)=4\end{cases}\rightarrow f'(3^+)\neq f'(3^-)$$

Entonces no existe ningún valor de a para el cual la función es derivable en $x=-3$.

b) • Si $x \in (-\infty, 1) \rightarrow f(x) = 2x + e^{1-x} \rightarrow$ Función exponencial continua y derivable.

• Si $x \in (1, +\infty) \rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+m} \rightarrow$ Función radical continua y derivable $\forall\, m \geq -x$.

• Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + e^{1-x}) = 3 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1 + \sqrt{x+m}) = 1 + \sqrt{1+m} \end{array}\right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) \rightarrow 3 = 1 + \sqrt{1+m} \rightarrow m = 3$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - e^{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^+) = 1 \\ f'(1^-) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow f'(1^+) \neq f'(1^-)$$

Entonces no existe ningún valor de *a* para el cual la función es derivable en $x = 1$.

79. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = 3 \\ f(4^+) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 + mx + n) = 16 + 4m + n \end{array}\right\} \rightarrow f(4^-) = f(4^+) = f(4) \rightarrow 4m + n = -13$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$, las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x + m & \text{si } x > 4 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(4^-) = -\dfrac{4}{3} \\ f(4^+) = 8 + m \end{array}\right\} \rightarrow 8 + m = -\frac{4}{3} \rightarrow m = -\frac{28}{3}$$

Así: $16 + 4 \cdot \left(-\dfrac{28}{3}\right) + n = 3 \rightarrow\rightarrow n = 3 + \dfrac{112}{3} - 16 \rightarrow n = \dfrac{73}{3}$.

80. Página 206

$$f(x) = \begin{cases} 1 + a\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) • Si $x \in (0, +\infty) \rightarrow f(x) = 1 + a\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) \rightarrow$ Producto de funciones continuas y derivables en $(0, +\infty)$.

• Si $x \in (-\infty, 0) \rightarrow f(x) = (x-1)^2 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 0)$.

• Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1)^2 = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + a\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1)\right) = 1 + a \cdot 0 = 1 \;\; \forall a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 1 \;\; \forall a \in R$$

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a \cdot (\ln(x+1) + 2)}{2 \cdot \sqrt{x+1}} & \text{si } x > 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Para que la función sea derivable: $f'(0^+) = f'(0^-) \rightarrow \begin{cases} f'(0^+) = \dfrac{a \cdot (\ln(1) + 2)}{2\sqrt{1}} = \dfrac{2a}{2} \\ f'(0^-) = -2 \end{cases} \rightarrow a = -2$

81. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}\ln(e+\operatorname{sen}x) & \text{si } x<0\\ x^3+ax+b & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(e+\operatorname{sen}x)=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+ax+b)=b\end{array}\right\}\to f(0^-)=f(0^+)=f(0)\to b=1$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{e+\operatorname{sen}x} & \text{si } x<0\\ 3x^2+a & \text{si } x>0\end{cases}\;\to\;\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\dfrac{1}{e}\\ f(0^+)=a\end{array}\right\}\to a=\frac{1}{e}$$

82. Página 206

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & \text{si } x<0\\ a^2-\operatorname{sen}x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

- Si $x<0$: $f(x)=ax^2+bx+1\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $x>0$: $f(x)=a^2-\operatorname{sen}x\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(0,+\infty)$.
- Si $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+bx+1)=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a^2-\operatorname{sen}x)=a^2\end{array}\right\}\;\to\; f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\;\to\; a^2=1\to a=\pm 1$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & \text{si } x<0\\ -\cos x & \text{si } x>0\end{cases}\;\to\;\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=b\\ f'(0^+)=-\cos 0=-1\end{array}\right\}\to b=-1$$

83. Página 206

a) • Si $x<\pi$: $f(x)=e^{a(x-\pi)}\to$ Función exponencial continua y derivable en $(-\infty,\ \pi)$.

• Si $x>\pi$: $f(x)=2a+b\cdot\operatorname{sen}(x-\pi)\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(\pi,+\infty)$.

• Si $x=\pi$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi^-)=\lim\limits_{x\to \pi^-}e^{a(x-\pi)}=1\\ f(\pi^+)=\lim\limits_{x\to \pi^+}(2a+b\cdot\operatorname{sen}(x-\pi))=2a\end{array}\right\}\to 2a=1\to a=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{\left(\frac{x-\pi}{2}\right)} & \text{si } x<\pi\\ b\cdot\cos(x-\pi) & \text{si } x>\pi\end{cases}\;\to\;\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-)=\dfrac{1}{2}\\ f'(\pi^+)=b\cdot\cos 0=b\end{array}\right\}\to b=\frac{1}{2}$$

b) • Si $x<-1$: $f(x)=(x+b)^2\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,-1)$.

• Si $x>-1$: $f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{x+2}}\to$ Función radical continua y derivable en $(-1,+\infty)$.

• Si $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-1^-\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+b)^2=1-2b+b^2 \\ f\left(-1^+\right)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{ax}{\sqrt{x+2}}=-a \end{array}\right\}\to -a=1-2b+b^2$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2b & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{a(x+4)}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } x>-1 \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} f'\left(-1^-\right)=-2+2b \\ f'\left(-1^+\right)=\dfrac{3a}{2} \end{array}\right\}\to \dfrac{3a}{2}=-2+2b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -a=1-2b+b^2 \\ 3a=-4+4b \end{cases} \to a=-\frac{16}{9} \text{ y } b=-\frac{1}{3} \text{ o } a=0 \text{ y } b=1$$

84. Página 206

a) $f(x)=\begin{cases} 2e^x+x+a & \text{si } x\le 0 \\ x^2+b(x+1) & \text{si } 0<x\le 2 \\ x^4-3a & \text{si } x>2 \end{cases}$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

• Si $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2e^x+x+a\right)=2+a \\ f\left(0^+\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+b(x+1)\right)=b \end{array}\right\}\to 2+a=b$$

• Si $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(2^-\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+b\cdot(x+1)\right)=4+3b \\ f\left(2^+\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^4-3a\right)=16-3a \end{array}\right\}\to 16-3a=4+3b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2+a=b \\ 16-3a=4+3b \end{cases} \to a=1, b=3$$

• Comprobamos la derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} 2e^x+1 & \text{si } x<0 \\ 2x+3 & \text{si } 0<x<2 \\ 4x^3 & \text{si } x>2 \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} f'\left(0^-\right)=3 \\ f'\left(0^+\right)=3 \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} f'\left(2^-\right)=7 \\ f'\left(2^+\right)=32 \end{array}\right\}$

Entonces *f* es derivable en $x=0$, pero no es derivable en $x=2$.

b) $f(x)=\begin{cases} -x^3+7x+c & \text{si } x\le -2 \\ ax^2+3x+11 & \text{si } -2<x\le \frac{3}{2} \\ 18\sqrt{2x+1}+b & \text{si } x>\frac{3}{2} \end{cases}$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

• Si $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-2^-\right)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(-x^3+7x+c\right)=c-6 \\ f\left(-2^+\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(ax^2+3x+11\right)=4a+5 \end{array}\right\}\to 4a-c+11=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+7 & \text{si } x<-2\\ 2ax+3 & \text{si } -2<x<\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{18}{\sqrt{2x+1}} & \text{si } x>\dfrac{3}{2}\end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(-2^-)=-5\\ f'(-2^+)=3-4a\end{array}\right\} \rightarrow -5=3-4a \rightarrow a=2$$

Así, $8+11=c \rightarrow c=19$

- Si $x=\dfrac{3}{2}$ (sustituyendo los valores de *a* y *c*):

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{3}{2}^-\right)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}\left(2x^2+3x+11\right)=20\\ f\left(\dfrac{3}{2}^+\right)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\left(18\sqrt{2x+1}+b\right)=36+b\end{array}\right\} \rightarrow 20=36+b \rightarrow b=-16$$

- Comprobamos que es derivable:

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+7 & \text{si } x<-2\\ 4x+3 & \text{si } -2<x<\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{18}{\sqrt{2x+1}} & \text{si } x>\dfrac{3}{2}\end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f'\left(\dfrac{3}{2}^-\right)=9\\ f'\left(\dfrac{3}{2}^+\right)=9\end{array}\right\} \rightarrow \text{ Es derivable en } x=\dfrac{3}{2}.$$

85. Página 206

a) Cada rama es continua y derivable en el dominio en el que se las ha definido. Comprobamos en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+ax+ab\right)=ab\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2(x+2)=1\end{array}\right\} \rightarrow ab=1$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{(x+2)\cdot\ln 2}=\dfrac{1}{x\cdot\ln 2+\ln 4} & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0^-)=a\\ f'(0^+)=\dfrac{1}{\ln 4}\end{array}\right\} \rightarrow a=\dfrac{1}{\ln 4} \rightarrow b=\ln 4$$

b) $f(3)=\log_2 5$

$$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln 2+\ln 4} \rightarrow f'(3)=\frac{1}{\ln 8+\ln 4}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y-\log_2 5=\dfrac{1}{\ln 8+\ln 4}\cdot(x-3)$

La recta corta con los ejes en:

- Eje *Y:* $x=0 \rightarrow y=\dfrac{-3}{\ln 8+\ln 4}+\log_2 5\approx 1{,}456$
- Eje *X:* $y=0 \rightarrow x=-\log_2 5\cdot(\ln 8+\ln 4)+3\approx -5{,}047$

Área del triángulo $=\dfrac{[0-(-5{,}047)]\cdot 1{,}456}{2}\approx 3{,}674$ u^2

86. Página 206

a) $\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

b) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-9-(x^2-9)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}=2x$

c) $\lim_{h\to 0}\frac{1-2(x+h)^3-(1-2x^3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h\cdot(3x^2+3xh+h^2)}{h}=-6x^2$

d) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-7(x+h)^2-(x^3-7x^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(3x^2+3xh+h^2-7h-14x)}{h}=3x^2-14x$

87. Página 206

a) $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-5}{x+h}+\frac{5}{x}}{h}=-5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{5}{x^2}$

b) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2\cdot(x+h)-(x^2+2x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+2h+h^2}{h}=2x+2$

d) $\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2-ax^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ahx+ah^2}{h}=2ax$

88. Página 206

a) $f'(x)=4x^3$ $\quad f''(x)=12x^2$ $\quad f'''(x)=24x$

$f^{IV}(x)=24$ $\quad f^{n)}(x)=0\ \ \forall n\geq 5$

b) $f'(x)=f^{4k+1)}(x)=\cos x$ $\quad f''(x)=f^{4k+2)}(x)=-\operatorname{sen} x$ $\quad f'''(x)=f^{4k+3)}(x)=-\cos x$

$f^{IV}(x)=f^{4k)}(x)=\operatorname{sen} x$ $\quad$ Para $k\in\mathbb{Z}$

c) $f'(x)=f^{4k+1)}(x)=-\operatorname{sen} x$ $\quad f''(x)=f^{4k+2)}(x)=-\cos x$ $\quad f'''(x)=f^{4k+3)}(x)=\operatorname{sen} x$

$f^{IV}(x)=f^{4k)}(x)=\cos x$ $\quad$ Para $k\in\mathbb{Z}$

d) $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f''(x)=\frac{-1}{x^2}$ $\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f^{IV}(x)=\frac{-6}{x^4}$ $\quad f^{k)}(x)=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}$ $\quad$ Para $k\in\mathbb{Z}$

89. Página 207

$f'(x)=-g'(x)\cdot\operatorname{sen}(g(x))\cdot 2^{\cos(g(x))}\cdot\ln 2$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-g'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot 2^{\cos\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}\cdot\ln 2=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\ln 2=2\cdot 2^0\cdot\ln 2=2\cdot\ln 2$

90. Página 207

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f''(x)=\dfrac{-1}{4\sqrt{x^3}}$ $\quad f'''(x)=\dfrac{3}{8\sqrt{x^5}}$ $\quad f^{IV}(x)=\dfrac{-15}{16\sqrt{x^7}}$

$$f^{n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 1}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}\quad \forall n\geq 4$$

b) $f'(x)=2\cos(2x)$ $\quad f''(x)=-4\,sen(2x)$ $\quad f'''(x)=-8\cos(2x)$ $\quad f^{IV}(x)=16\,sen(2x)$

$$\begin{cases} f^{4k)}(x)=2^{4k}\cdot sen(2x)\\ f^{4k+1)}(x)=2^{4k+1}\cdot\cos(2x)\\ f^{4k+2)}(x)=-2^{4k+2}\cdot sen(2x)\\ f^{4k+3)}(x)=-2^{4k+3}\cdot\cos(2x)\end{cases}\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

c) $f'(x)=-e^{-x}$ $\quad f''(x)=e^{-x}$ $\quad f'''(x)=-e^{-x}$ $\quad f^{IV}(x)=e^{-x}$

$f^{n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$

d) $f'(x)=2^x\cdot\ln 2$ $\quad f''(x)=2^x\cdot(\ln 2)^2$ $\quad f'''(x)=2^x\cdot(\ln 2)^3$ $\quad f^{IV}(x)=2^x\cdot(\ln 2)^4$

$f^{n)}(x)=2^x\cdot(\ln 2)^n$

e) $f'(x)=e^x+x\cdot e^x$ $\quad f''(x)=(2+x)\cdot e^x$ $\quad f'''(x)=(3+x)\cdot e^x$ $\quad f^{IV}(x)=(4+x)\cdot e^x$

$f^{n)}(x)=(n+x)e^x$

f) $f'(x)=-sen(2x)$ $\quad f''(x)=-2\cos(2x)$ $\quad f'''(x)=4\,sen(2x)$ $\quad f^{IV}(x)=8\cos(2x)$

$$\begin{cases} f^{4k)}(x)=2^{4k-1}\cdot\cos(2x)\\ f^{4k+1)}(x)=-2^{4k}\cdot sen(2x)\\ f^{4k+2)}(x)=-2^{4k+1}\cdot\cos(2x)\\ f^{4k+3)}(x)=2^{4k+2}\cdot sen(2x)\end{cases}\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

91. Página 207

a) $y'=2x-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ $\quad$ b) $y'=4\cos x-4\cos(4x)$ $\quad$ c) $y'=-\dfrac{2}{x^3}+4x+\dfrac{3}{x^2}$

92. Página 207

a) $y'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ b) $y'=\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}$ $\quad$ c) $y'=2\cos x\cdot sen\,x-2\cos x\cdot sen\,x=0$

93. Página 207

a) $y'=\dfrac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$ $\quad$ c) $y'=2x^3(4\cos x-x\,sen\,x)$

b) $y'=x(x+2)e^{x+2}$ $\quad$ d) $y'=\dfrac{2\cos^2 x-sen^2 x}{2\sqrt{\cos x}}$

94. Página 207

a) $y'=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}$

b) $y'=\frac{6}{x^3}+1$

c) $y'=(3e)^{-x}(1-x(1+\ln 3))$

d) $y'=e^{-x}\left(x^2-x-1\right)$

e) $y'=\frac{-1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

f) $y'=\frac{-4x-9}{(x-3)^4}$

95. Página 207

a) $y'=\frac{4}{x^2+1}$

b) $y'=2\cos x+\sec^2 x$

c) $y'=1+2x\cdot \operatorname{arctg} x$

d) $y'=4\cos(2x)$

e) $y'=5tg(5x+2)\sec(5x+2)$

f) $y'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

g) $y'=\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{sen^2 x}}$

96. Página 207

a) $y'=\frac{4x-9}{x(x-3)}$

b) $y'=\frac{x}{x^2-2}$

c) $y'=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

d) $y'=\frac{15x^2}{(5x^3-1)\cdot\ln 2}$

97. Página 207

a) $y'=\frac{4}{sen 4x}$

b) $y'=-6x\cdot tg\left(x^2-1\right)$

c) $y'=\frac{20x}{(x^4-25)\cdot\ln 2}$

d) $y'=\frac{1}{2x-2x^2}$

e) $y'=\frac{1+sen^2 x-2x\, sen(2x)}{2x\cdot\ln 10\cdot(sen^2 x+1)}$

98. Página 207

a) $y'=4^x\ln 4$

b) $y'=-\frac{16x}{\left(x^2-4\right)^2}$

c) $y'=\frac{2x^2-2x+1}{(x-1)^2x^2}$

d) $y'=\frac{7}{2\sqrt{x}}+\frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y'=e^x(x+1)$

99. Página 207

a) $y'=\dfrac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}}=\dfrac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

b) $y'=\dfrac{-1}{(x-3)^2}$

c) $y'=\dfrac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) $y'=-15x^2+2x\,sen\,x+x^2cos\,x$

e) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}+2^x\ln 2$

100. Página 207

a) $y'=\dfrac{2xe^x-(x^2+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-x^2+2x-1}{e^x}$

b) $y'=\dfrac{\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

c) $y'=\dfrac{-\sqrt{x-1}}{(x-1)^2\sqrt{x+1}}$

d) $y'=\dfrac{2(x+2)(x+1)-(x+2)^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

e) $y'=\dfrac{-2x^3+4x}{e^{x^2}}$

f) $y'=\dfrac{-4x^3-3x^2-2}{2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3-1}}(x^3-1)^2}$

101. Página 207

a) $y'=3^{x^2+4}\ln 3\cdot 2x$

b) $y'=15x^4(x^5-2)^2$

c) $y'=\dfrac{1}{3}(x^3-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2-2)=\dfrac{3x^2-2}{3\sqrt[3]{(x^3-2x)^2}}$

d) $y'=-10xe^{-x^2}$

e) $y'=\dfrac{-5x-6}{2x^4\sqrt{x+1}}$

102. Página 207

a) $y'=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

b) $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

c) $y'=2xe^{x^2-7}$

d) $y'=2\,sen\,x\cdot cos\,x$

e) $y'=2^{sen\,x}\cdot\ln 2\cdot cos\,x$

103. Página 208

a) $y'=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}=-\dfrac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

b) $y'=-(2x+5)\cdot sen(x^2+5x+5)$

c) $y'=\dfrac{1}{x^2\cdot tg\,x}\rightarrow y'=-\dfrac{x+x\,tg^2x+2tg\,x}{x^3tg^2x}$

d) $y'=\dfrac{5}{\sqrt{1-(5x+1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{-25x^2-10x}}$

104. Página 208

a) $y' = 12 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x+1) = \frac{36x+6}{\sqrt{3x^2+x}}$

b) $y' = \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{\operatorname{sen} x^2} = 2x \operatorname{cotg} x^2$

c) $y' = (8x-5) \cdot 3^x + (4x^2 - 5x + 1) \cdot 3^x \cdot \ln 3$

105. Página 208

a) $y' = 4tg(2x+3)\left(1 + tg^2(2x+3)\right)$

b) $y' = \frac{3x^2}{1+\left(x^3+6\right)^2}$

c) $y' = \frac{1}{2}(\ln(3x-5))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{3x-5} = \frac{3}{2(3x-5)\sqrt{\ln(3x-5)}}$

106. Página 208

a) $y' = \frac{1}{4}(5x^3+1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 15x^2 = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3+1)^3}}$

b) $y' = 2 \operatorname{arc\,sen} x + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y' = \frac{2}{3}(5x-2)^{-\frac{1}{3}} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x-2}}$

107. Página 208

a) $y' = -\frac{4x}{x^4+4}$

b) $y' = \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x}$

c) $y' = -4\left(tg^2(\cos(2x)) + 1\right) \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot tg(\cos(2x))$

d) $y' = -\frac{2x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{-4x^2+1}}$

108. Página 208

a) $y' = -2e^{\cos 2x} \cdot \operatorname{sen}^2 2x + 2\cos 2x \cdot e^{\cos 2x}$

b) $y' = -10\left(tg^2(-5x+1)+1\right) \cdot tg(-5x+1)$

c) $y' = -6(2x-1)^2 \cdot \operatorname{sen}((2x-1)^3)$

d) $y' = -6\cos^2(2x-1) \cdot \operatorname{sen}(2x-1)$

109. Página 208

a) $y' = \frac{2x+e^x}{x^2+e^x}$

b) $y' = \frac{4x}{x^2+1}$

c) $y' = 2 - \frac{1}{x}$

d) $y' = \frac{2x^2+9x-3}{3x\left(x^2+2x-3\right)}$

e) $y' = -\frac{x \operatorname{sen} x + \cos x + 1}{x + x\cos x}$

110. Página 208

a) $y' = \dfrac{4x^2 - 2}{\sqrt{1 - x^2}}$

b) $y' = -\dfrac{\sqrt[3]{cotg x} \cdot cosec\, x \cdot sec\, x}{3}$

c) $y' = -\dfrac{1}{2} cosec\, x \cdot \left(cotg^2 x + cosec^2 x\right)$

d) $y' = -2sen(2 - x)cos(2 - x) = -sen(4 - 2x)$

111. Página 208

a) $y' = \dfrac{-x\, sen\, x + sen\, x + x\cos x}{e^x}$

b) $y' = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

c) $y' = \dfrac{2^x \ln 2}{2^x - 1}$

d) $y' = -\dfrac{x\, sen\, x + 2\cos x}{x^3}$

e) $y' = \dfrac{sen\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

112. Página 208

a) $y' = \dfrac{e^x + 1}{2\sqrt{x + e^x}}$

b) $y' = \dfrac{5^{-x}(25^x - 1)\ln 5}{2}$

c) $y' = xe^{-x}(2 - x)$

d) $y' = -2x \cdot e^{1-x^2}$

e) $y' = \dfrac{1}{2} sen\, x \cdot \sqrt{sec^3 x}$

113. Página 208

a) $y' = 2(e^x + 1) \cdot cosec(2x + 2e^x)$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cdot arc\cos(-x)}$

c) $y' = sec^2 x \cdot \left(2tg\, x + sec^2(tg\, x)\right)$

d) $y' = -4x^3$

e) $y' = \dfrac{-4\cos\left(\ln(2 - 4x)\right)}{2 - 4x}$

f) $y' = \dfrac{1}{2} sen(2x + 1) \cdot (3\cos 3x + 5\cos(x + 2)) \cdot sec^2(1 - x)$

114. Página 208

a) $y' = \dfrac{-2}{(1 + x^2)\sqrt{x^2 + 2}}$

b) $y' = -\dfrac{tg(2x)}{\sqrt{\ln(cos(2x))}}$

c) $y' = e^{-x}\left(-x^3 + 3x^2 + x - 1\right)$

d) $y' = \dfrac{e^x\left(2e^x + 1\right)}{3}$

e) $y' = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot \cos x - 2x\, sen\, x \cdot (\ln(x^2 + 1) - 1)}{(x^2 + 1)^2}$

115. Página 208

a) $y' = \dfrac{4}{x^2+16}$

b) $y' = \dfrac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}$

c) $y' = \dfrac{-sen\,x \cdot cos\,x}{\sqrt{sen^2 x} \cdot \sqrt{1-sen^2 x}} = -1$

d) $y' = \dfrac{x^2-3}{2x \cdot \sqrt{x^3-x^2+1}\sqrt{x^2-1}}$

e) $y' = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

116. Página 209

a) $y' = -\dfrac{1}{x^2-1}$

b) $y' = \dfrac{-1}{2x^2-2x+1}$

c) $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

d) $y' = -\dfrac{\ln 2 \cdot sen\,x \cdot \sqrt[3]{2^{cos\,x}}}{3}$

e) $y' = -\dfrac{1}{2x \cdot \ln 2}$

f) $y' = -3cos^2 x \cdot sen\,x + 2sen\,x \cdot cos\,x$

117. Página 209

a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2 \cdot sen\,x}{cos\,x}} = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 tg\,x\right) \rightarrow y' = \dfrac{cotg\,x \cdot (x^2 sec^2 x + 2x\,tg\,x)}{2x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{sen(2x)}$

b) $y = \dfrac{cos\,2x + sen\,2x}{cos\,2x - sen\,2x} \rightarrow y' = \dfrac{4}{(cos\,2x - sen\,2x)^2}$

c) $y = ln\left(\dfrac{1+tg\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1-tg\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right) \rightarrow y' = sec\,x$

d) $y = tg\,x \cdot e^{x^2} \rightarrow y' = e^{x^2}(2x\,tg\,x + sec^2 x)$

118. Página 209

a) $y = arc\,sen\sqrt{x} \rightarrow y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

b) $y = \sqrt[4]{sen\left(x^3+1\right)} \rightarrow y' = \dfrac{1}{4}\left(sen\left(x^3+1\right)\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot cos\left(x^3+1\right) \cdot 3x^2 = \dfrac{3x^2 cos\left(x^3+1\right)}{4\sqrt[4]{sen^3\left(x^3+1\right)}}$

c) $y = 2^{x^2+4} + x^2 + 4 \rightarrow y' = 2^{x^2+4} \cdot \ln 2 \cdot 2x + 2x = 2x \cdot \left(2^{x^2+4} \cdot \ln 2 + 1\right)$

d) $y = \dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x} \rightarrow y' = \dfrac{\dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} \cdot x - \ln\sqrt{x+1}}{x^2} = \dfrac{x - 2(x+1)\ln\sqrt{x+1}}{2(x+1)x^2}$

e) $y = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x = x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \rightarrow y' = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + x \cdot \dfrac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}} = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{1}{x+1}$

119. Página 209

$$f(x)=\frac{\cos x+\cos(x+1)}{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(x+1)} \rightarrow f'(x)=\frac{-\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2(x+1)-\cos^2 x+\cos^2(x+1)}{(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(x+1))^2}=\frac{-1+1}{(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(x+1))^2}=0$$

Es razonable suponer que la función $f(x)$ es constante, porque su derivada es nula.

120. Página 209

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}\right) \rightarrow f'(x)=-\frac{\cos x}{2\cdot(1+\operatorname{sen} x)\cdot\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}}=-\frac{\cos x}{2\cdot(1+\operatorname{sen} x)\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}}=-\frac{\cos^2 x}{2\cdot\cos^2 x}=-\frac{1}{2}$$

121. Página 209

a) $y=(\sqrt{x})^x \longrightarrow y'=\frac{1}{2}(\sqrt{x})^x(2\ln\sqrt{x}+1)$

b) $y=x^{\sqrt{x}} \longrightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

c) $y=(x-\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}} \longrightarrow y'=-\frac{1}{2}(x-\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{2\sqrt{x}(\cos x-1)}{x-\operatorname{sen} x}-\frac{\ln(x-\operatorname{sen} x)}{\sqrt{x}}\right)$

d) $y=(\operatorname{sen} x)^{2x} \longrightarrow y'=2(\operatorname{sen} x)^{2x}\left(\frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}+\ln(\operatorname{sen} x)\right)$

e) $y=\sqrt[x]{\cos x} \longrightarrow y'=\sqrt[x]{\cos x}\left(\frac{-\ln(\cos x)}{x^2}-\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$

f) $y=(\operatorname{arc\,sen} x)^{\operatorname{sen} x} \longrightarrow y'=(\operatorname{arc\,sen} x)^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x\cdot\ln(\operatorname{arc\,sen} x)+\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{arc\,sen} x}\right)$

122. Página 209

a) $y=x^x$

$\ln y=\ln x^x \longrightarrow \ln y=x\ln x \longrightarrow \frac{y'}{y}=1+\ln x \longrightarrow y'=x^x(1+\ln x)$

b) $y=(1+x^2)^x$

$\ln y=\ln(1+x^2)^x \longrightarrow \ln y=x\ln(1+x^2) \longrightarrow \frac{y'}{y}=\ln(1+x^2)+x\cdot\frac{2x}{1+x^2} \longrightarrow y'=(1+x^2)^x\left(\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right)$

c) $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

$\ln y=\ln(\operatorname{sen} x)^{\cos x} \longrightarrow \ln y=\cos x\cdot\ln(\operatorname{sen} x) \longrightarrow \frac{y'}{y}=-\operatorname{sen} x\cdot\ln(\operatorname{sen} x)+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \longrightarrow$

$y'=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x\cdot\ln(\operatorname{sen} x)+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right)$

d) $y=\sqrt[x]{x^3}$

$\ln y=\ln\sqrt[x]{x^3} \longrightarrow \ln y=\frac{3}{x}\cdot\ln x \longrightarrow \frac{y'}{y}=-\frac{3}{x^2}\cdot\ln x+\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{x} \longrightarrow y'=\sqrt[x]{x^3}\cdot\frac{3-3\ln x}{x^2}$

e) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\ln y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to \ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \to \frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1} \to y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)$$

f) $y=(tg\,x)^x$

$$\ln y=\ln(tg\,x)^x \to \ln y=x\ln(tg\,x) \to \frac{y'}{y}=\ln(tg\,x)+x\cdot\frac{1+tg^2x}{tg\,x} \to y'=(tg\,x)^x\left(\ln(tg\,x)+x\cdot\frac{1+tg^2x}{tg\,x}\right)$$

123. Página 209

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=0\to\frac{1}{\sqrt{y}}y'=-\frac{1}{\sqrt{x}}\to y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Despejando, se obtiene: $\sqrt{y}=5-\sqrt{x}\to y=\left(5-\sqrt{x}\right)^2 \to y'=2\left(5-\sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

124. Página 209

a) $3y'-4\cdot 2x=0\to y'=\frac{8x}{3}$

b) $y=\frac{4x^2}{3}$

c) $y'=\frac{8x}{3}$

125. Página 209

a) $\frac{1}{3}-\frac{y'x-y}{x^2}=0 \to y'=\frac{x^2+3y}{3x} \to y'=\frac{x^2+3\left(\frac{x^2}{3}-6x\right)}{3x} \to y'=\frac{2x}{3}-6$

b) $\frac{x}{3}-6=\frac{y}{x}\to y=\frac{x^2}{3}-6x$

c) $y'=\frac{2x}{3}-6$

126. Página 209

a) $x^2+y^2-2xy=0$

$$2x+2yy'-2y-2xy'=0\to(2y-2x)y'=2y-2x\to y'=\frac{2y-2x}{2y-2x}=1$$

b) $x=cos(xy)$

$$1=-sen(xy)(y+xy')\to y+xy'=-\frac{1}{sen(xy)}\to xy'=-\frac{1}{sen(xy)}-y\to y'=\frac{-1-sen(xy)}{xsen(xy)}$$

c) $x^3+3y^2-2ay=0$

$$3x^2+6yy'-2ay'=0\to(6y-2a)y'=-3x^2\to y'=\frac{-3x^2}{6y-2a}$$

d) $e^{2y}-\ln x^3=3$

$$e^{2y}2y'-\frac{3x^2}{x^3}=0\to e^{2y}2y'=\frac{3}{x}\to y'=\frac{3}{2xe^{2y}}$$

127. Página 209

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\dfrac{2x}{16}+\dfrac{2y}{4}\cdot y'=0\rightarrow\dfrac{y}{2}\cdot y'=-\dfrac{x}{8}\rightarrow y'=-\dfrac{x}{4y}$

b) $x^3+y^3+xy=0$

$3x^2+3y^2y'+y+xy'=0\rightarrow(3y^2+x)y'=-3x^2-y\rightarrow y'=-\dfrac{3x^2+y}{3y^3+x}$

c) $y^3-2xy+7=3x+1$

$3y^2y'-2y-2xy'=3\rightarrow(3y^2-2x)y'=3+2y\rightarrow y'=\dfrac{3+2y}{3y^2-2x}$

d) $(2y^2+3)^3=5x^3-3x$

$3(2y^2+3)^2\cdot 4yy'=15x^2-3\rightarrow y'=\dfrac{15x^2-3}{12y(2y^2+3)^2}$

128. Página 209

a) $y=arc\cos x$

$f(x)=\cos x\ \longrightarrow\ f'(x)=-sen\, x$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(arc\cos x)}=\dfrac{1}{-sen(arc\cos x)}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(arc\cos x)}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y=arc\,sen\,x$

$f(x)=sen\,x\ \longrightarrow\ f'(x)=\cos x$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(arc\,sen\,x)}=\dfrac{1}{\cos(arc\,sen\,x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-sen^2(arc\,sen\,x)}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y=arc\,tg\,x$

$f(x)=tg\,x\ \longrightarrow\ f'(x)=1+tg^2x$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(arc\,tg\,x)}=\dfrac{1}{1+tg^2(arc\,tg\,x)}=\dfrac{1}{1+x^2}$

d) $y=e^x$

$f(x)=\ln x\ \longrightarrow\ f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(e^x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$

e) $y=\ln x$

$f(x)=e^x\ \longrightarrow\ f'(x)=e^x$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(\ln x)}=\dfrac{1}{e^{\ln x}}=\dfrac{1}{x}$

f) $y = x^2 - 2 \rightarrow$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'\left(x^2-2\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2-2+2}}} = 2\sqrt{x^2} = 2x$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 210

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Meterse en la piscina en verano para refrescarse, encender la calefacción para calentarse o el aire acondicionado, utilizar cualquier electrodoméstico o artículo electrónico que libera energía calórica, utilizar una sartén u olla, echar hielos en la bebida…

2. Página 210

El punto de equilibrio térmico es la temperatura a la que llegan cuerpo y medio simultáneamente y que hace que no haya más variación de temperatura (en el sentido de bajar una y subir la otra).

3. Página 210

Lo que ocurrirá es que tenderán a bajar una y subir otra hasta que lleguen a la misma temperatura y se equilibren.

4. Página 210

• Primera ley del movimiento: “Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, salvo que actúen fuerzas sobre él que le obliguen a cambiar de estado”.

• Segunda ley del movimiento: “La fuerza neta sobre un objeto es igual a la tasa de variación temporal del producto de su masa y velocidad”.

• Tercera ley del movimiento: “A cada acción le corresponde una reacción igual y en sentido opuesto”.

• Ley de la Gravitación Universal: la fuerza de atracción entre dos objetos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

• Teoría de las mareas: Isaac Newton realizó varios estudios del comportamiento de las mareas y calculó la altura de estas según la fecha del mes, la estación del año y la latitud. La explicación que dio es la que se acepta actualmente.

• Teoría del color: descubrió que la luz procedente del sol (la luz blanca) se puede descomponer en colores.